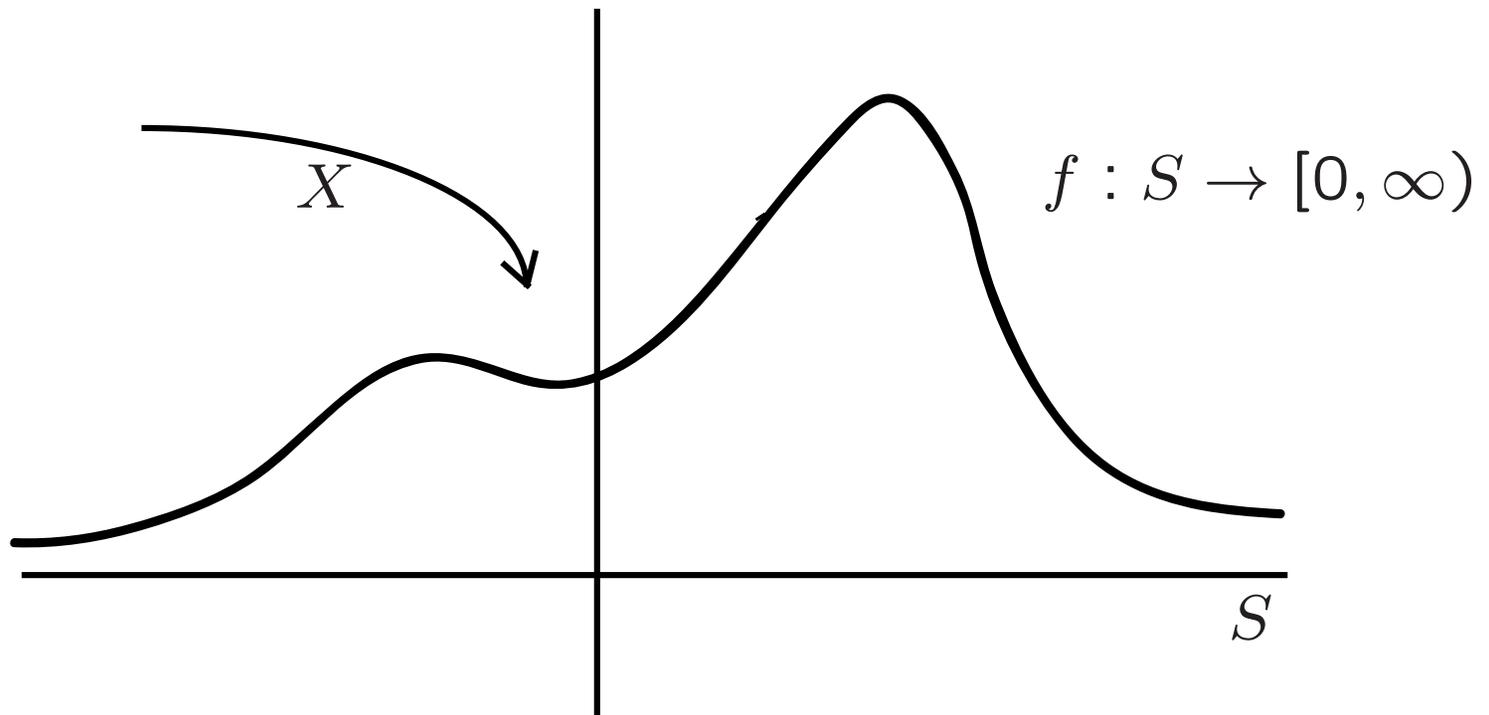


Vorlesung 6a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2: Exponentialverteilung, Normalverteilung

0. Wiederholung der Grundbegriffe



$S(\subset \mathbb{R})$ Intervall mit Endpunkten l, r
(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

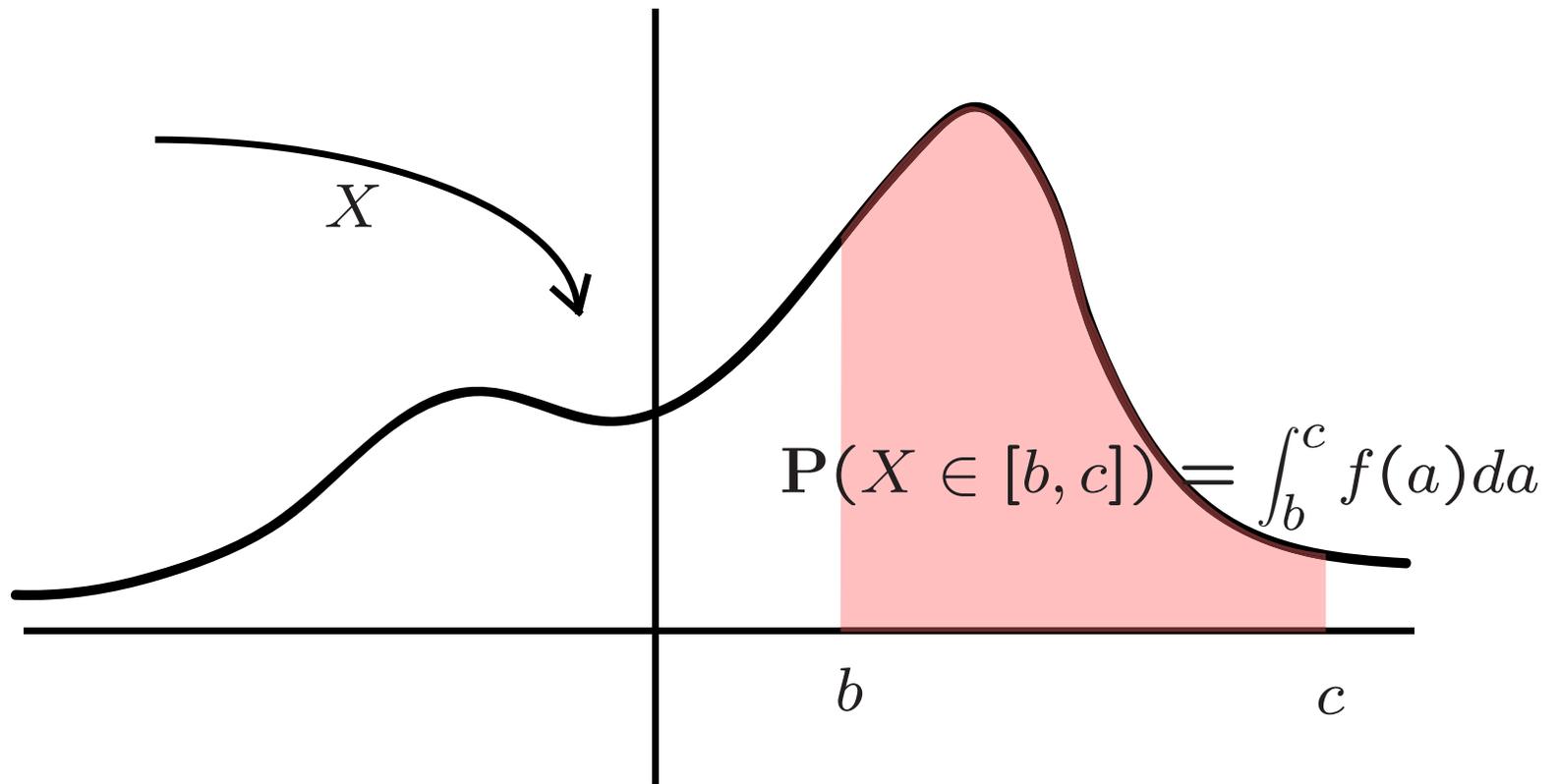
$$\int_l^r f(a) da = 1$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S .
Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}(X \in [b, c]) = \int_b^c f(a) da ,$$

so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt.



Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S .
Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}(X \in [b, c]) = \int_b^c f(a) da ,$$

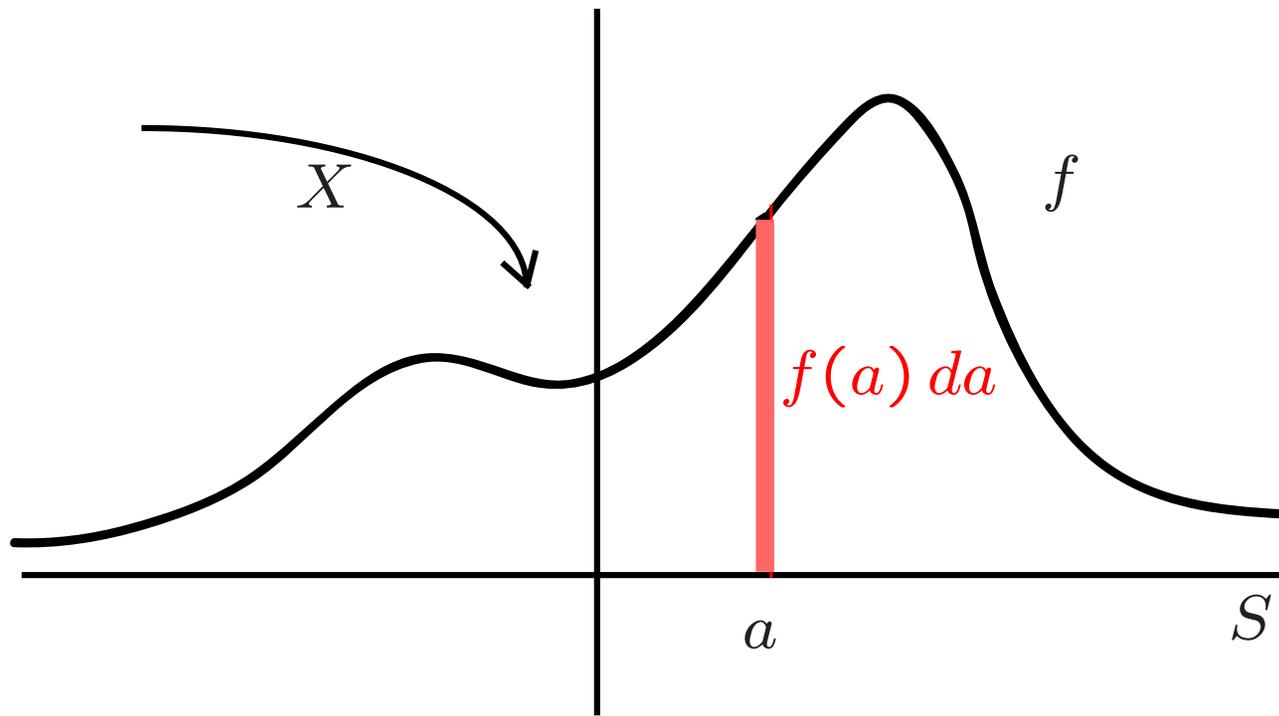
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da , \quad a \in S ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X .



Definition.

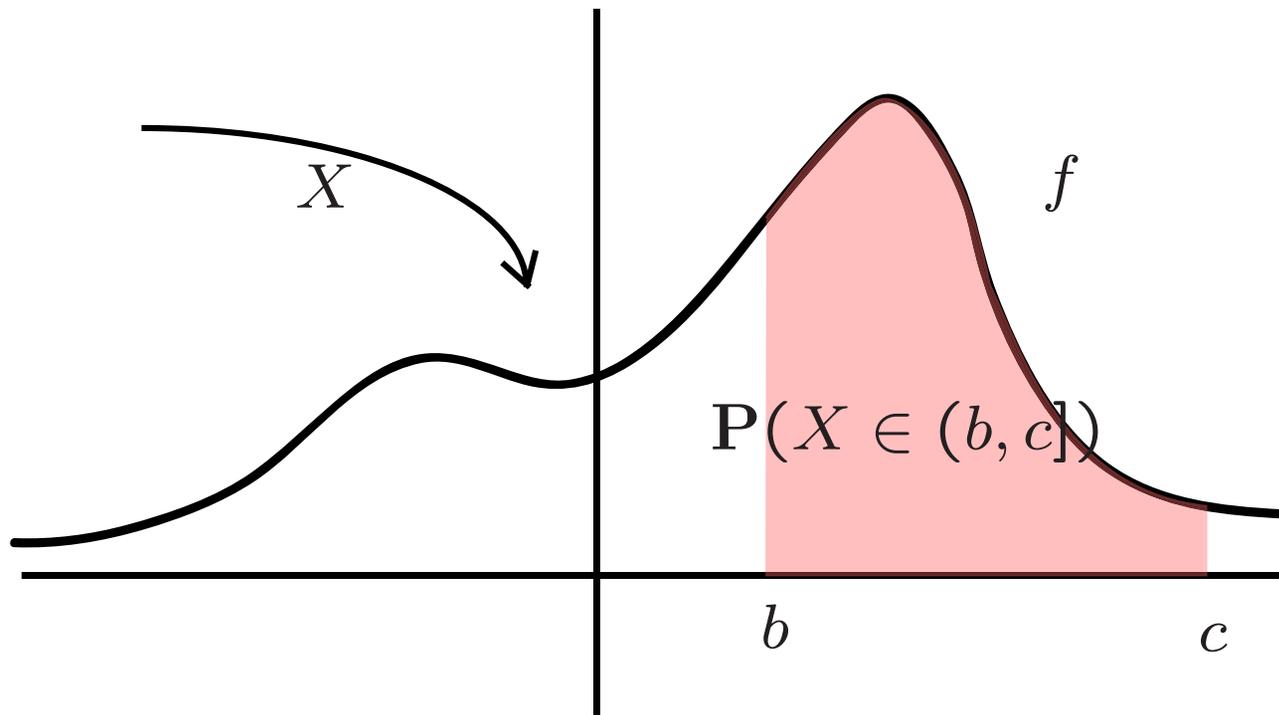
Die Funktion

$$F(b) := \mathbf{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(a) da, \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X .

Ist f stetig in b , dann ist $f(b) = F'(b)$.



$$\mathbf{P}(X \leq c) - \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(b < X \leq c)$$

$$F(c) - F(b) = \int_b^c f(a) da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

Beispiele

A. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2} da, 0 \leq a \leq 2.$

B. Eine auf einem endlichen* Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{r - l} da$, $a \in S$.

*genauer: endlich langen

C. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Verteilungsfunktion und der Dichte von $X := U^2$.

