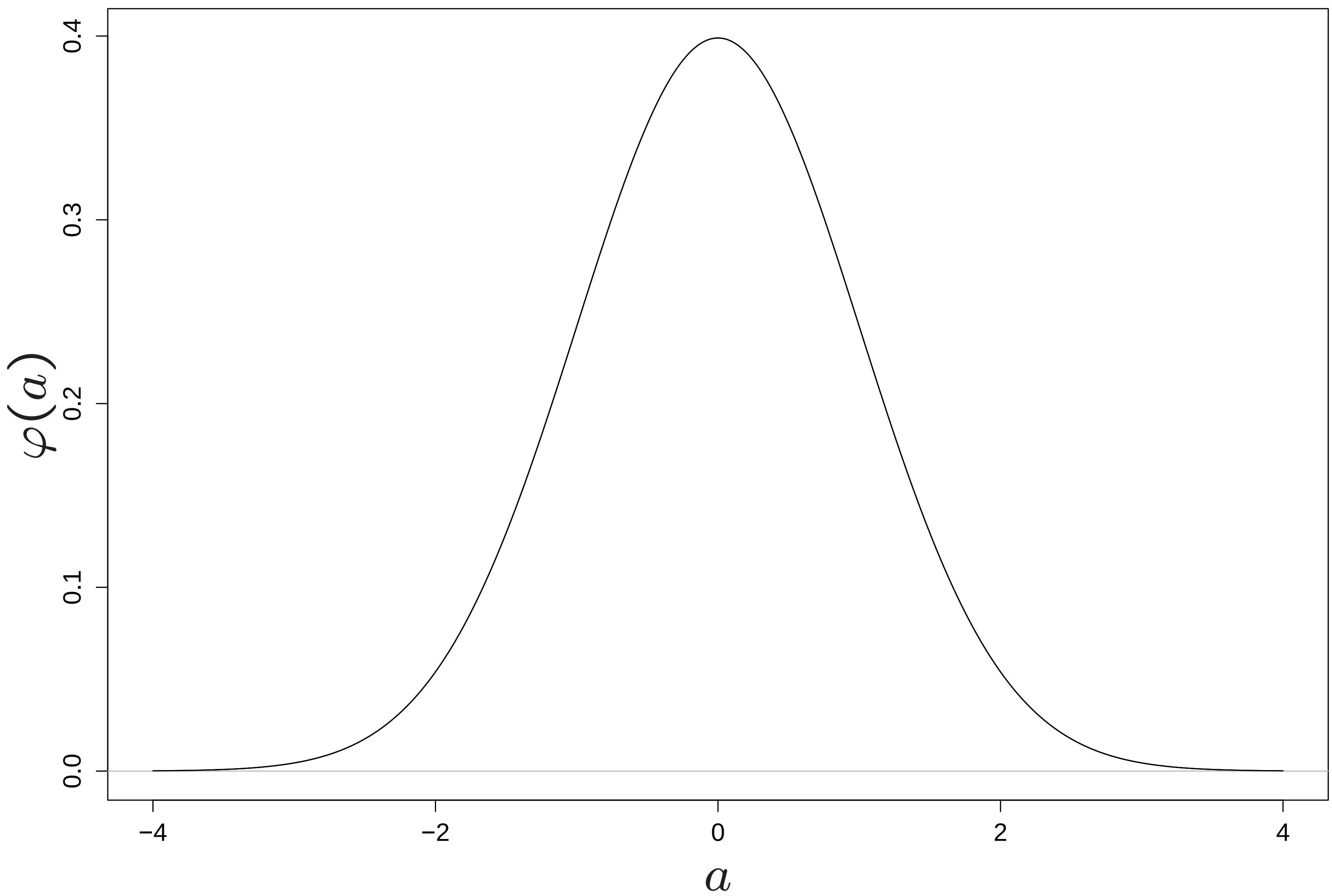
Vorlesung 6b

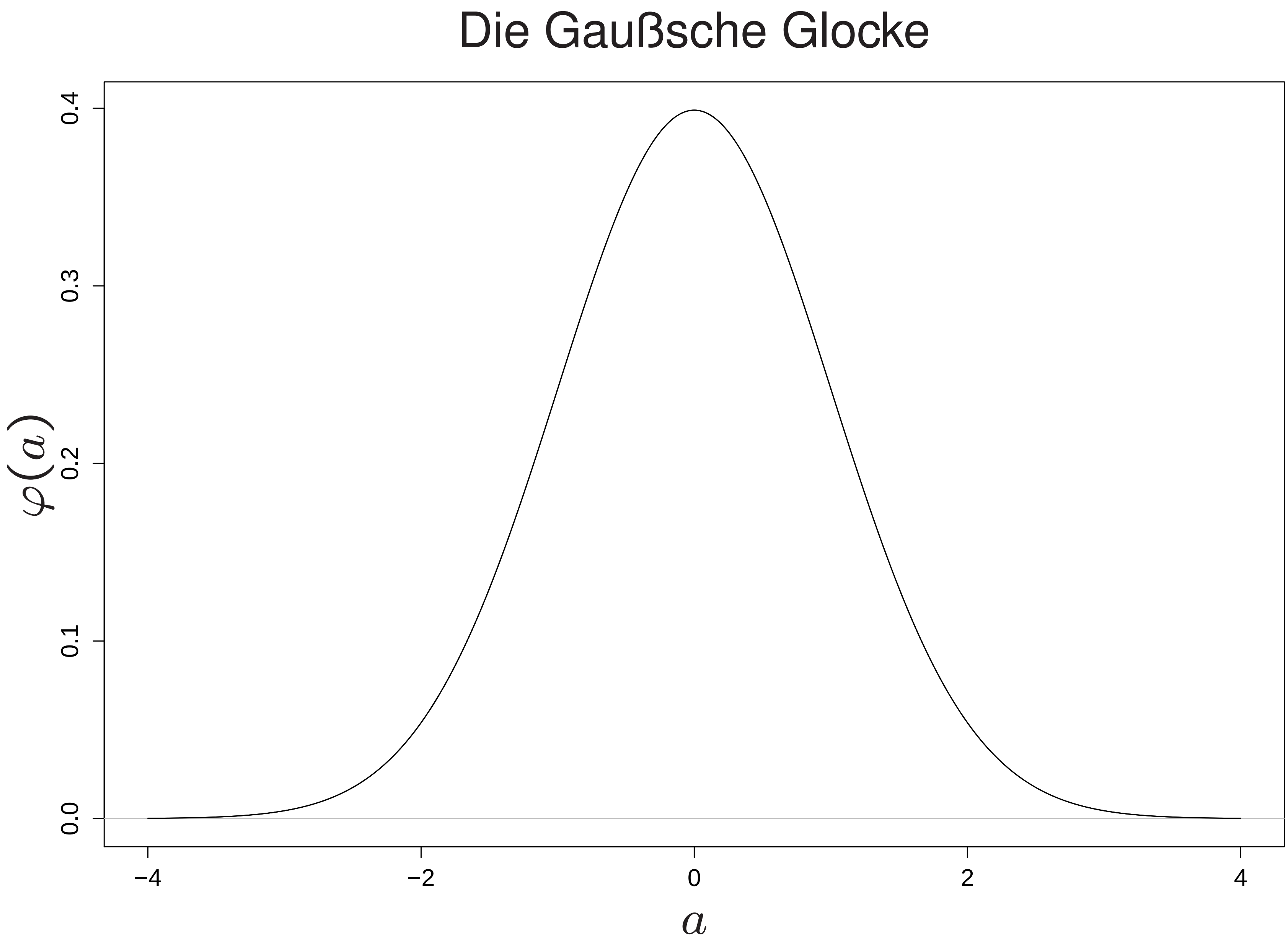
Unabhängigkeit bei Dichten

und die mehrdimensionale Standardnormalverteilung

0. Wiederholung: Die Normalverteilung

Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung




Die Gaußsche Glocke
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
a
$\varphi(a)$

