Vorlesung 7c

Mittelwerte

Teil 2

Chernoff-Schranken

1. Die Chernoff-Ungleichung für Binom(n, p)

Zur Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen

der (relativen) Anzahl der Erfolge

vom Erwartungswert

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt, und $\alpha > p$.

Wir wissen schon aus dem Gesetz der großen Zahlen:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} > \alpha\right) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wie schnell ist diese Konvergenz?

Die Chebyshev-Ungleichung liefert nur die Ordnung $O(1/n)$.

Gibt es eine “scharfe” Abschätzung für $\mathbf{P}(\frac{X_n}{n} > \alpha)$?

Es stellt sich heraus:

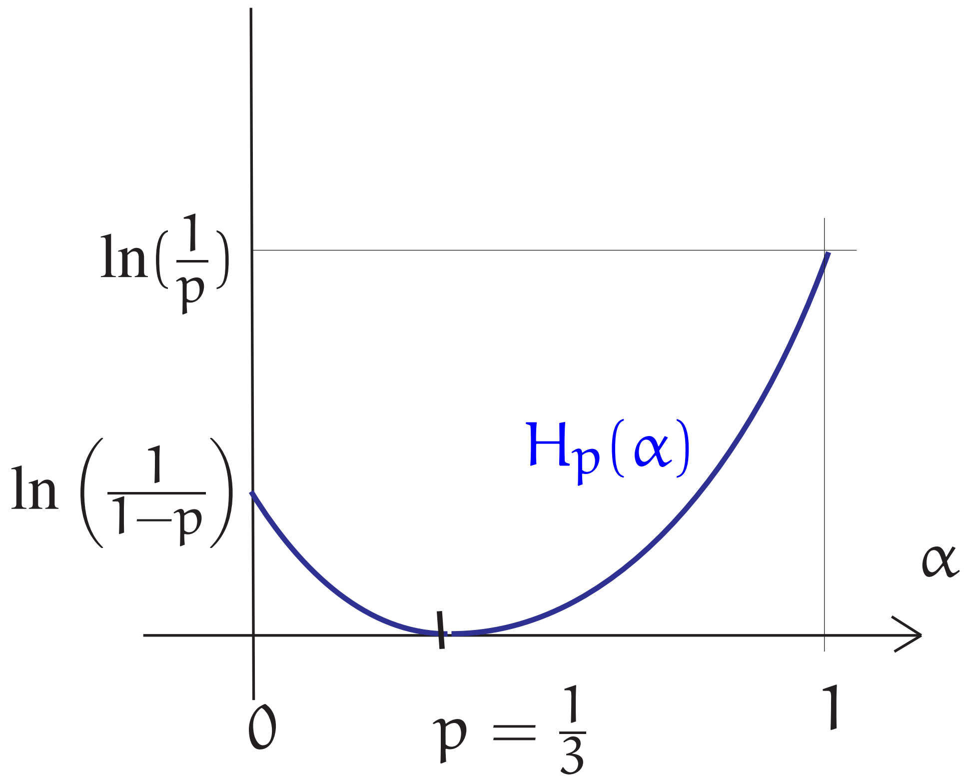
Die Konvergenz (gegen Null) ist exponentiell schnell.

Genauer: Man hat die Chernoff-Schranke

$$\mathbf{P}(X_n/n > \alpha) \leq e^{-nH_p(\alpha)}$$

mit $H_p(\alpha) := \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{p}\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-p}\right) > 0$

... die relative Entropie von Bernoulli(α) bzgl. Bernoulli(p)



$\ln\left(\frac{1}{p}\right)$
$\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$
$H_p(\alpha)$
α
0
$p = \frac{1}{3}$
1

Ein Zahlenbeispiel:

$$n = 10000,\ p = 0.5, \quad \alpha = 0.6$$

$$H_{0.5}(0.6) = 0.0201$$

Die Wahrscheinlichkeit,
bei einem 10000-maligen fairen Münzwurf
mindestens 6000 Erfolge zu erzielen, ist nicht größer als

$$e^{-nH_p(\alpha)} = e^{-201} \approx 5 \cdot 10^{-88}$$

2. Exponentielle Markov-Ungleichung

Das Werkzeug für die Herleitung der Chernoff-Schranke

ist die

exponentielle Markov-Ungleichung:

X sei eine rellwertige ZV'e. Dann gilt für alle $b \in \mathbb{R}$ und $t > 0$:

$$\mathbf{P}(X \geq b) = \mathbf{P}(e^{tX} \geq e^{tb}) \leq \frac{1}{e^{tb}} \mathbf{E}[e^{tX}]$$

also

$$\mathbf{P}(X \geq b) \leq \inf_{t \geq 0} \frac{1}{e^{tb}} \mathbf{E}[e^{tX}]$$

3. Herleitung der Chernoff-Ungleichung

aus der exponentiellen Markov-Ungleichung:

$$\mathbf{P}(X \geq b) \leq \inf_{t \geq 0} \frac{1}{e^{tb}} \mathbf{E}[e^{tX}]$$

Wir berechnen die rechte Seite für $X = X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$,

mit einem p-Münzwurf (Z_i). Es gilt:

$$\mathbf{E}[e^{tZ_i}] = 1 - p + pe^t.$$

Aus der Produktformel für Erwartungswerte folgt:

$$\mathbf{E}[e^{tX}] = (1 - p + pe^t)^n.$$

Mit $b := \alpha n$ folgt:

$$\frac{1}{e^{tb}} \mathbf{E}[e^{tX}] = ((1 - p)e^{-t\alpha} + pe^{t(1-\alpha)})^n$$

$$\frac{1}{e^{tb}}\mathbf{E}[e^{tX}] = ((1-p)e^{-t\alpha} + pe^{t(1-\alpha)})^n$$

Für welches t wird $g(t) := (1-p)e^{-t\alpha} + pe^{t(1-\alpha)}$ minimal?

g konvergiert für $t \to \infty$ nach ∞;

$$g'(t) = -\alpha(1-p)e^{-t\alpha} + p(1-\alpha)e^{t(1-\alpha)}$$

$$= e^{-t\alpha}\left(-\alpha(1-p) + p(1-\alpha)e^{t}\right)$$

ist negativ bei $t = 0$ und verschwindet genau bei

$$e^t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-p}{p}.$$

$e^t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-p}{p}$ eingesetzt in $\dfrac{(1-p+pe^t)^n}{e^{t\alpha n}}$

ergibt

$$\frac{\left((1-p)+(1-p)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-p}{p}\right)^{\alpha n}} = \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha n}\left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)n}$$

$$= e^{-n\left(\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{p}\right)+(1-\alpha)\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-p}\right)\right)}$$

$$= e^{-nH_p(\alpha)}. \quad \square$$

4. Die Chernoff-Ungleichung für Gamma(k)

Übungsaufgabe extra

für die stillste Zeit im Jahr:

X sei Gamma(k)-verteilt, $\alpha > 1$.

(i) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus Übung 41 c):

$$\mathbf{P}(X > \alpha k) \leq e^{-k(\alpha - 1 - \ln \alpha)}.$$

(ii) Finden Sie für $k = 1000$ die Chernoff-Schranke für

$\mathbf{P}(X > 1100)$.