

# Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Die Welt des  $p$ -Münzwurfs -

von Bernoulli zu Poisson

0. Zur Erinnerung:  
Der  $n$ -fache  $p$ -Münzwurf ...

... ist eine  $\{0, 1\}^n$ -wertige ZV'e  $(Z_1, \dots, Z_n)$

mit

$$(*) \quad \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

falls  $a_1 + \dots + a_n = k$ .

Ereignisse kann man oft auf verschiedene Weise darstellen.

Für einen  $(n + 1)$ -fachen  $p$ -Münzwurf gilt z.B.

$$\begin{aligned} & \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n\} \\ &= \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, X_{n+1} = 1\} \\ & \quad \cup \{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n, X_{n+1} = 0\} \end{aligned}$$

Die Definition (\*) auf der vorigen Folie ist damit konsistent:

$$\begin{aligned} & p^k(1 - p)^{n-k} \\ &= p^{k+1}(1 - p)^{n-k} \\ & \quad + p^k(1 - p)^{n-k+1} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch die folgende Definition konsistent über  $n$  ist.

# 1. Fortgesetzter $p$ -Münzwurf

Definition: Sei  $p \in (0, 1)$ ,  $q := 1 - p$ .

Eine *Bernoulli-Folge zum Parameter  $p$*

(man sagt manchmal auch: ein *fortgesetzter  $p$ -Münzwurf*)

ist eine zufällige 01-Folge  $(Z_1, Z_2, \dots)$ , deren Verteilung die folgende Eigenschaft hat:

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jede endliche 01-Folge  $(a_1, \dots, a_n)$   
mit  $k$  Einsen und  $n - k$  Nullen ist

$$\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) = p^k q^{n-k}.$$

(d.h. für jedes  $n$  ist  $(Z_1, \dots, Z_n)$  ein  $n$ -facher  $p$ -Münzwurf)

Zur Erinnerung:

Für jedes  $n$  ist dann

die Anzahl der Einsen in  $(Z_1, \dots, Z_n)$

(die “Anzahl der Erfolge in  $n$  Versuchen”)

binomial( $n, p$ )-verteilt:

$$\mathbf{P}(Z_1 + \dots + Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

## 2. Der Zeitpunkt des ersten Erfolgs und die geometrische Verteilung



$$T := \min\{i : i \in \mathbb{N}, Z_i = 1\}$$

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges.

Wie sieht die Verteilung von  $T$  aus?

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1} p.$$

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1} p.$$

Alternativ:

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0\}$$

Also

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n.$$

$$\mathbf{P}(T = n) = q^{n-1} p$$

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n$$

Das passt auch zusammen.

Denn das Ereignis  $\{T > n - 1\}$  ist die disjunkte Vereinigung der beiden Ereignisse  $\{T = n\}$  und  $\{T > n\}$ .

Dementsprechend:

$$q^{n-1} = q^{n-1} p + q^n.$$

## Definition

Sei  $p \in (0, 1)$ . Eine Zufallsvariable  $T$  mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  heißt

*geometrisch verteilt* mit Parameter  $p$ ,

kurz **Geom( $p$ )-verteilt**,

wenn

$$\mathbf{P}(T > a) = q^a, \quad a = 0, 1, 2, \dots,$$

mit  $q := 1 - p$ .

$$\mathbf{E}[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel  
jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$   
kommt im Mittel jedes  $(1/p)$ -te Mal ein Erfolg.

Also wird gelten:

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}.$$

Das beweist man auch schnell  
mit dem folgenden

### **Lemma**

(Buch S. 34)

Ist  $X$  eine Zufallsvariable mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$ , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$



Folgerung aus dem Lemma:

Für eine  $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable  $T$  ist

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(T > i) = \sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{p}.$$

$$\boxed{\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}}$$

## Lemma

(Buch S. 34)

Ist  $X$  eine Zufallsvariable mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$ , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden **rechten Seiten** gleich?