Für $0 \leq b \leq 1$ ist

$$F(b) := \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) = \sqrt{b}.$$

F ist stetig differenzierbar auf $(0, 1)$, mit $F'(b) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Also:

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 < b \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

D. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

Für $0 \leq b \leq 4$ ist

$$\begin{aligned} F(b) &:= \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{b}. \end{aligned}$$

F ist stetig differenzierbar auf $(0, 4)$, mit $F'(b) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Also:

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \leq b \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

E. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Verteilungsfunktion von $X := -\ln U$.

Für $b \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leq b) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq b) = \mathbf{P}(\ln U \geq -b) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-b}) = 1 - e^{-b}.\end{aligned}$$

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt **standard-exponentialverteilt**, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a} da$, $a \geq 0$.

1. Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen mit Dichten

Im Diskreten hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a) da$.

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a f(a) da$$

Im Diskreten hatten wir für $h : S \rightarrow \mathbb{R}$

die Transformationsformel

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a) da$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(a) da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a f(a) da$$

(wobei wir wieder den Fall $\infty - \infty$ ausschließen)

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a - \mu)^2 f(a) da.$$

2. Exponentialverteilte Zufallsvariable

Definition:

Y heißt **exponentialverteilt** mit Parameter λ ,
kurz $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt, falls

$$\mathbf{P}(Y > b) = e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Für $\lambda = 1$: **Standard-Exponentialverteilung.**

Es ergibt sich sofort:

Ist X standard-exponentialverteilt, dann ist $\frac{X}{\lambda}$ Exp(λ)-verteilt.

Denn:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X}{\lambda} > b\right) = \mathbf{P}(X > \lambda b) = e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Analog:

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Die Verteilungsfunktion einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten ZV'en Y ist

$$F(b) = 1 - \mathbf{P}(Y > b) = 1 - e^{-\lambda b}, \quad b \geq 0.$$

Die Dichte einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten ZV'en Y ist

$$f(b) db = \lambda e^{-\lambda b} db, \quad b \geq 0.$$

**Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :**

Mit partieller Integration

$$\int u v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} a e^{-a} da = -ae^{-a} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-a} da = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} a^2 e^{-a} da = -a^2 e^{-a} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2a \cdot e^{-a} da = 2$$

Also: $\boxed{\mathbf{E}[X] = 1, \text{Var}[X] = 1.}$

**Erwartungswert und Varianz einer
Exp(λ)-verteilten Zufallsvariablen Y :**

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Also ist

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E} \left[\frac{1}{\lambda} \lambda Y \right] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbf{Var} \left[\frac{1}{\lambda} \lambda Y \right] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Die Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:
(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt
mit $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X > t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

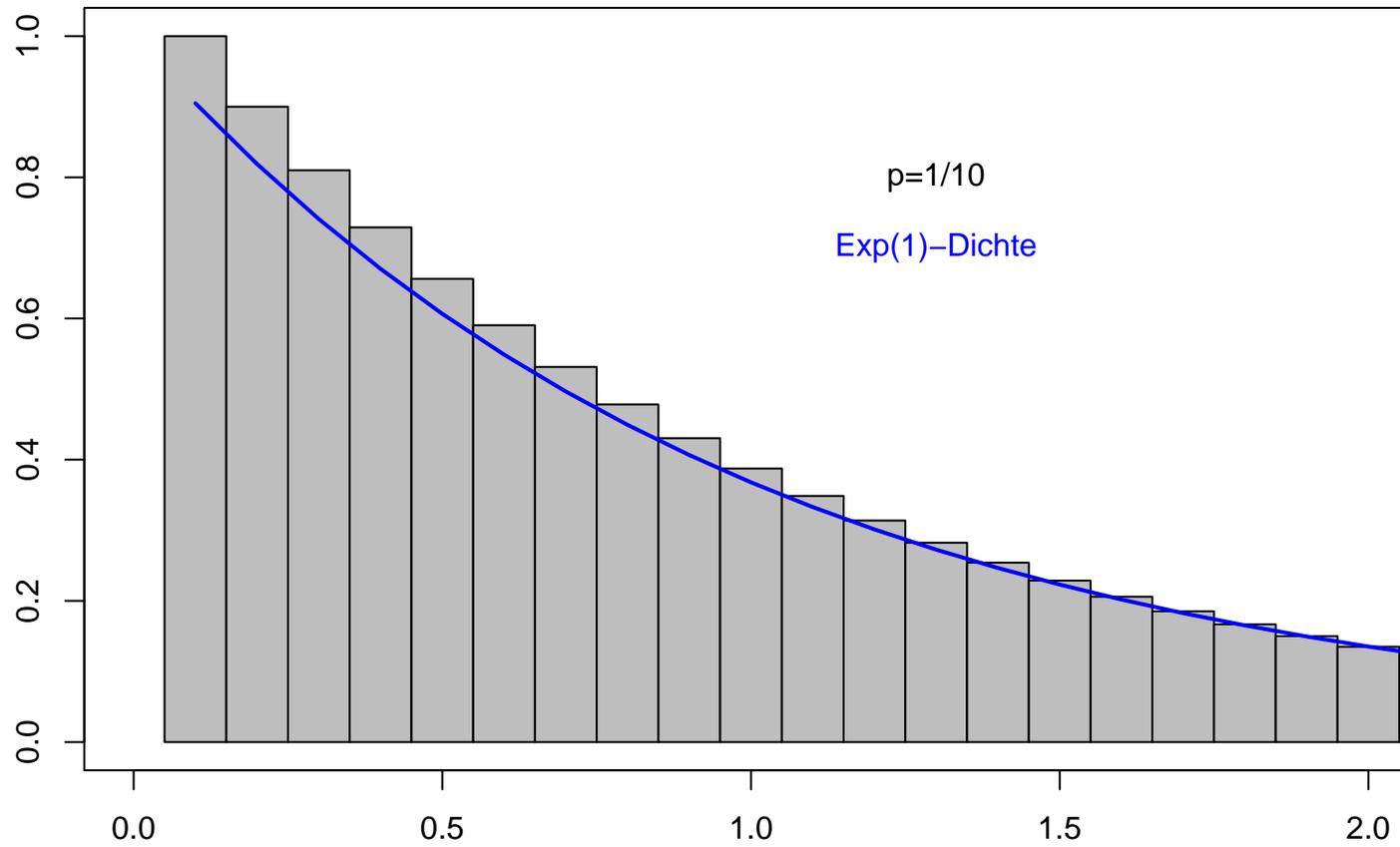
konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X .

