

Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1 Begriffsbildung, Uniforme Verteilung & Co.

0. Kontinuierlich anstelle von diskret

Bisher in der Vorlesung:

Diskrete Zufallsvariable.

Sie fallen mit W'keit 1 in eine diskrete
(d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S .

Jetzt betrachten wir Zufallsvariable,

die **kontinuierlich verteilt** sind

auf einer *überabzählbaren Menge S* .

Prominentestes Beispiel:

Rein zufällige Wahl eines Punktes aus dem Intervall $[0, 1]$.

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S = [0, 1]$ heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $V(A)$

gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = V(A).$$

Beispiel 1:

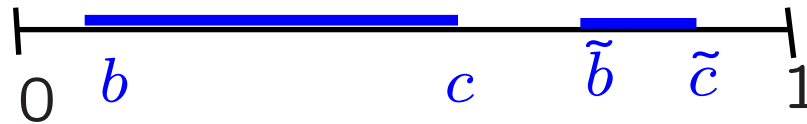
$$A := [b, c] \quad \text{mit } 0 \leq b \leq c \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = c - b.$$

Beispiel 2:

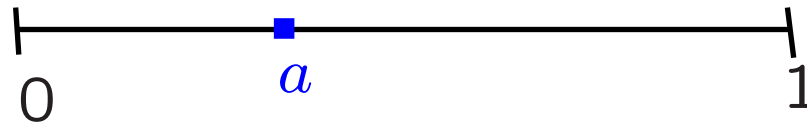
$$A := [b, c] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}] \quad \text{mit } 0 \leq b \leq c < \tilde{b} \leq \tilde{c} \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = (c - b) + (\tilde{c} - \tilde{b}).$$

Beispiel 3:

$$A := \{a\} \quad \text{mit } 0 \leq a \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X = a) = a - a = 0.$$

2. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in \mathbb{R}^2

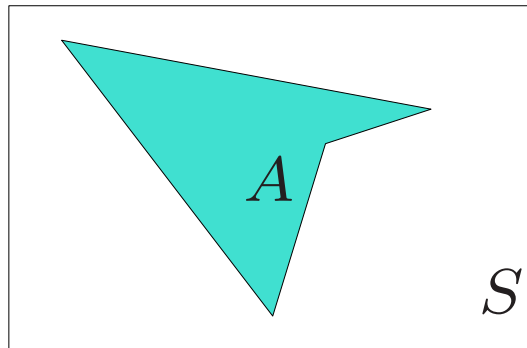
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf S* , wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



3. Uniforme Verteilung auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^m

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des \mathbb{R}^m mit endlichem Inhalt $V(S) > 0$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

Man beachte die Analogie zu
“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”:

Der zahlenmäßige Anteil von A
an einem endlichen Wertebereich S

wird jetzt ersetzt durch den volumsmäßigen Anteil von A
am (überabzählbar) unendlichen Wertebereich S .

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\int_A \mathbf{P}(X \in da) := \mathbf{P}(X \in A)$$

$$\int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{1}{V(S)} \int_A 1 \cdot da = \frac{1}{V(S)} V(A)$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}$$

4. Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur mit *rein* zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a) da$,