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

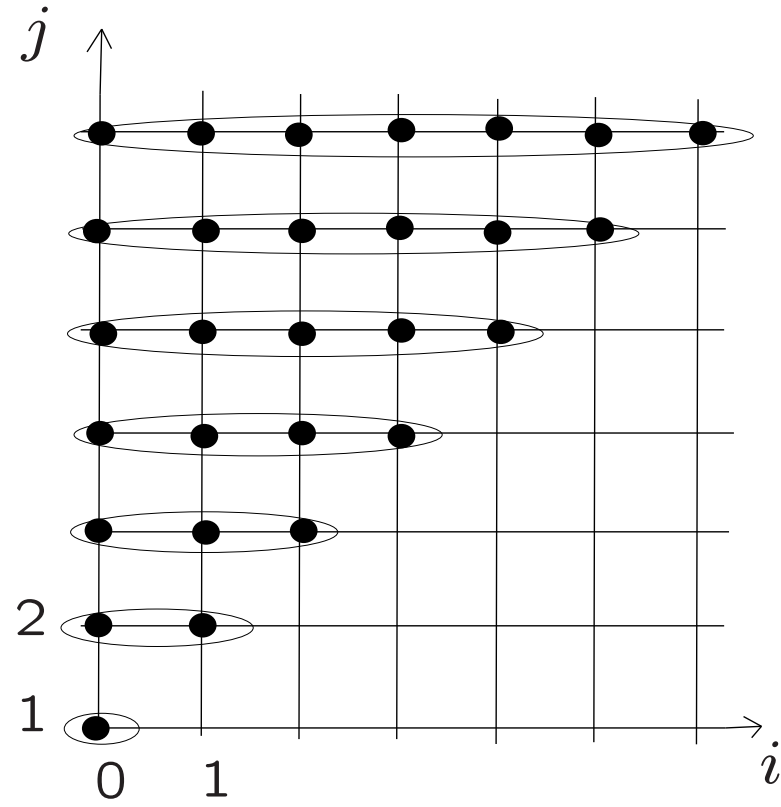
$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

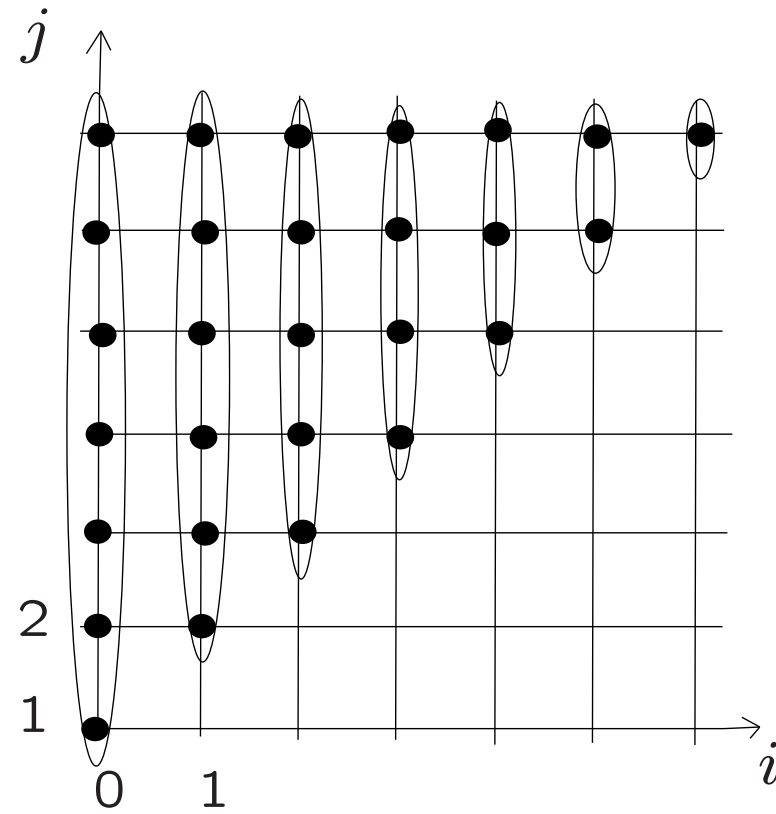
Warum sind die beiden **rechten Seiten** gleich?