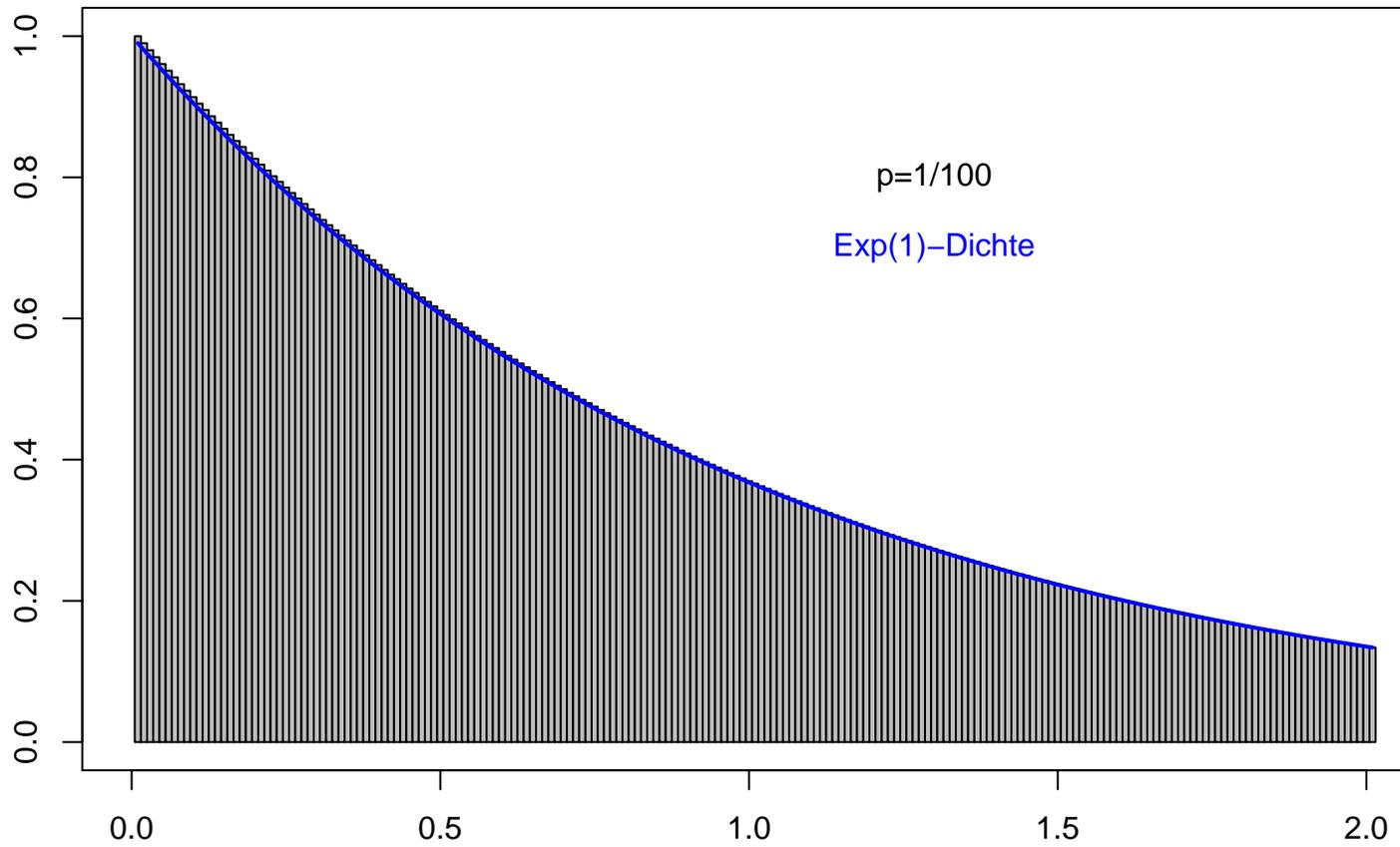
Salopp gesprochen:

Man holt für kleines p
eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y zurück ins Bild,
indem man pY betrachtet.

Gewichte des p -fachen einer $\text{Geom}(p)$ -verteilten ZV



Gewichte des p -fachen einer $\text{Geom}(p)$ -verteilten ZV



4. Dichten von $X + d$ und von cX

Lemma (Dichte von $X + d$):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(a) da$.

Für $d \in \mathbb{R}$ hat dann $Y := X + d$ die Dichte $f(b - d) db$.

Beweis:

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(X \leq b - d) = F_X(b - d),$$

also

$$F'_Y(b) = F'_X(b - d). \quad \square$$

Lemma (Dichte von cX):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(a) da$.

Für $c > 0$ hat dann $Y := cX$ die Dichte $f(\frac{b}{c}) \frac{1}{c} db$.

Beweis:

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(X \leq \frac{b}{c}) = F_X(\frac{b}{c}),$$

also

$$F'_Y(b) = \frac{1}{c} F'_X(\frac{b}{c}). \quad \square$$

Lemma (Dichte von cX):

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(a) da$.

Für $c > 0$ hat dann $Y := cX$ die Dichte $f\left(\frac{b}{c}\right) \frac{1}{c} db$.

Zum Merken:

Die Dichte von cX bei b

ist die Dichte von X im Urbild b/c ,
geteilt durch den Streckungsfaktor c

Beispiel:

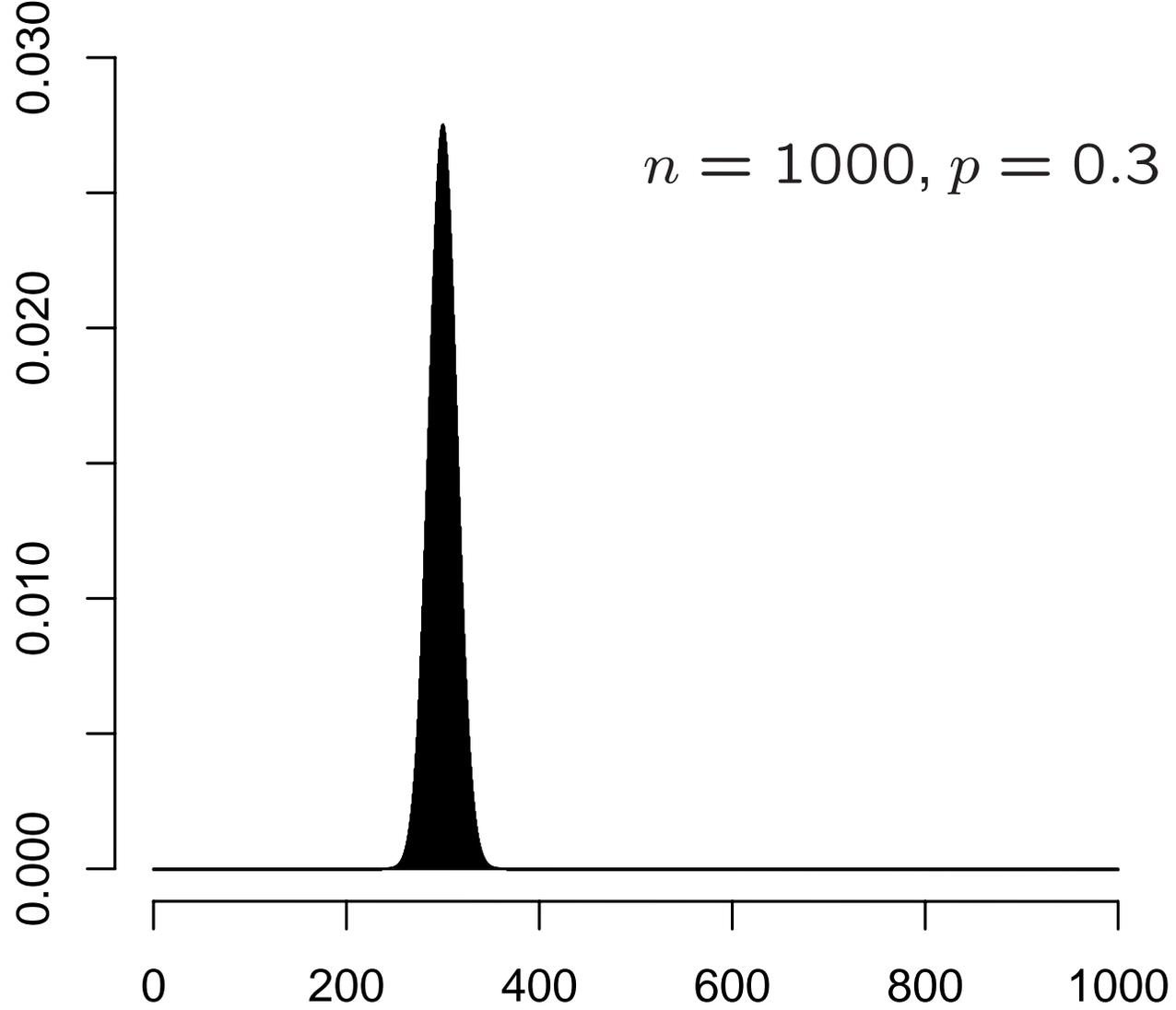
Ist X standard-exponentialverteilt,
dann hat $\frac{X}{\lambda}$ die Dichte