wobei $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

$$\int_S f(a) da = 1.$$

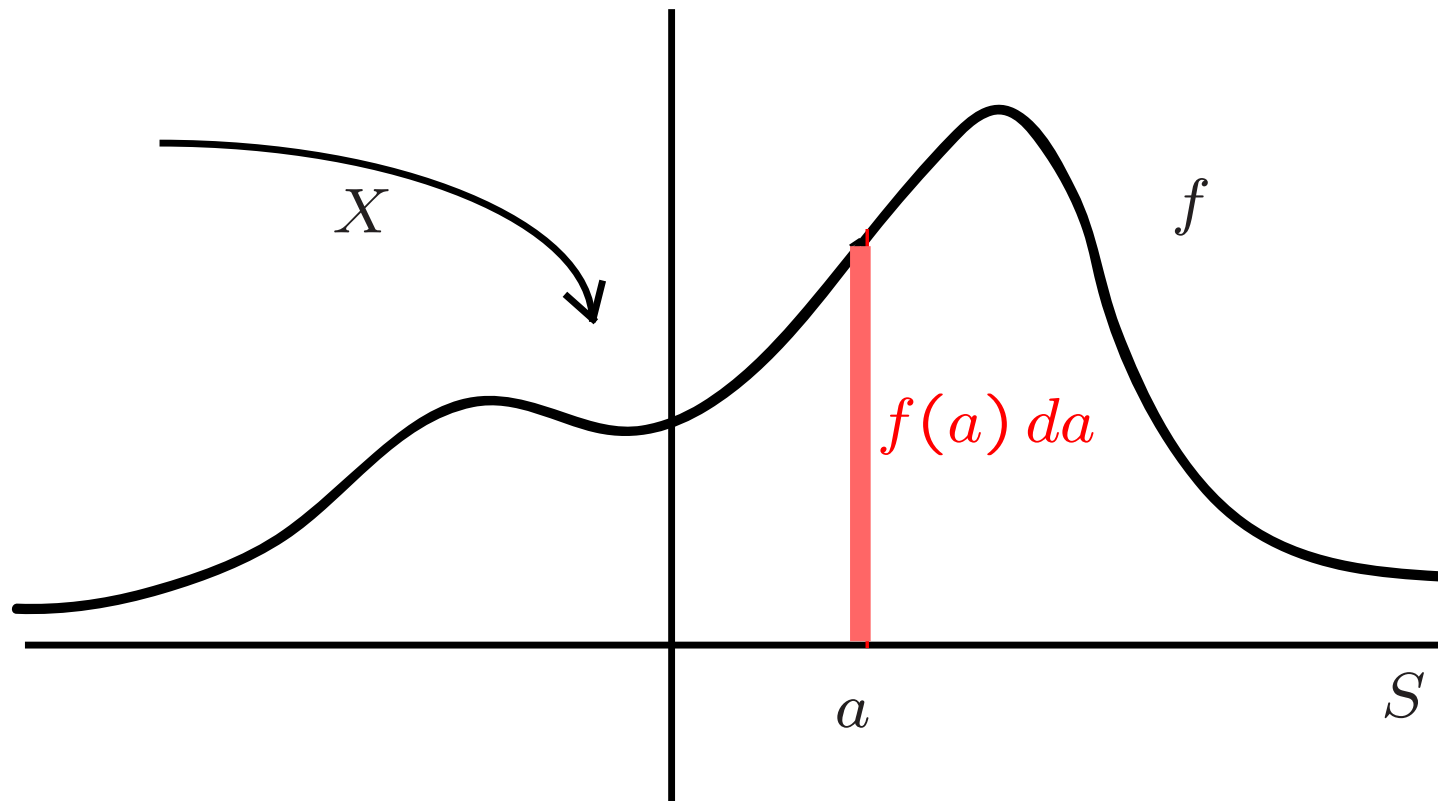
Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten l, r

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a) da = 1 .$$



Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S .
Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}(X \in [b, c]) = \int_b^c f(a) da ,$$

