Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 17. Januar 2019, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

41.S In der Vorlesung haben wir die Gamma(2)-Verteilung kennengelernt. Allgemeiner sagt man für $k > 0$: Eine Zufallsvariable ist *Gamma(k))-verteilt*, wenn ihre Dichte von der Form $\frac{1}{\Gamma(k)} b^{k-1} e^{-b}\, db$ ist, mit $\Gamma(k) := \int_0^\infty b^{k-1} e^{-b} db$.
a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe von k unabhängigen, standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen hat die Dichte $\frac{1}{(k-1)!} b^{k-1} e^{-b}\, db$, $b \geq 0$.[1]
b) Finden Sie (per Überschlag, ohne große Rechnung, jedoch mit passender Begründung), die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gamma(10000)-verteilte Zufallsvariable in das Intervall $[9800, 10200]$ fällt.
c) X sei Exp(1)-verteilt und Y sei Gamma(k)-verteilt mit $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie für $-\infty < t < 1$
(i) $\mathbf{E}[e^{tX}]$ (ii) $\mathbf{E}[e^{tY}]$.

42. Im Fachbereich A einer Universität war die Durchfallquote bei der Aufnahmsprüfung 0.4 bei den Männern und 0.3 bei den Frauen, im Fachbereich B war sie 0.8 bei den Männern und 0.7 bei den Frauen. (In beiden Fachbereichen haben Frauen damit jeweils besser abgeschnitten als Männer.) Paradoxerweise war die Durchfallsquote bei den Männern insgesamt (mit den beiden Fachbereichen zusammengenommen) niedriger, nämlich 0.5, im Gegensatz zu 0.6 bei den Frauen. Wie kann das sein? Berechnen Sie aus den Angaben, ein wie großer Prozentsatz der Männer (Frauen) im Fachbereich B angetreten ist, und formulieren Sie mit Blick darauf eine auch für alle Ihre Freunde verständliche Erklärung des Paradoxons.[2]

43. S (Frei nach dem Eingangsbeispiel im 2. Vortrag der diessemestrigen Ringvorlesung[3] https://www.mathe-uni-ffm.de/ringvorlesung/algorithmen-maschinelles-lernen-quantencomputing): Jemand führt einen Münzwurf vor. Aus gewissen Gründen kommt nur in Frage, dass er entweder die ganze Zeit eine faire 01-Münze verwendet, oder eine mit $p = 0.8$. Bevor er beginnt, schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er eine faire Münze verwendet, mit 0.9 ein. Wie aktualisieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine faire Münze handelt, nachdem
(i) beim ersten Wurf eine Eins
(ii) bei den beiden ersten Würfen eine Eins
geworfen wurde?

44.[4] U_0, U_1, U_2, U_3 seien unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt.
a) Geben Sie eine Abbildung h von $[0, 1]^4$ auf die Menge $\{0, 1, 2, 3\}^4$ an, so dass $h(U_0, U_1, U_2, U_3)$ eine rein zufällige Permutation von $0, 1, 2, 3$ ist.
b) Bestimmen Sie $\mathbf{P}(U_1 < U_0, U_2 < U_0)$ und $\mathbf{P}(U_1 < U_0, U_2 < U_0, U_3 \geq U_0)$.
c) Wir definieren $Z_1 := I_{\{U_1 < U_0\}}, Z_2 := I_{\{U_2 < U_0\}}, Z_3 := I_{\{U_3 < U_0\}}$.
(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_2 = 1 | Z_1 = 1)$ und $\mathbf{P}(Z_3 = 0 | Z_1 = 1, Z_2 = 1)$.
(ii) Tragen Sie die Gewichte der Übergangsverteilungen des durch (Z_1, Z_2, Z_3) beschriebenen 3-stufigen Experiments in einen Baum der Tiefe 3 ein.

Gesegnete Weihnachten und ein glückliches Jahr 2019!

[1] Damit haben Sie dann im Vorbeigehen gezeigt, dass für $k = 1, 2, \ldots$, gilt: $\Gamma(k) = (k-1)!$
[2] Die Zahlen hier sind erfunden. Eine ähnliche Geschichte hat sich allerdings tatsächlich einmal an der Universität Berkeley zugetragen und führte sogar zu einer Diskriminierungsklage, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Simpson-Paradoxon
[3] Die Vorträge 3 und 4 sind am 22.01. und am 05.02.2019, jeweis Di 18 Uhr im H IV. Der Besuch ist empfehlenswert!
[4] Ein Weihnachtsbonus: Ein schriftliches Bearbeiten dieser Aufgabe ist optional. Es wird anteilsmäßig auf die Bonuspunkte angerechnet.