Die Standard-Normalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(b) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-a^2/2} da$$

Z standard-normalverteilt $:\Longleftrightarrow$

$$\mathbf{P}(\, Z \leq b \,) = \Phi(b)$$

Für standard-normalverteiltes Z gilt:

$$\mathbf{E}[Z] = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{-\infty}^{\infty} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

$$= -a\, e^{-a^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2}\, da = \sqrt{2\pi}.$$

Für standard-normalverteiltes Z gilt:

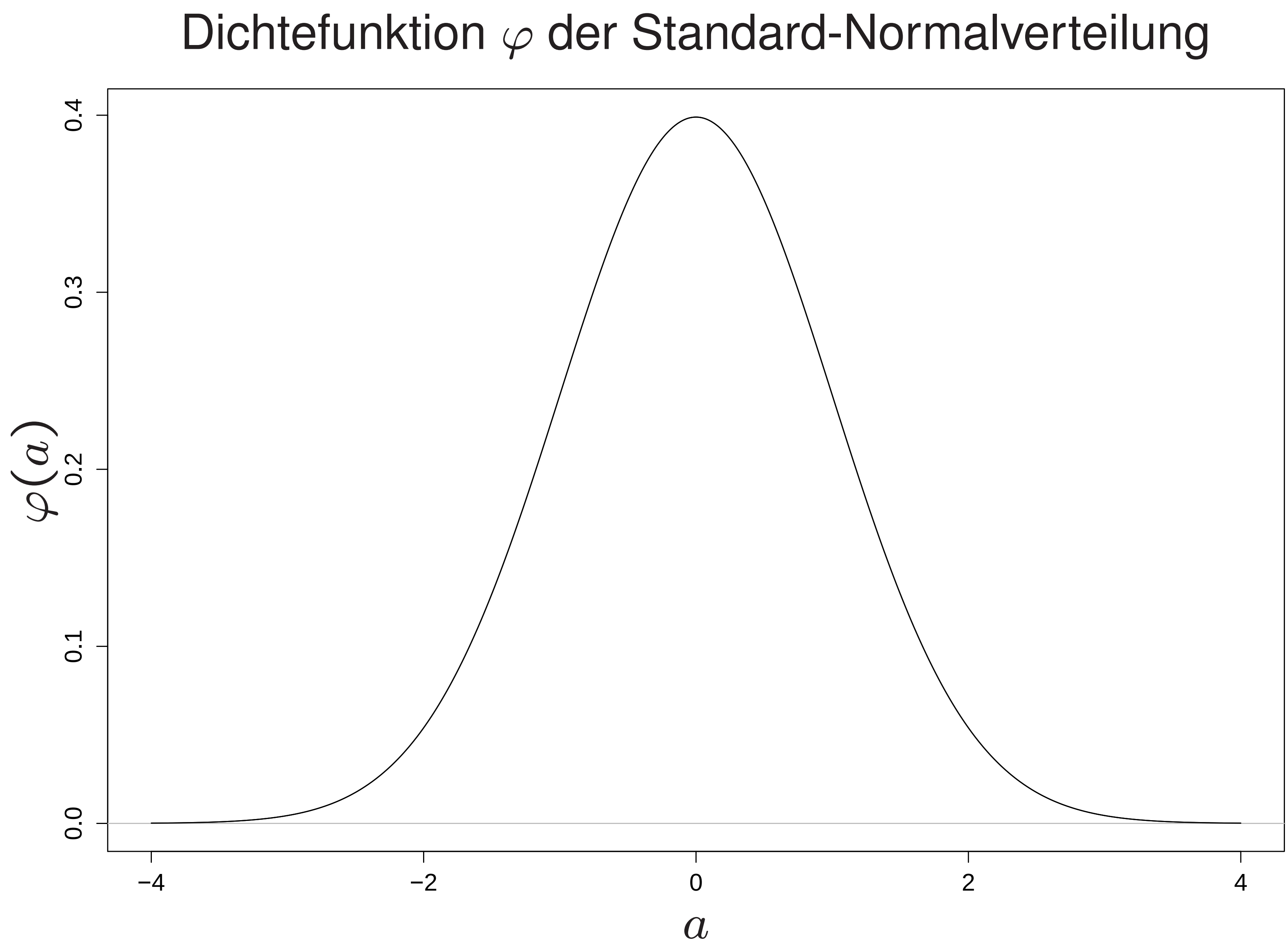
$$\mathbf{E}[Z] = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Allgemeine normalverteilte Zufallsvariable entstehen so:

