Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 26. Oktober 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

1. Wie in der Vorlesung betrachten wir eine Gesamtfläche G bestehend aus g Pixeln und eine Teilfläche F bestehend aus f Pixeln. Jetzt geht es um eine fünfmal wiederholte rein zufällige Wahl eines Pixels aus G (entsprechend einem “Ziehen mit Zurücklegen”), hier beschrieben durch eine auf dem Wertebereich $\{1,\dots,g\}^5$ uniform verteilte Zufallsvariable $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.
a) Wieviele Ausgänge von X gibt es?
b) Wieviele Ausgänge von X gibt es, bei denen eines der X_i auf die Menge $\{1,\dots,f\}$ und vier auf die Menge $\{f+1,\dots,g\}$ fallen? Drücken Sie das Ergebnis durch g und durch $p := f/g$ aus.
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass von den fünf zufällig aus G gewählten Pixeln genau eines aus F gewählt wird?
d) Es sei M die zufällige Trefferquote von F . Illustrieren Sie für $p = 0.195$ und $n = 5$ das Ergebnis aus b) mittels des über den Link auf der StofI-Web-Seite zur Verfügung gestellten R-Programms “Monte Carlo Simulation”.[1] Betrachten Sie dazu ein Histogramm der Schätzwerte aus (z.B.) 1000 Wiederholungen des Zufallsexperiments.

2. In der Vorlesung haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche (“Quadrat”) G mit einem einfachen Monte-Carlo-Verfahren geschätzt: n Punkte wurden rein zufällig in G geworfen und der Anteil M der Treffer von F ermittelt. Die (durch unabhängiges Wiederholen dieses Zufallsexperimentes ermittelte “empirische”) Verteilung von M hat uns ein Bild von der Zuverlässigkeit der Schätzung vermittelt. Erkunden Sie (wieder für $p = 0.195$) mittels des R-Programms “Monte Carlo Simulation”, wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn (i) $n = 200$ (ii) $n = 800$ (iii) $n = 3200$ Punkte in die Menge G geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmäler?

3.S Q sei das Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Wir denken uns Q aus 1000 mal 1000 kleinen Teilquadraten (“Pixel”) bestehend. Es sei D die Menge der Pixel auf der Diagonalen (von $(-1, -1)$ nach $(1, 1)$) von Q, und F die Menge der Pixel, die von der Diagonalen einen Abstand höchstens 0.5 besitzen. Die Zufallsvariable X beschreibe die rein zufällige Wahl eines Pixels aus Q. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
a) $\{X \in D\}$, b) $\{X \in F\}$.
Begnügen Sie sich dabei in b) mit einer Näherungslösung, indem Sie einen passenden Flächeninhalt berechnen.

4.S. Von drei Objekten wird jedes rein zufällig auf einen von g möglichen Plätzen gesetzt. Wie groß muss g mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “es kommt zu keiner Kollision” mindestens 0.99 beträgt? Finden Sie das Ergebnis
(a) über die exakte Berechnung
(b) über die in der Vorlesung für den Fall $n \ll g$ betrachtete Näherung.

[1] Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org, zu finden auch über google → R, auf Ihren Rechner.