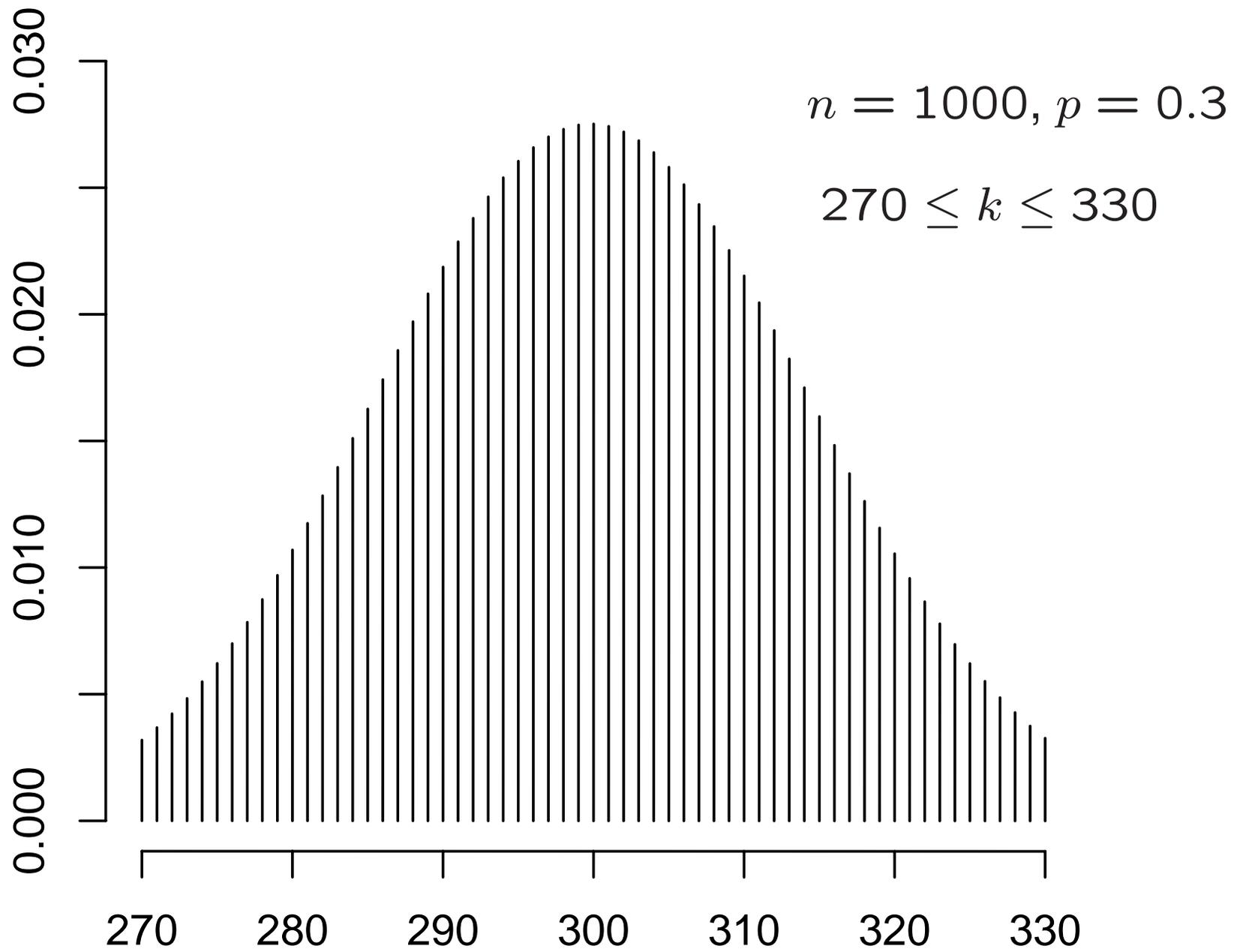
$$\lambda e^{-\lambda b} db, \quad b \geq 0.$$