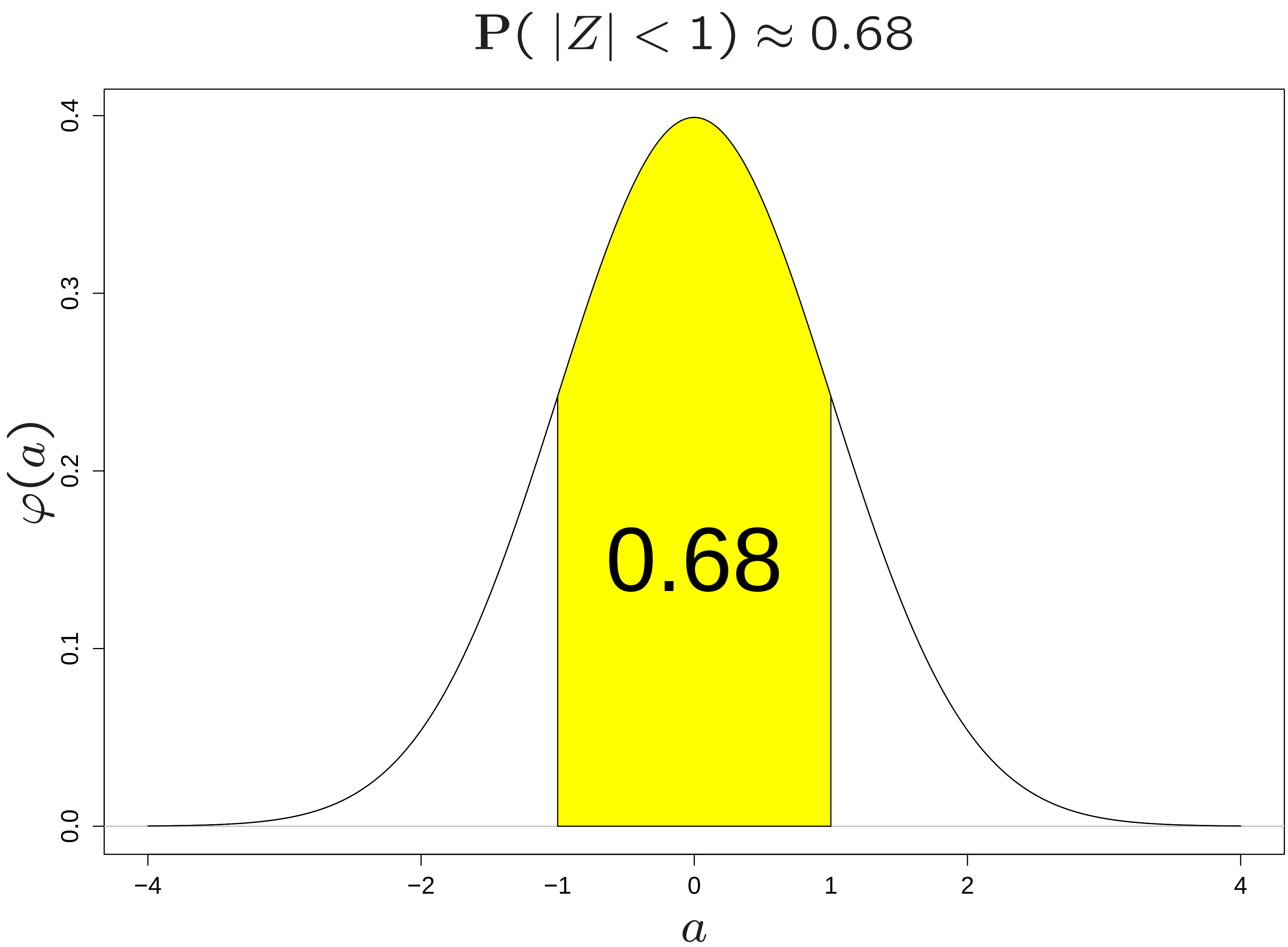
$$X = \mu + \sigma Z$$

Für sie gilt:

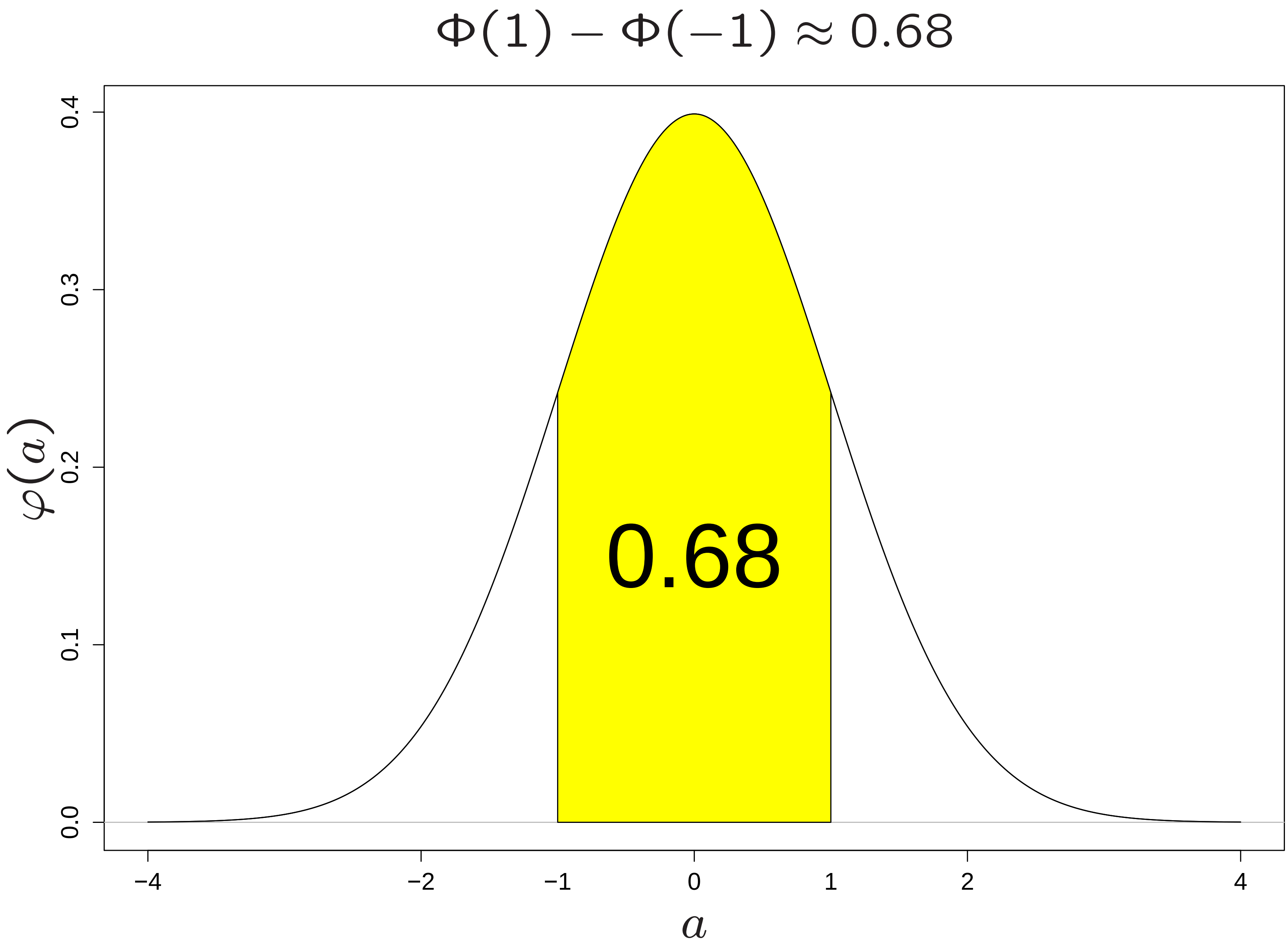
$$\mathbf{E}[X] = \mu \qquad \sigma_X = \sigma$$