Wie sieht man die Gleichheit

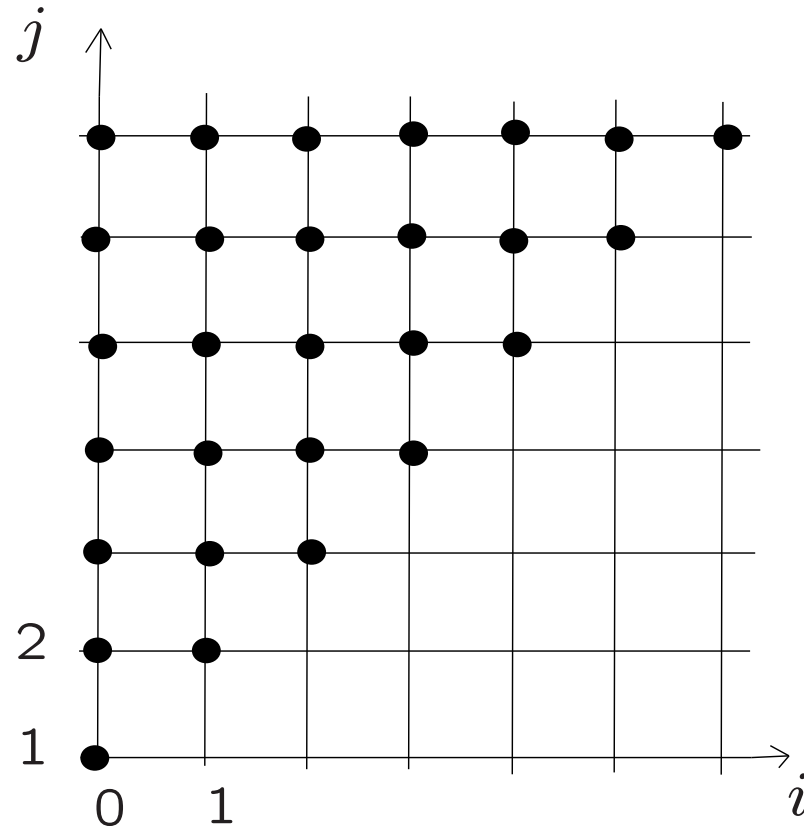
$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad ?$$



$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

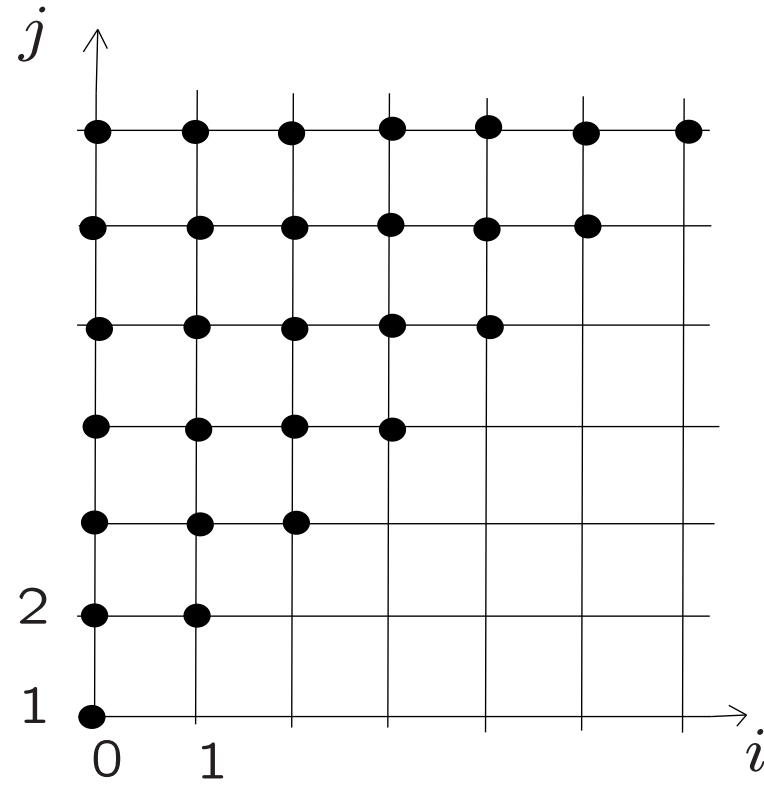


$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$



Es kommt nicht auf die Reihenfolge  
der Summation an





$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad \square$$

### 3. Die Exponentialapproximation.

Oder:

Münzwurf

mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?

Wieder sei

$T$

der zufällige Zeitpunkt des ersten Erfolgs  
in einem fortgesetzten  $p$ -Münzwurf.