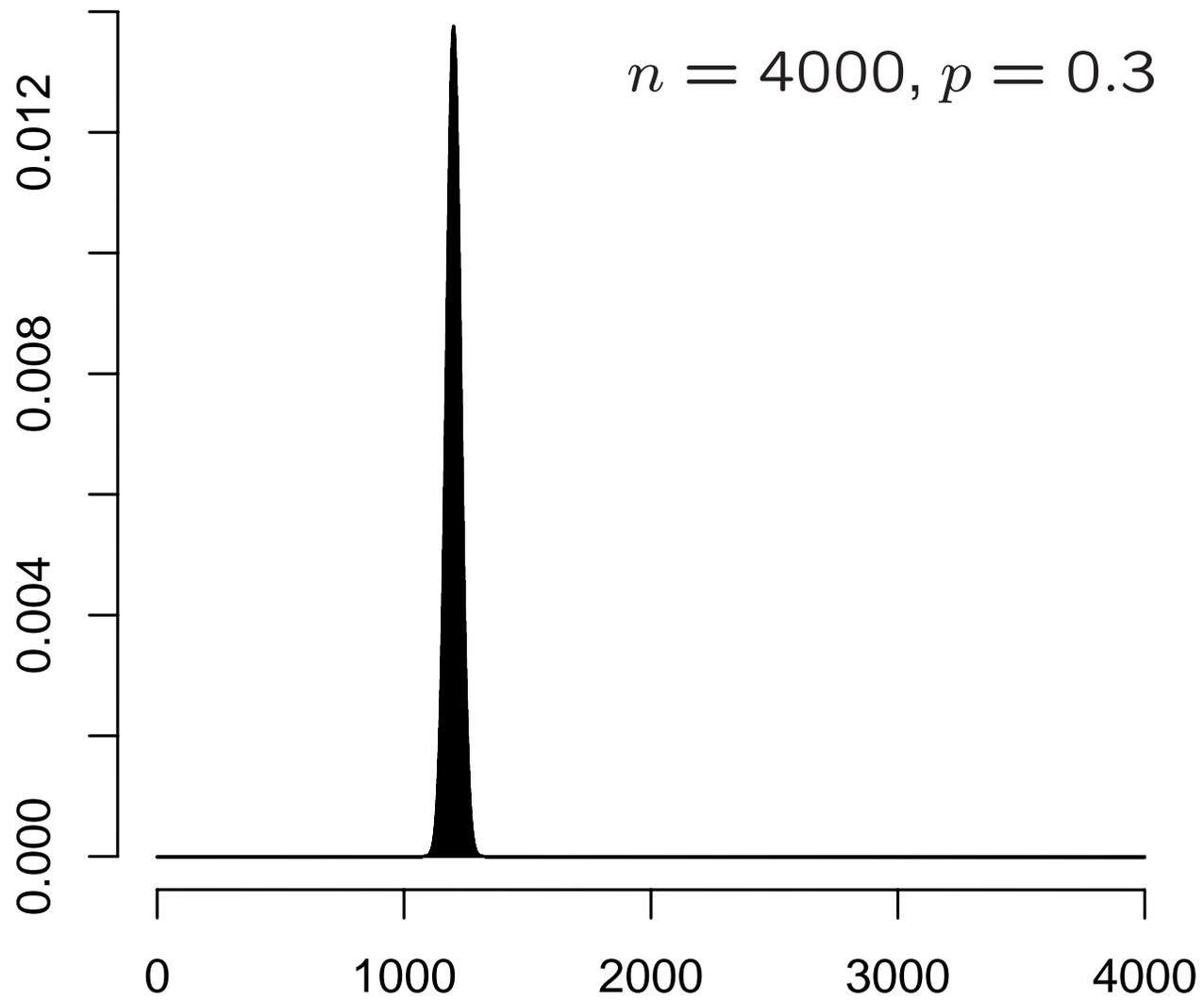
5. Binomialverteilungen

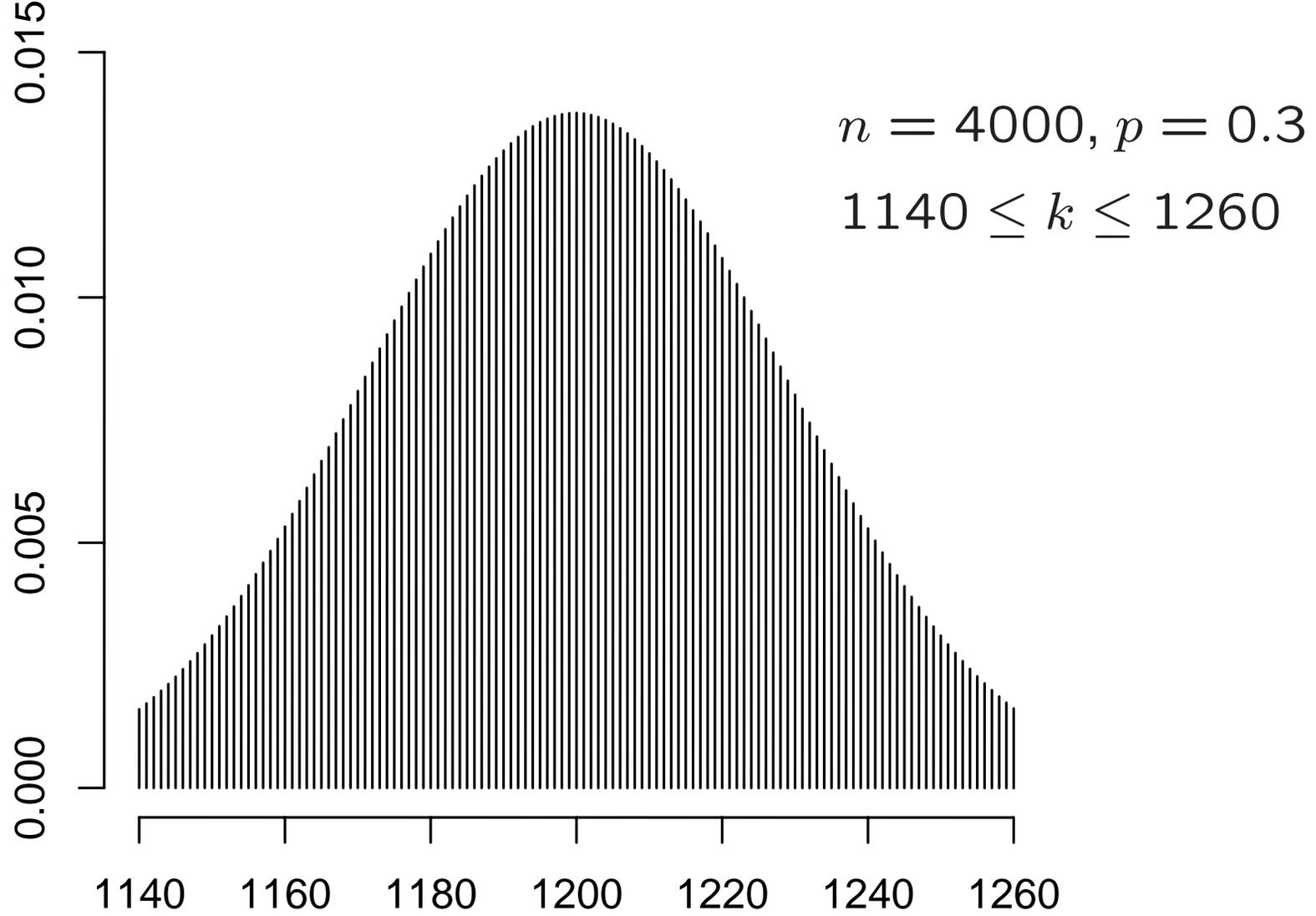
mit großem Erwartungswert und großer Varianz