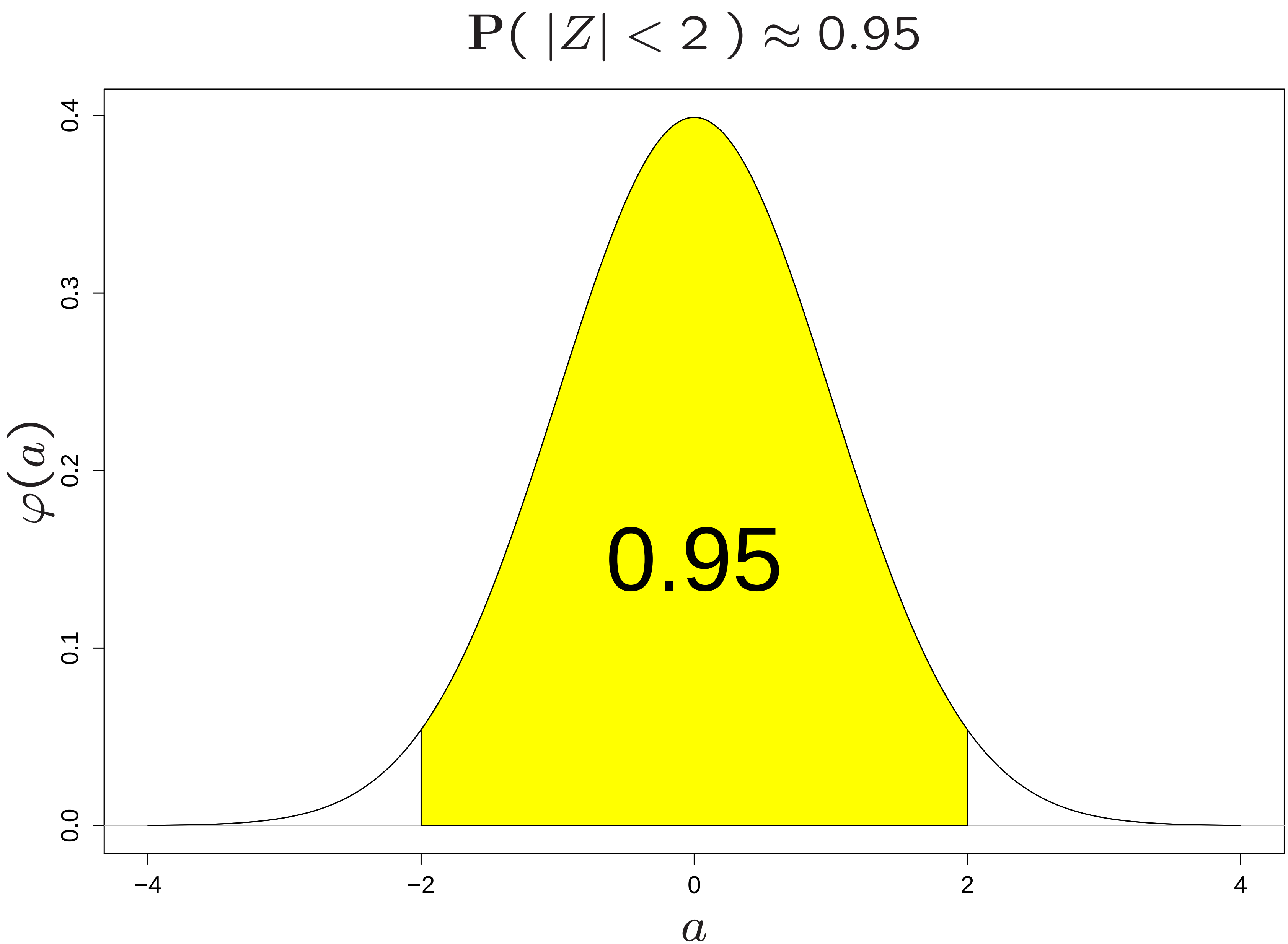
Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(a)$
−4
−2
0
2
4
a



$\mathbf{P}(\,|Z| < 1) \approx 0.68$
0.68
$\varphi(a)$
a
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4

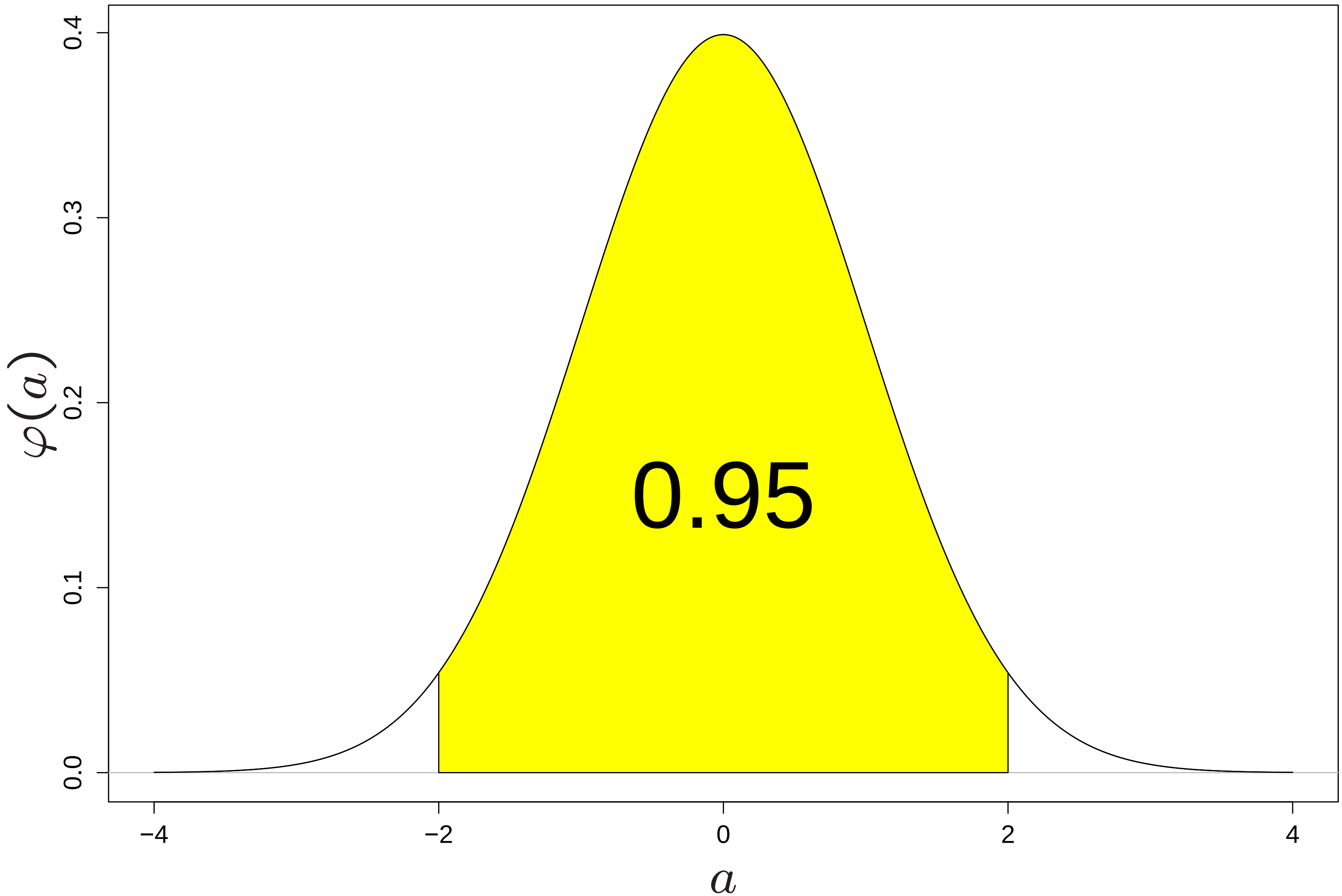


$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(a)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
a