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = ?$$

$$q^{2000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) \approx e^{-2}$$

$$q^{2000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) \approx e^{-2}.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > 2\right) \approx e^{-2}.$$

Betrachten wir  $T$  auf der Skala seines Erwartungswertes:

$$\tilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für  $t \in \mathbb{R}_+$  ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{T} > t\} &= \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\right) \\ &= (1 - p)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \\ &= (1 - p)^{\frac{1}{p}} p^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \end{aligned}$$

Für  $p \rightarrow 0$  konvergiert dies gegen

$$(e^{-1})^t = e^{-t}.$$

Diese Tatsache formulieren wir als einen *Grenzwertsatz*:

(vgl. Buch S. 42)

**Satz** Sei  $T_1, T_2, \dots$  eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[T_m] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

Dann gilt für jedes  $t \geq 0$ :

$$\mathbf{P} \left( \frac{T_m}{\mathbf{E}[T_m]} > t \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-t}$$



## 4. Die Poissonapproximation.

Oder

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie viele Erfolge gibt es  
bei einer großen Zahl von Versuchen?

$p$  klein,  $n$  groß

$$X := Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$$\mathbf{P}(X = k) \approx ?$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000} \\ \approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1} \approx 3e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} \approx \frac{1}{2} (np)^2 q^n \approx \frac{1}{2} 3^2 e^{-3}$$

Clou:

$p$  klein,  $n$  groß:

$$q^n = (1 - p)^n \approx e^{-np}$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} n^k p^k q^n \approx \frac{1}{k!} (np)^k e^{-np}$$

## Fazit

Sei  $p$  eine kleine positive Zahl,  
 $n$  eine große natürliche Zahl  
und  $X$  eine  $\text{Bin}(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable.

Man kann dann die Verteilungsgewichte von  $X$   
approximativ als Funktion von  $\mathbb{E}[X] = np$  ausdrücken.

Rigoros fasst man diese Behauptung im folgenden

Grenzwertsatz:

**Satz** (Poissons Gesetz der seltenen Ereignisse)

(vgl. Buch S. 30)

Sei  $\lambda > 0$  und sei  $X_n, n = 1, 2, \dots$ ,  
eine Folge von  $\text{Bin}(n, p_n)$ -verteilten Zufallsvariablen,

so dass für  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \lambda, \quad \text{d. h. } p_n \sim \frac{\lambda}{n}.$$

Dann gilt für jedes  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(X_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} =$$

$$\frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{(np_n)^k}_{\rightarrow \lambda^k} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{(1 - p_n)^{-k}}_{\rightarrow 1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}. \quad \square$$

**Definition** (Poissonverteilung)

(Buch S. 29)

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

Eine Zufallsvariable  $X$  mit Zielbereich  $\mathbb{N}_0$  heißt

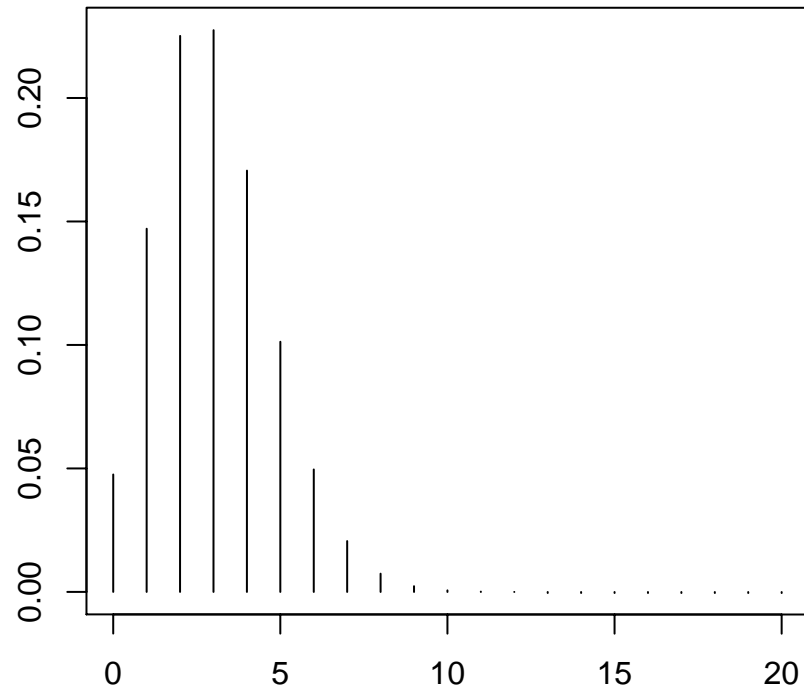
*Poissonverteilt* mit Parameter  $\lambda$ ,