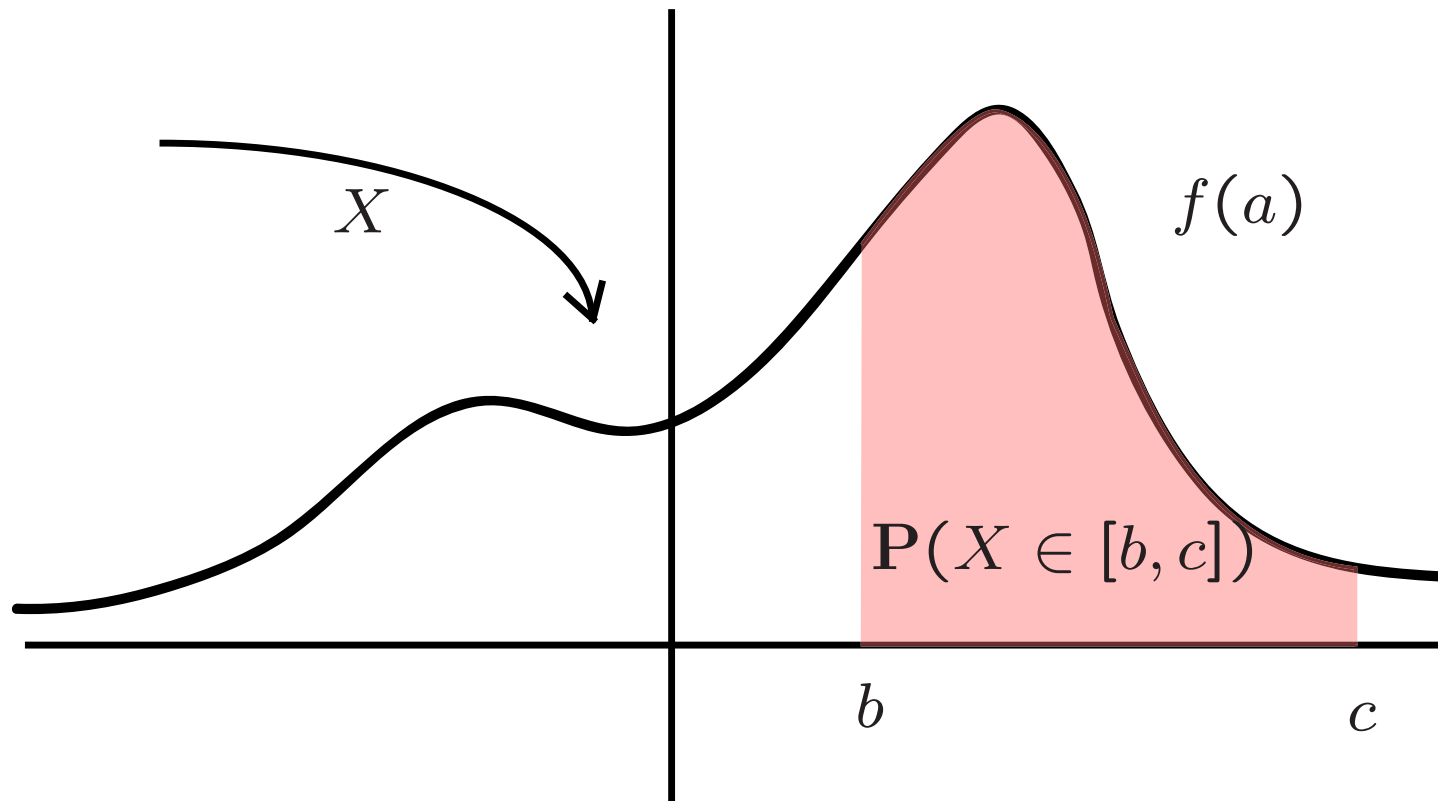
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da , \quad a \in S ,$$

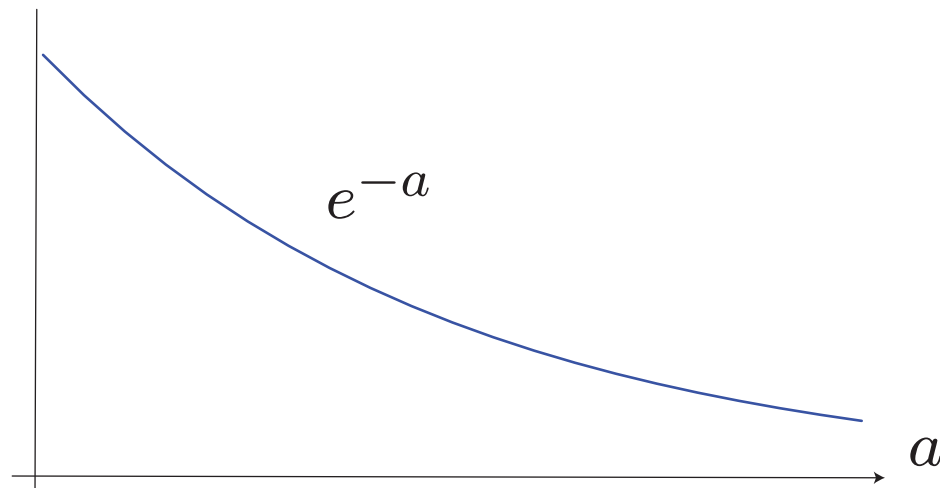
und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X .



Die Bedingung $\int_S f(a) da = 1$ kann auch erfüllt sein,
wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \quad f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$



Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a) da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a) da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $b \leq c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(b,c]} f(a) da = \int_{[b,c]} f(a) da = \int_b^c f(a) da.$$

Tatsächlich hat man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int_A f(a) da$ nicht nur für Intervalle A , sondern für eine viel größere Klasse von “messbaren Mengen” zur Verfügung.