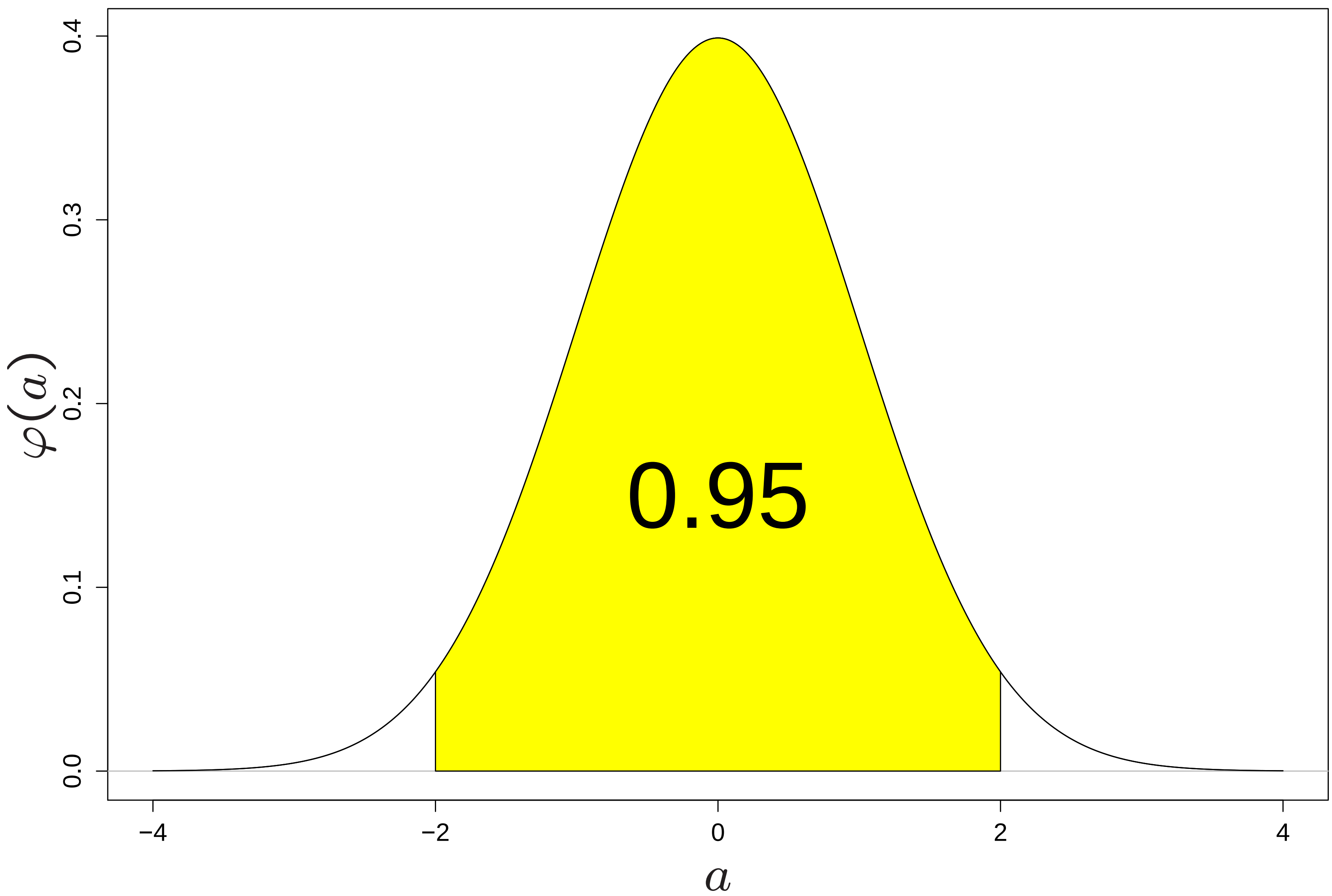


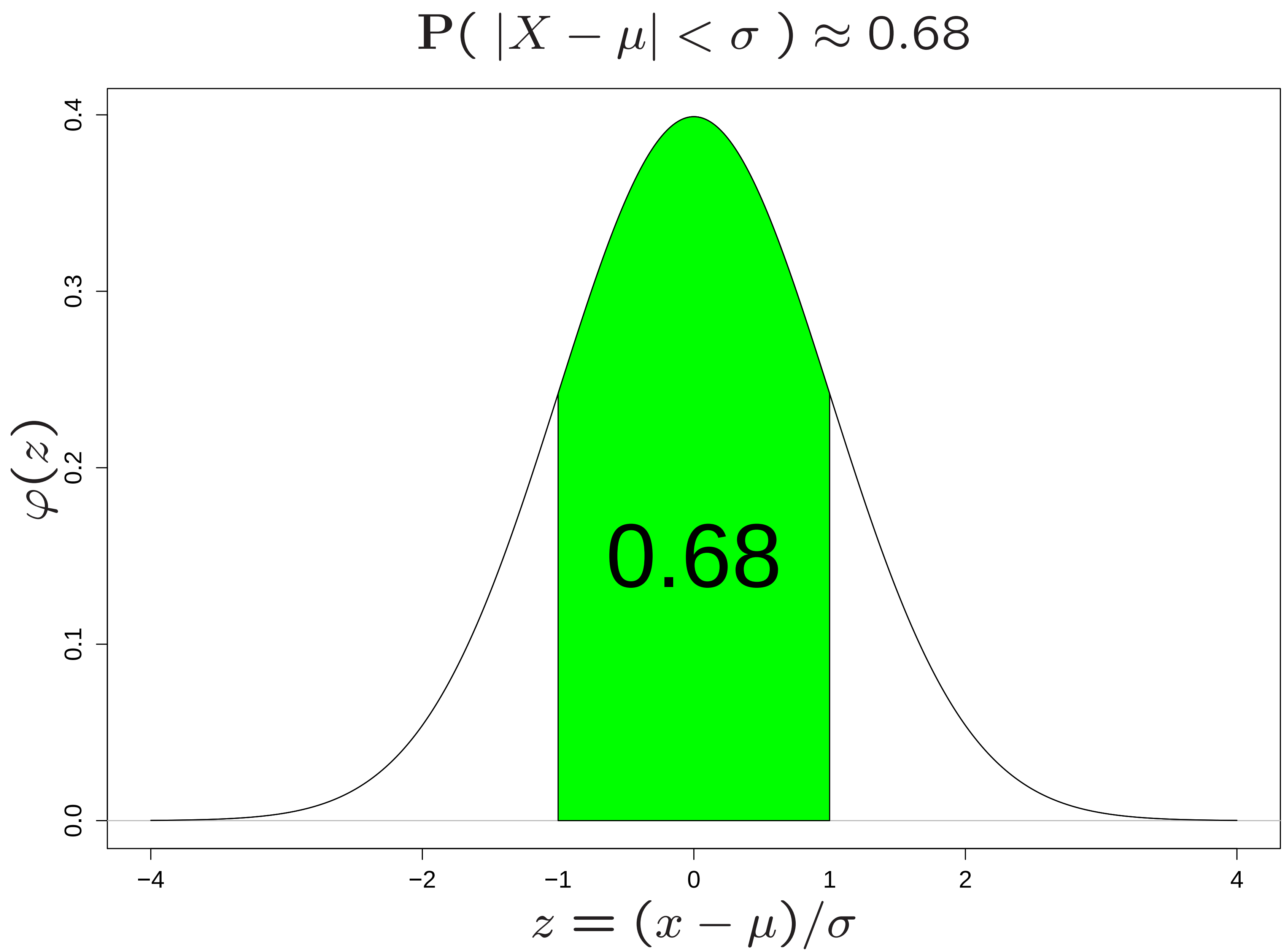
$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$
0.95
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(a)$
−4
−2
0
2
4
a