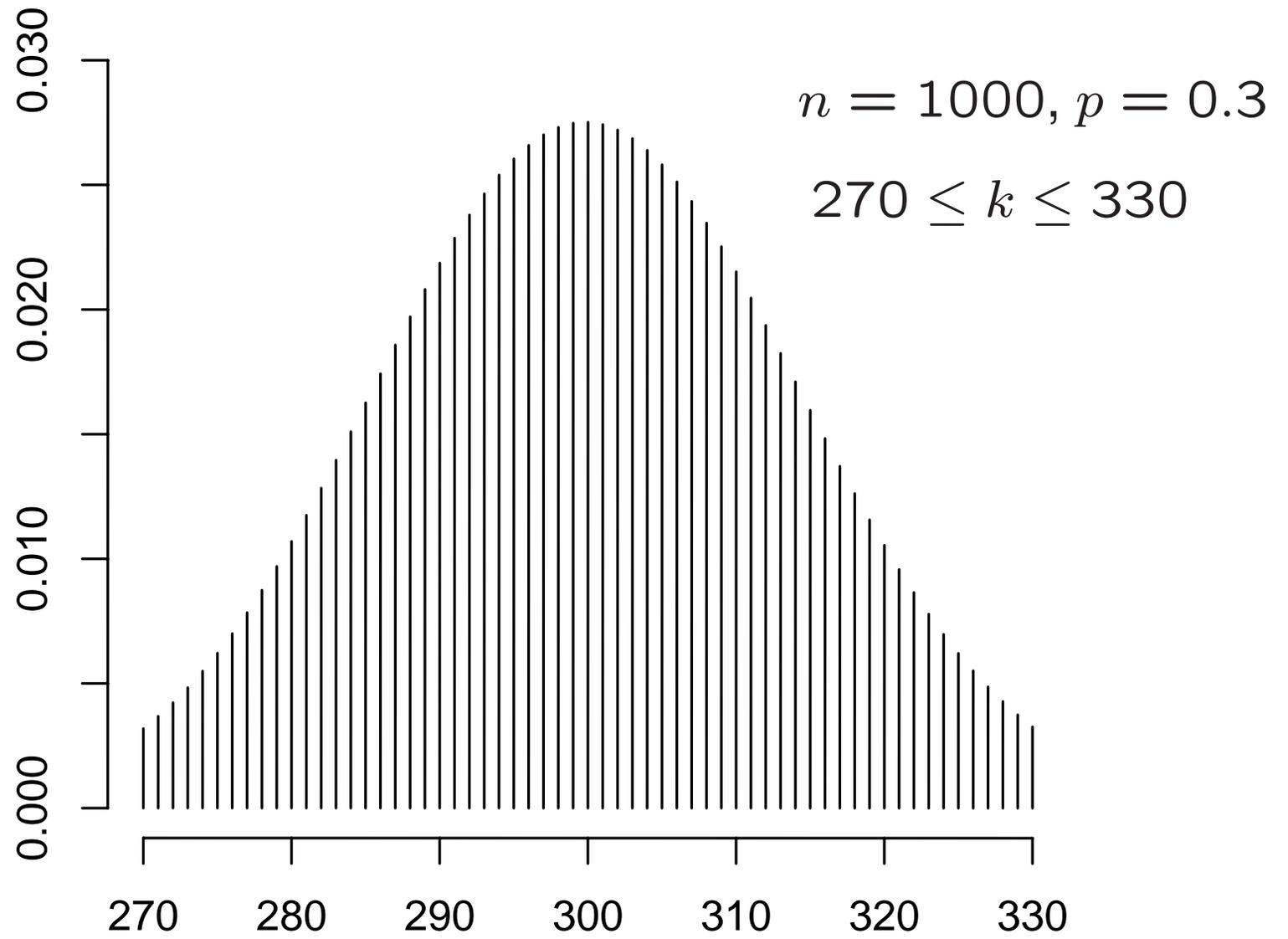
Wie sieht die $\text{Bin}(n, 1/2)$ -Verteilung
für großes n aus,
oder allgemeiner
die $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung
mit großem n und großem npq ?











Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq
sehen “glockenförmig” aus,
wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right).$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$
$$= \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

6. Die Standard-Normalverteilung

Die nächste Definition beinhaltet
die wichtigste Verteilung der Stochastik:

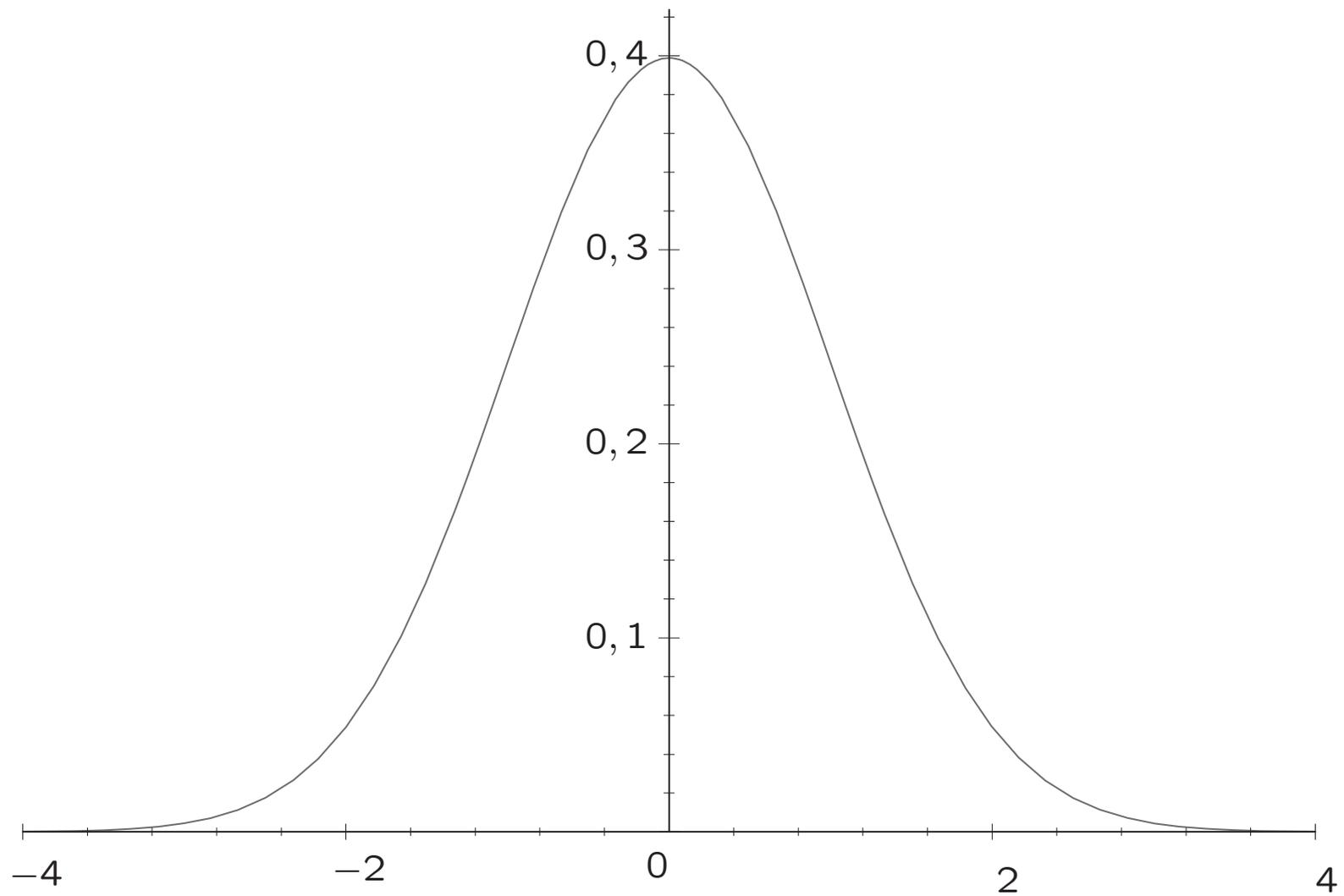
Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.