Außerdem gilt für derartige paarweise disjunkte Mengen A_1, A_2, \dots die “abzählbare Additivität” des Integrals:

$$\int_{\bigcup A_i} f(a) da = \sum_i \int_{A_i} f(a) da.$$

Das Stichwort ist das *Lebesgue-Integral*.

Es verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff, sodass Sie “für die Praxis” nicht umdenken müssen.

5. Verteilungsfunktionen

Wieder sei X eine S -wertige ZV'e mit S Intervall in \mathbb{R} .

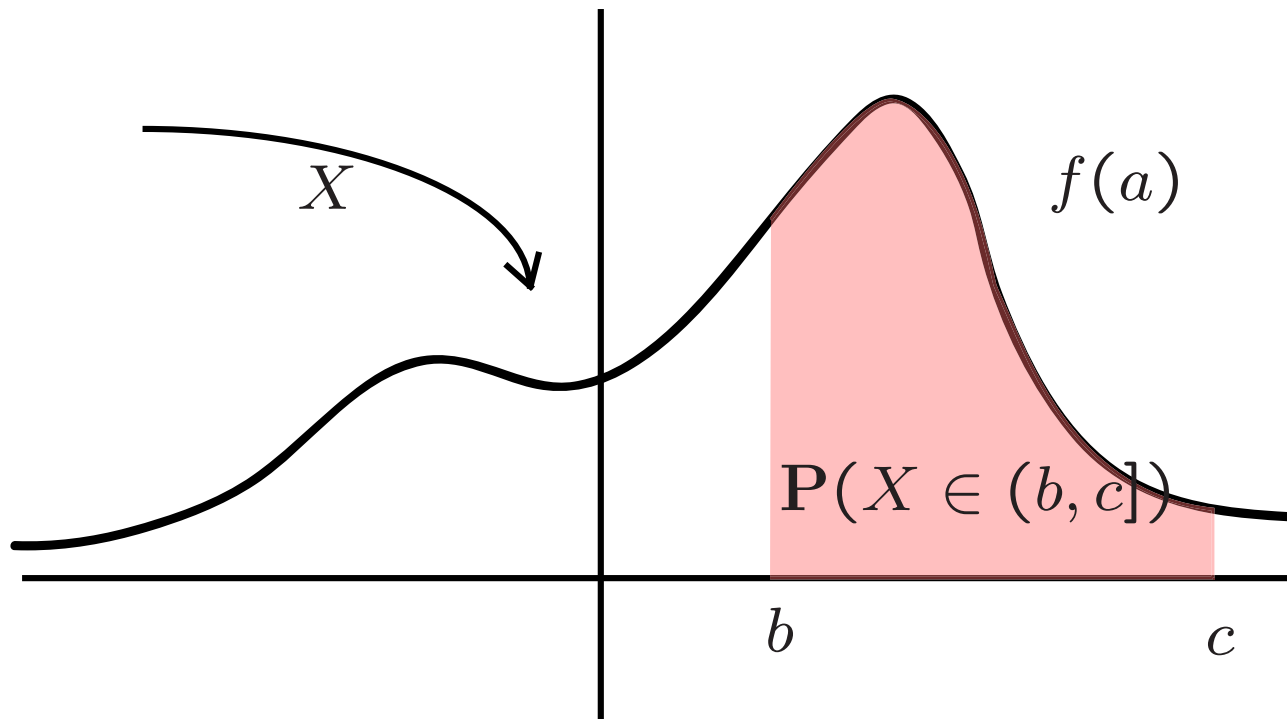
Die Funktion

$$F(b) := \mathbf{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(a) da, \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X .

Ist f stetig in a , dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$\mathbf{P}(X \leq c) - \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(b < X \leq c)$$

$$F(c) - F(b) = \int_b^c f(a) da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

6. Beispiele

A. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2} da, 0 \leq a \leq 2.$

B. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{r - l} da$, $a \in S$.

C. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b})$$

$$= \sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & 0 < b \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

D. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \leq b \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

E. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq b) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq b) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-b}) = 1 - e^{-b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad b \geq 0. \end{aligned}$$

$$f(b) = \begin{cases} e^{-b}, & b \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$