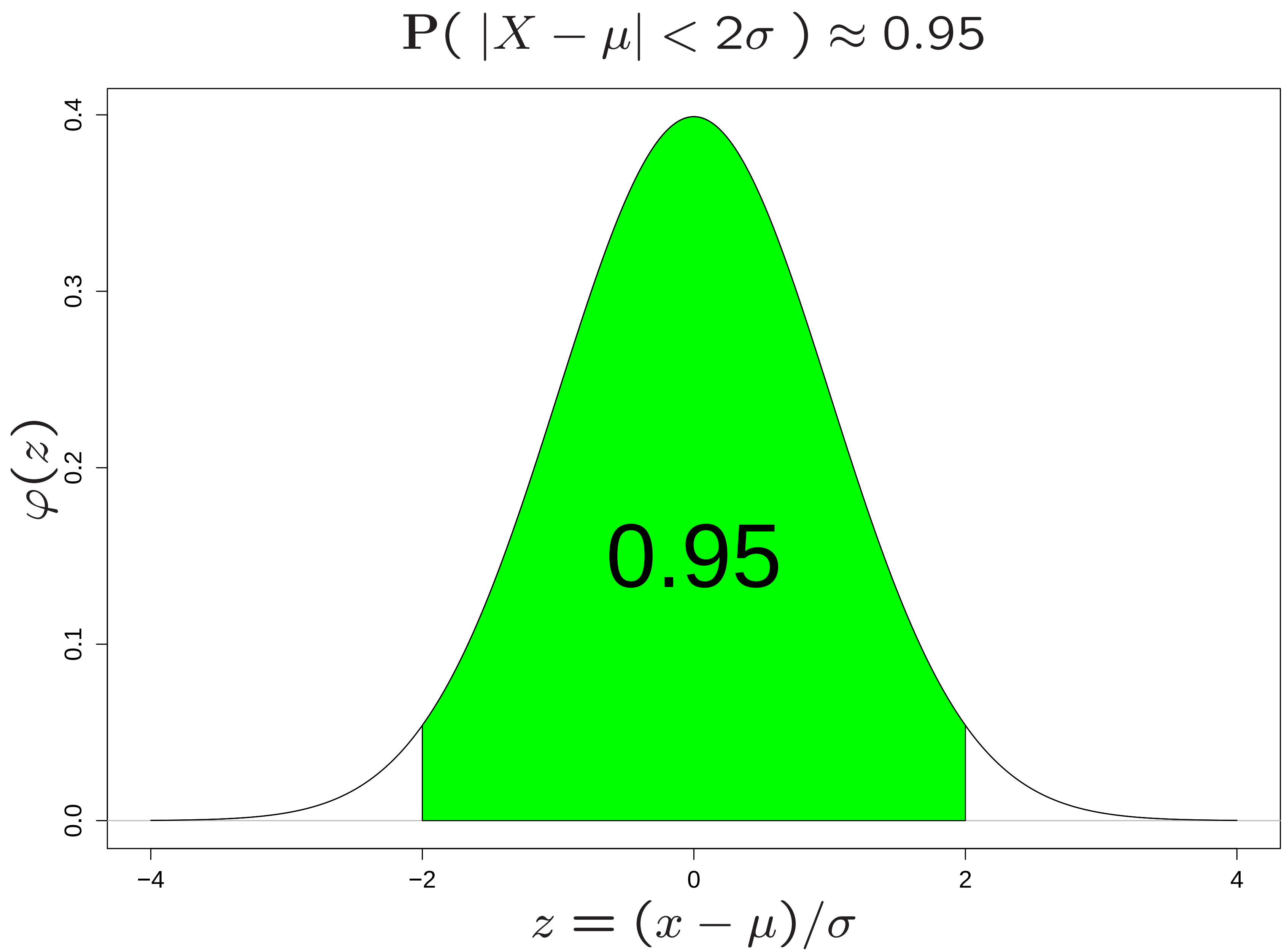
Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen X?



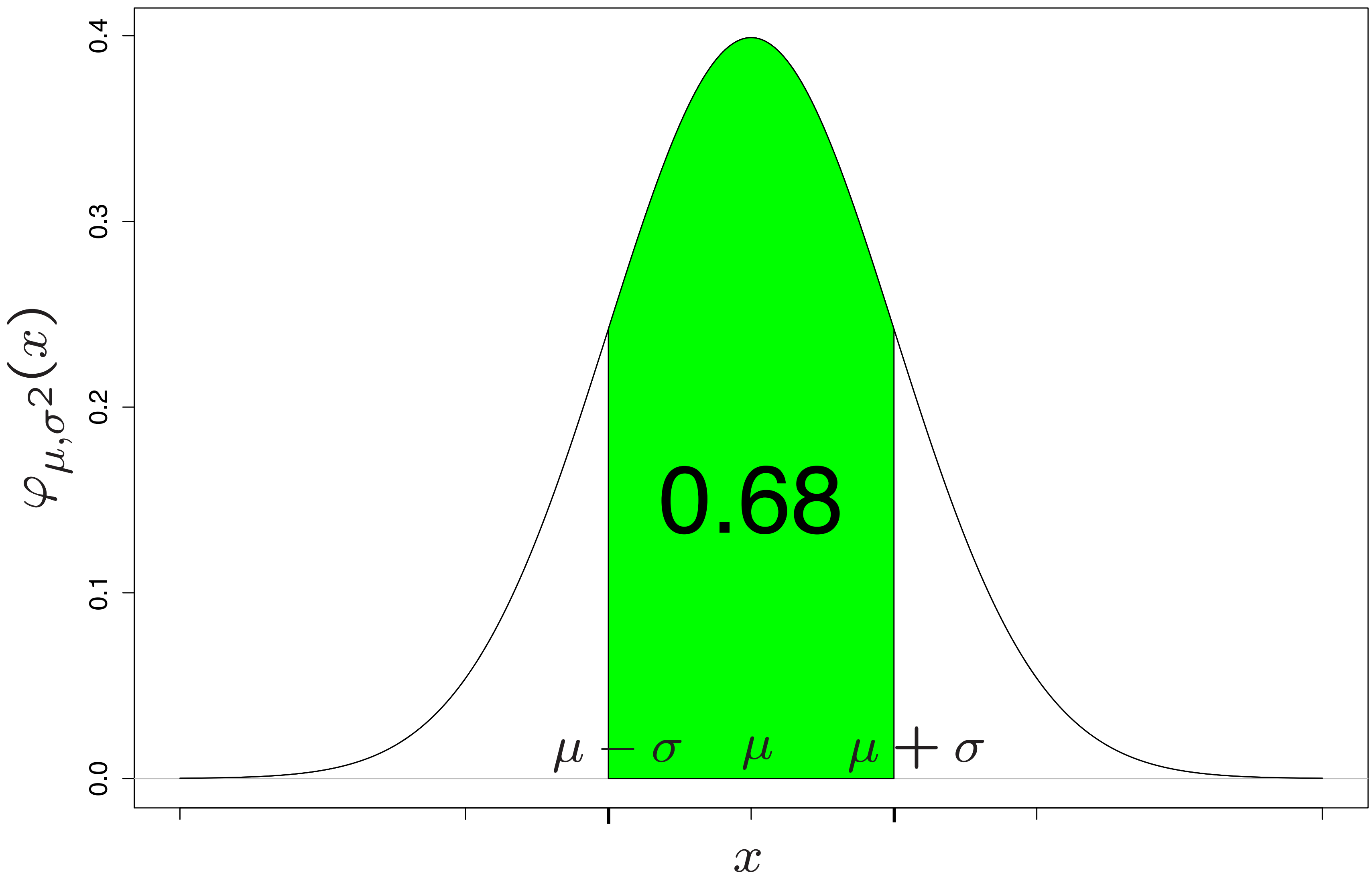
Dasselbe in grün.

