

Vorlesung 9b

Zweistufigkeit (Teil 2)

1. Addieren von unabhängigen ZV'en
 - zweistufig aufgefasst:

Der diskrete Fall

(Buch S. 92)

Y und Z seien unabhängige \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariable.

Wie ist $Y + Z$ verteilt?

Wir können $Y + Z$ auffassen als
zweite Stufe eines Zufallsexperiments.

Die erste Stufe ist Y .

Gegeben $\{Y = a\}$ ist

$$X_2 := Y + Z$$

so verteilt wie $a + Z$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = a, Y + Z = b) &= \mathbf{P}(Y = a, a + Z = b) \\ &= \mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(a + Z = b)\end{aligned}$$

Wir sehen hier die Produktformel wieder!

Summation über a ergibt die “totale Wahrscheinlichkeit”:

$$\mathbf{P}(Y + Z = b) = \sum_a \mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(Z = b - a)$$

(Zerlegung von $\mathbf{P}(Y + Z = b)$ nach den Ausgängen von Y ,
“Zerlegung nach dem ersten Schritt”)

$$\mathbf{P}(Y + Z = b) = \sum_a \mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(Z = b - a)$$

Beispiel:

Y, Z unabhängig und $\text{Geom}(p)$ -verteilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y + Z = b) &= \sum_{a=1}^{b-1} pq^{a-1} pq^{b-a-1} \\ &= (b-1)p^2q^{b-2}, \quad b = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Dies sind die Gewichte der sogenannten

negativen Binomialverteilung mit Parametern $2, p$

Diese ist die Verteilung der Anzahl der Versuche in einem p -Münzwurf bis einschließlich zum zweiten Erfolg.

2. Addieren von unabhängigen ZV'en

– zweistufig aufgefasst:

Der Fall mit Dichten

(Buch S. 92)

Im diskreten Fall hatten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = a, Y + Z = b) &= \mathbf{P}(Y = a, a + Z = b) \\ &= \mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(a + Z = b) \\ &= \mathbf{P}(Y = a) \mathbf{P}(Z = b - a)\end{aligned}$$

Haben Y und Z die Dichten $f(y) dy$ und $g(z) dz$,
so bekommt man analog

die gemeinsame Dichte von $(Y, Y + Z)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \in da, Y + Z \in db) &= \mathbf{P}(Y \in da, a + Z \in db) \\ &= \mathbf{P}(Y \in da) \mathbf{P}(a + Z \in db) \\ &= f(a)da g(b - a) db\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(Y \in da, Y + Z \in db) = f(a) g(b - a) da db$$

Integration über a gibt die Dichte von $Y + Z$:

$$\mathbf{P}(Y + Z \in db) = \left(\int f(a) g(b - a) da \right) db .$$

Beispiel: Für Y und Z unabhängig und Exp(1)-verteilt ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y + Z \in db) &= \left(\int_0^b e^{-a} e^{-(b-a)} da \right) db \\ &= be^{-b} db, \quad b \geq 0. \end{aligned}$$

(Dichte der Gamma(2)-Verteilung)