Tatsächlich lässt sich zeigen: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2/2} da = \sqrt{2\pi}$, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) da = 1.$$



Für ein standard-normalverteiltes Z ist

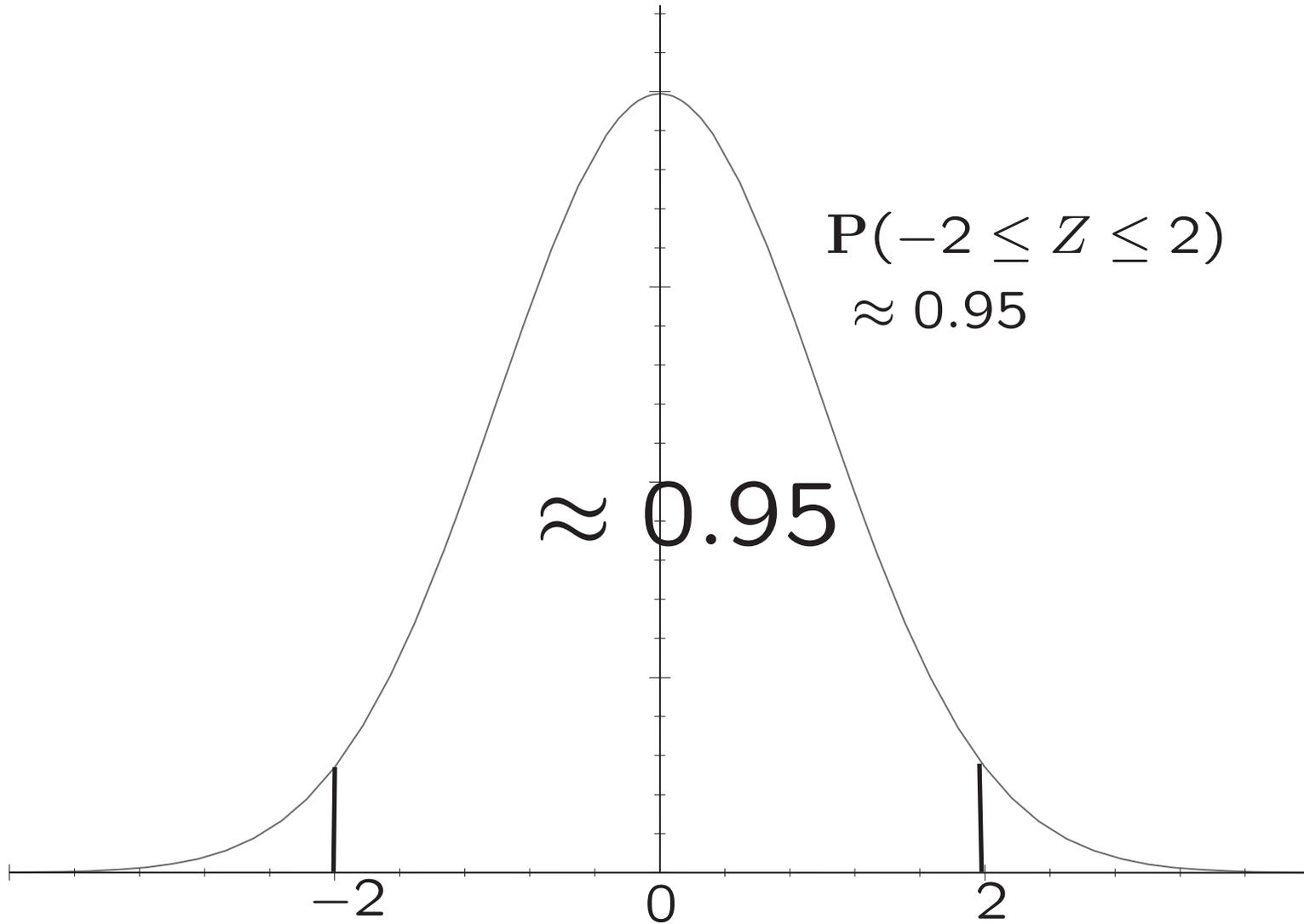
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}[Z] = 1.$$

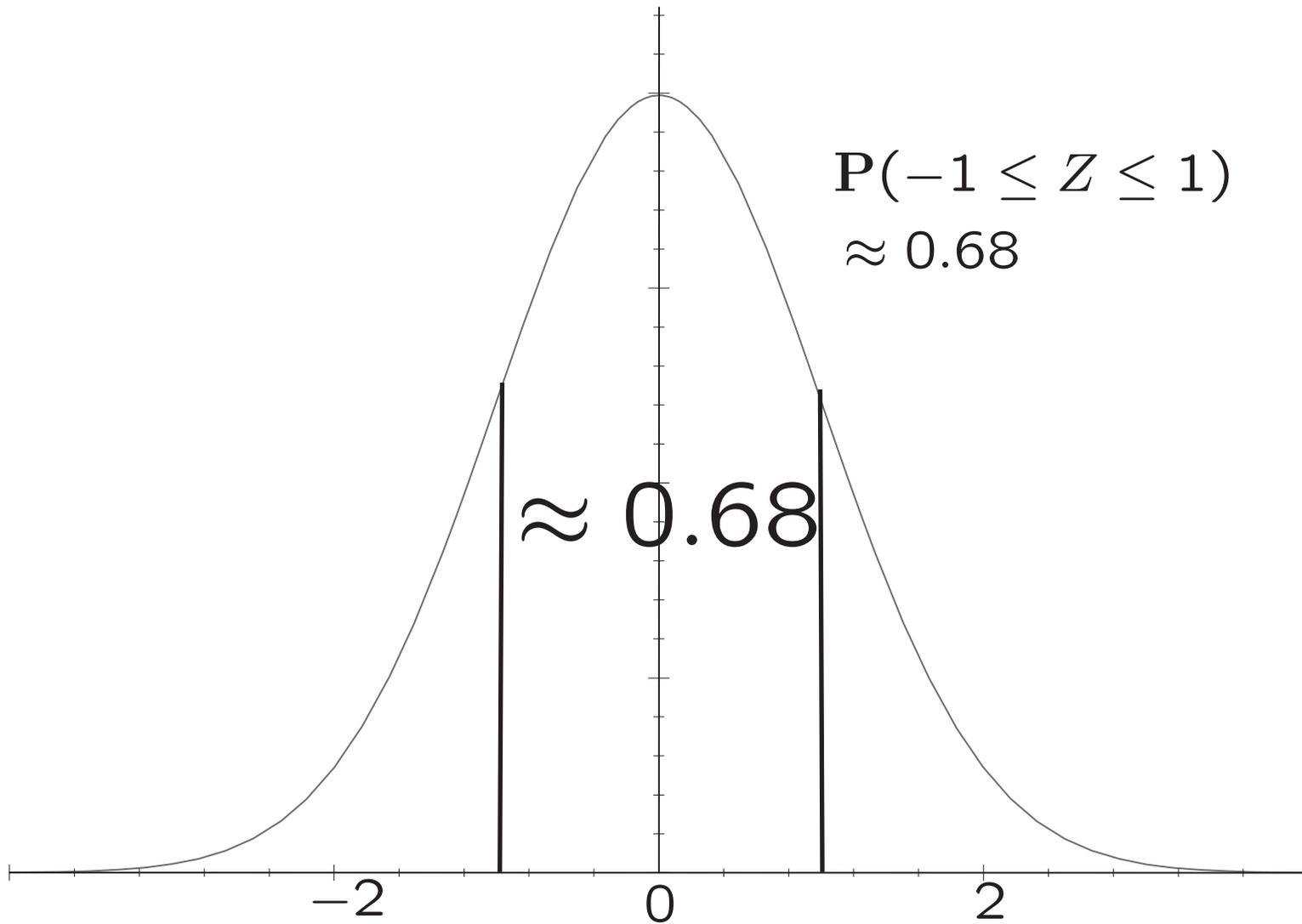
Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-a^2/2} da = 0$,

und mit partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-a^2/2} da &= \int_{-\infty}^{\infty} a a e^{-a^2/2} da \\ &= -a e^{-a^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2} da = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:





7. Die $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$ mit

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$
heißt **normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2** , kurz
 $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Ist Y $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt,

dann ist $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)