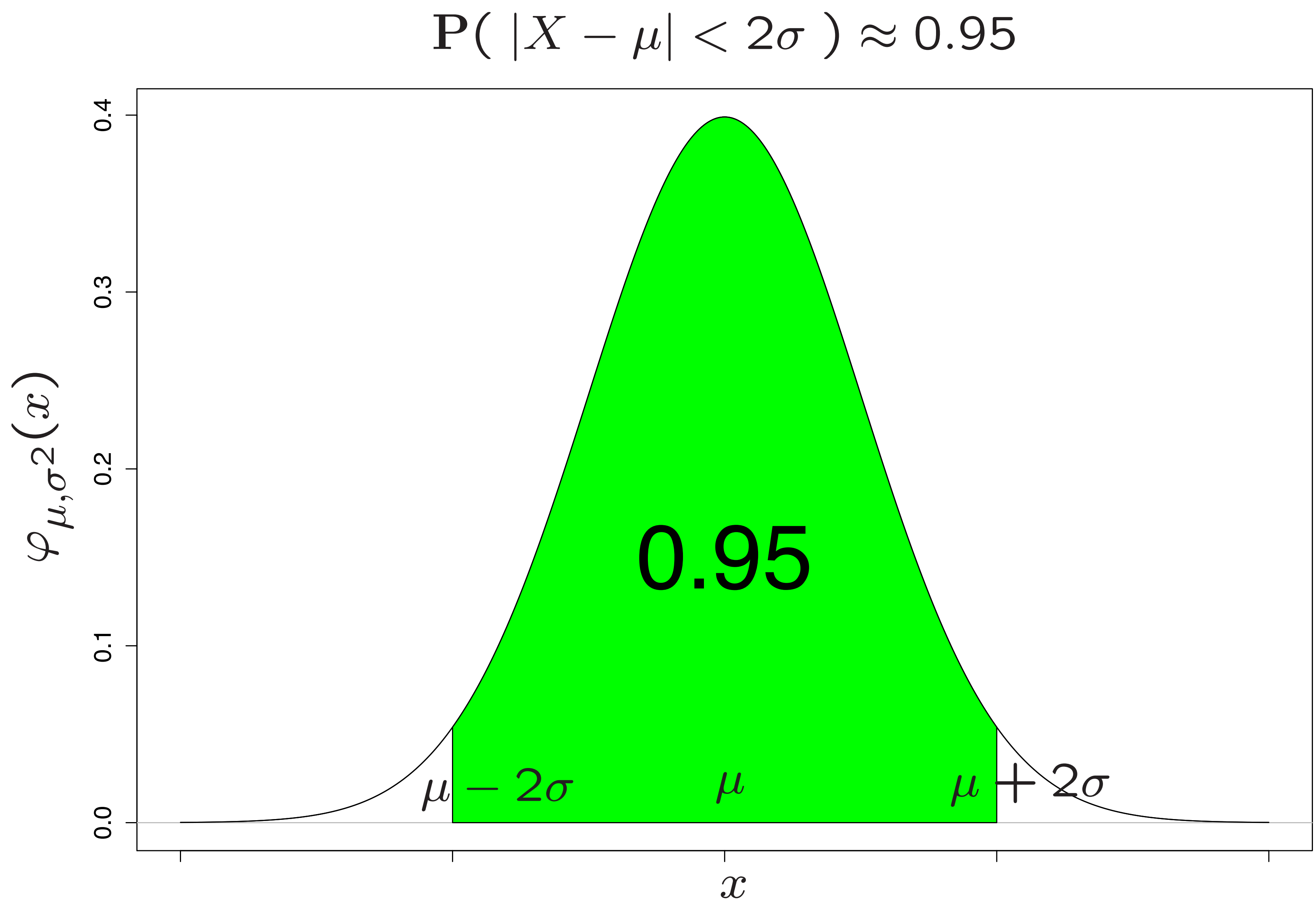



$\mathbf{P}(\ |X-\mu|<\sigma\ ) \approx 0.68$
0.68
$\varphi(z)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4
$z=(x-\mu)/\sigma$


$\mathbf{P}(\ |X-\mu| < 2\sigma\ ) \approx 0.95$
0.95
$\varphi(z)$
$z = (x-\mu)/\sigma$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

$\mathbf{P}(\ |X - \mu| < \sigma\ ) \approx 0.68$




$\mathbf{P}(\ |X-\mu|<2\sigma\ )\approx 0.95$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$
0.95
$\mu-2\sigma$
μ
$\mu+2\sigma$
x

Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe VL 6a):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) \approx \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)da$$

$$\approx \mathbf{P}(k - \tfrac{1}{2} \leq X \leq k + \tfrac{1}{2})$$

für eine N(μ, σ^2)-verteilte ZV'e X.

Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe VL 6a):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) \approx \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)da$$

$$\approx \mathbf{P}(k - \tfrac{1}{2} \le X \le k + \tfrac{1}{2})$$

für eine N(μ, σ^2)-verteilte ZV'e X.

1. Zufällige Paare
und ihre (gemeinsame) Verteilung

Im Diskreten:

Verteilungsgewichte und ihre (iterierten) Summen:

$$\sum_{(a_1,a_2)} \mathbf{1}_A(a_1,a_2)\rho(a_1,a_2) = \sum_{a_1} \left(\sum_{a_2} \mathbf{1}_A(a_1,a_2)\rho(a_1,a_2) \right)$$

$$= \sum_{a_2} \left(\sum_{a_1} \mathbf{1}_A(a_1,a_2)\rho(a_1,a_2) \right)$$

Im Kontinuierlichen:

Dichten und ihre (iterierten) Integrale:

$$\int\limits_{S_1 \times S_2} \mathbf{1}_A(a_1, a_2) f(a_1, a_2)\, d(a_1, a_2)$$

$$= \int\limits_{S_2} \left(\int\limits_{S_1} \mathbf{1}_A(a_1, a_2) f(a_1, a_2) da_1 \right) da_2$$

$$= \int\limits_{S_1} \left(\int\limits_{S_2} \mathbf{1}_A(a_1, a_2) f(a_1, a_2)\, da_2 \right) da_1$$

$$f(a_1, a_2)\, d(a_1, a_2)$$

$$= f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f(a_1, a_2)\, da_2\, da_1$$

2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für diskrete Zufallsvariable
war die Unabhängigkeit von X_1 und X_2
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Gewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\, \rho_2(a_2).$$

Für Zufallsvariable mit Dichten
ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\;\; f_2(a_2)\, da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

3. Die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\, da_1 \;\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\, da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\; da_1\, da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

4. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt (auf $\mathbb{R}^1$).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\,da_1\;\varphi(a_2)\,da_2$$