kurz  $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilt,

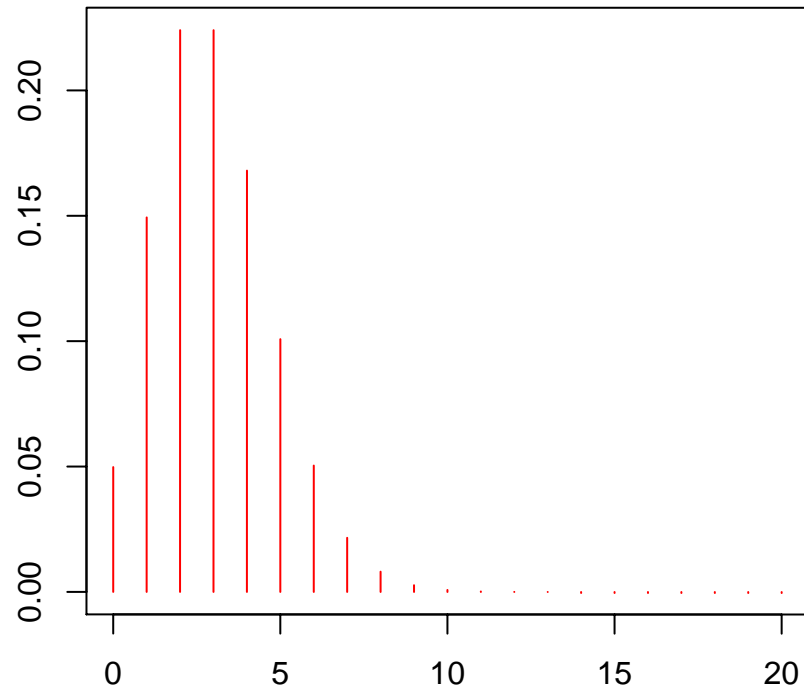
wenn

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

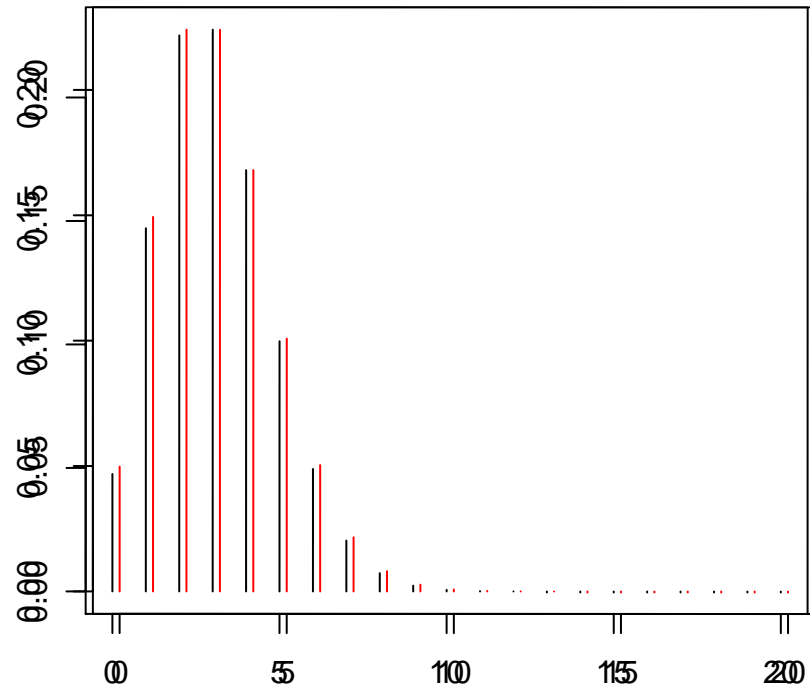




Binomialgewichte zu  $n = 100$  und  $p = 0.03$



Poissongewichte zum Parameter  $\lambda = 3$



## Satz.

Der Erwartungswert  
einer  $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X$  ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot 1 \quad \square \end{aligned}$$

## Zusammenfassung:

1. Im  $p$ -Münzwurf ist die Wartezeit auf den ersten Erfolg

$$\text{Geom}(p)\text{-verteilt: } \mathbf{P}(T > n) = q^n.$$

2. Für kleine  $p$  gilt: 
$$\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > t\right) \approx e^{-t}$$

3. Für kleine  $p$  und große  $n$  ist die Anzahl der Erfolge in  $n$  Versuchen approximativ  $\text{Pois}(np)$ -verteilt.

Für eine  $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable gilt:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$