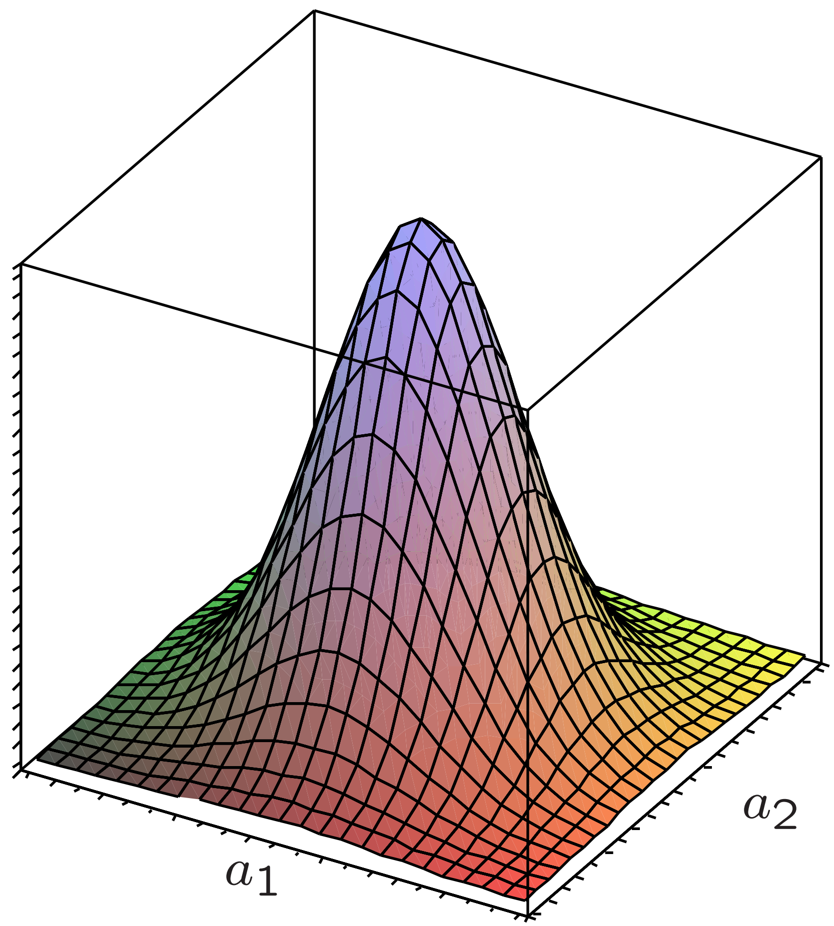
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\,da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf** $\mathbb{R}^2$.

5. Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl Buch S. 71)

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die Koordinaten eines zufälligen Vektors

$$\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2\, \vec{e}_2$$

bzg. der Standardbasis e_1, e_2, dann folgt aus der

Rotationssymmetrie der Verteilung von $\vec{Z}$:

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die $\vec{u}$-Koordinate von $\vec{Z}$

standard-normalverteilt in $\mathbb{R}$.

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$$Y := \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2 \quad \text{ist} \quad \text{N}(0,1)\text{-verteilt.}$$

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \vec{e}_2$

zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}} \quad \text{ist N}(0,1)\text{-verteilt.}$$

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von

unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen

ist wieder normalverteilt.

Denn:

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2),$$

und

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2\right)$$

ist N$(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

Ein Beispiel:

(X, Y) sei standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$,

P sei ein zufälliger Punkt mit den Koordinaten (X, Y).

Wie wahrscheinlich ist es, dass

der Abstand von P zum Koordinatenursprung ≤ 2 ausfällt?

Sei $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

die Kreisfläche um den Ursprung mit Radius 2.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint\limits_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy.$$

Wie rechnet man dieses Integral aus?

Ausgedrückt in Radius-Winkel-Koordinaten (r, θ)

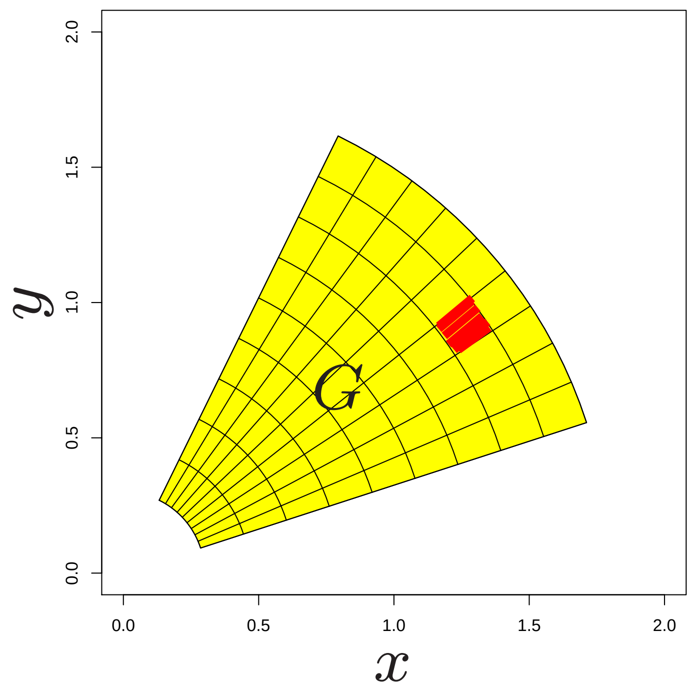
$$x = r\cos\theta,\; y = r\sin\theta$$

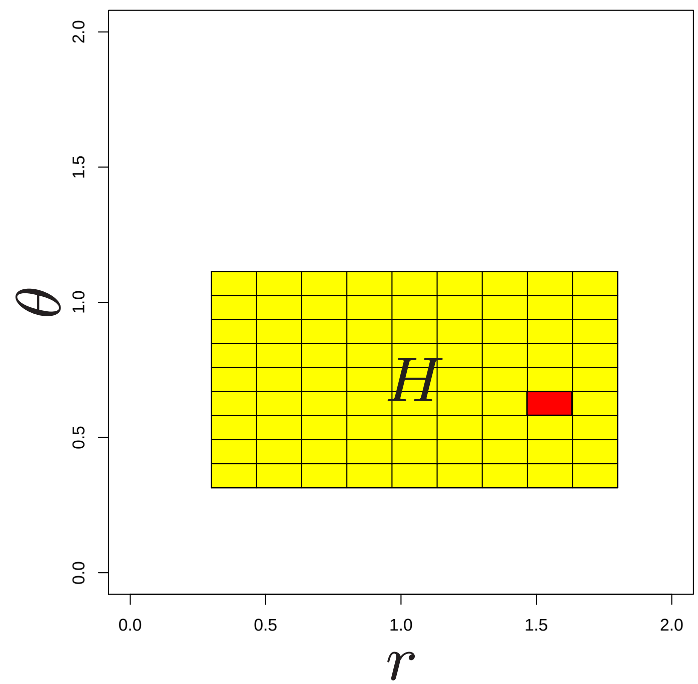
entspricht K dem Rechteck

$$B := \{(r, \theta) : 0 \le r \le 2,\, 0 \le \theta < 2\pi\} = [0, 2] \times [0, 2\pi).$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \iint_H e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$





Speziell mit $G := K$ und $H := B$:

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \quad \int_0^2 e^{-r^2/2}\, r\, dr$$

$$= \left(-e^{-r^2/2}\right)\Big|_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - 0.14 = 0.86$$

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$J := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

$$J^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 1. \quad \square$$

6. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

In Abschnitt 2 der heutigen Vorlesung formulierten wir den

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \dots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \dots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $i = 1, \dots, n$.

(ii) $(X_1, \dots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \dots da_n$$

Dazu passt die folgende Situation:

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Die Dichte der Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^n$ ist rotationssymmetrisch. Analog zum Fall $n = 2$ gilt deshalb:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$ und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$, dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$ zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0,1)\text{-verteilt.}$$

Folgerung:

Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist die *standardisierte Summe*

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

N$(0, 1)$-verteilt.