

Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

1. Die Grundbegriffe

Bisher hatten wir uns (vor allem) mit Zufallsvariablen beschäftigt, deren Wertebereich S endlich war.

Die (schon in Vorlesung 1b formulierten)

zwei Grundregeln

für Wahrscheinlichkeiten lauteten für diesen Fall:

Normiertheit auf Eins:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 .$$

Additivität:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \quad A \subset S$$

Diese beiden Regeln behalten ihren Sinn, wenn der Wertebereich nicht endlich, sondern abzählbar unendlich ist.

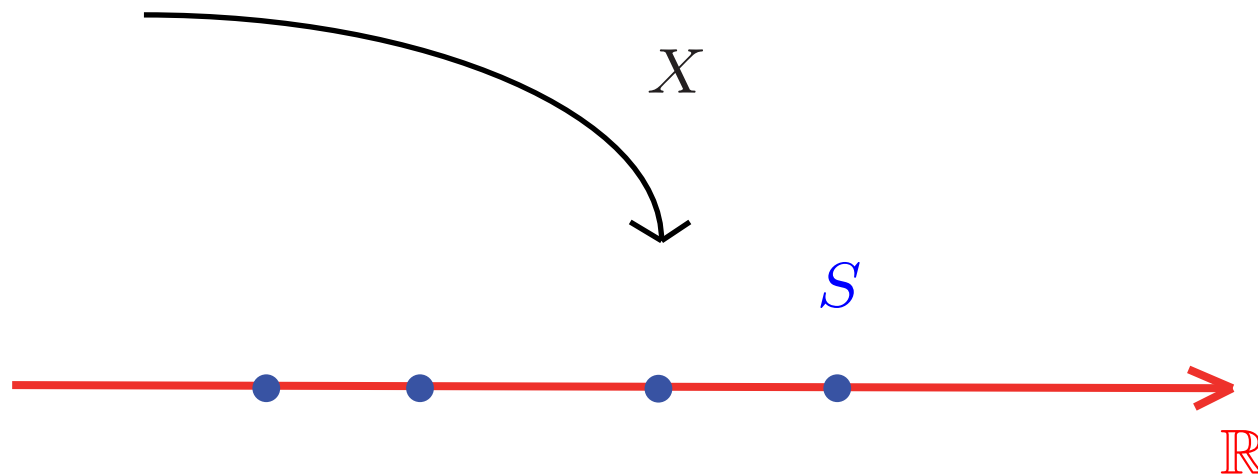
Beispiel: $S = \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}, \quad \dots$$

$$\mathbb{P}(X = a) = 1/2^a, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Auch wenn der **Wertebereich** von X
eine **überabzählbare Menge** ist
(wie z.B. \mathbb{R} oder das “Einheitsintervall” $[0, 1]$
oder das “Einheitsquadrat” $[0, 1] \times [0, 1]$),
behalten beide Regeln ihren Sinn, wenn man fordert,
dass der Wertebereich
eine **endliche oder abzählbar unendliche Menge S** enthält
mit
$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

Beispiel: Wertebereich \mathbb{R}



$S \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar unendlich mit $P(X \in S) = 1$

Warum ist das interessant?

Wie wir sehen werden (und wie jetzt schon intuitiv klar ist), kann man mit reellwertigen Zufallsvariablen **rechnen**.

Man kann z.B. ein reellwertiges X halbieren zu $X/2$, und wenn X diskret war, ist auch $X/2$ wieder diskret.

Definition:

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**,
falls ihr Wertebereich
eine **diskrete** (d.h. endliche oder abzählbar unendliche)
Menge S enthält mit
 $P(X \in S) = 1$.

Für diskrete Zufallsvariable X und

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1$$

mit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge S gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \quad A \subset S$$

(Additivität)

Die Zahlen $\rho(a) := \mathbf{P}(X = a)$, $a \in S$,

sind die **Verteilungsgewichte**.

Die Abbildung $A \mapsto \rho(A) := \mathbf{P}(X \in A)$, $A \subset S$,

heißt die **Verteilung** von X .

2. Zufällige Paare und ihre Komponenten

X_1, X_2 seien diskrete ZV'e
mit $\mathbf{P}(X_i \in S_i) = 1$, S_i diskret, $i = 1, 2$.

Dann ist auch $X = (X_1, X_2)$ diskret, mit

$$\mathbf{P}(X \in S_1 \times S_2) = 1.$$

Wir nennen X dann auch ein (diskretes)
zufälliges Paar mit Komponenten in S_1 und S_2 .

Die Ereignisse $\{(X_1, X_2) = (a_1, a_2)\}$ notieren wir auch als

$$\{X_1 = a_1, X_2 = a_2\}.$$

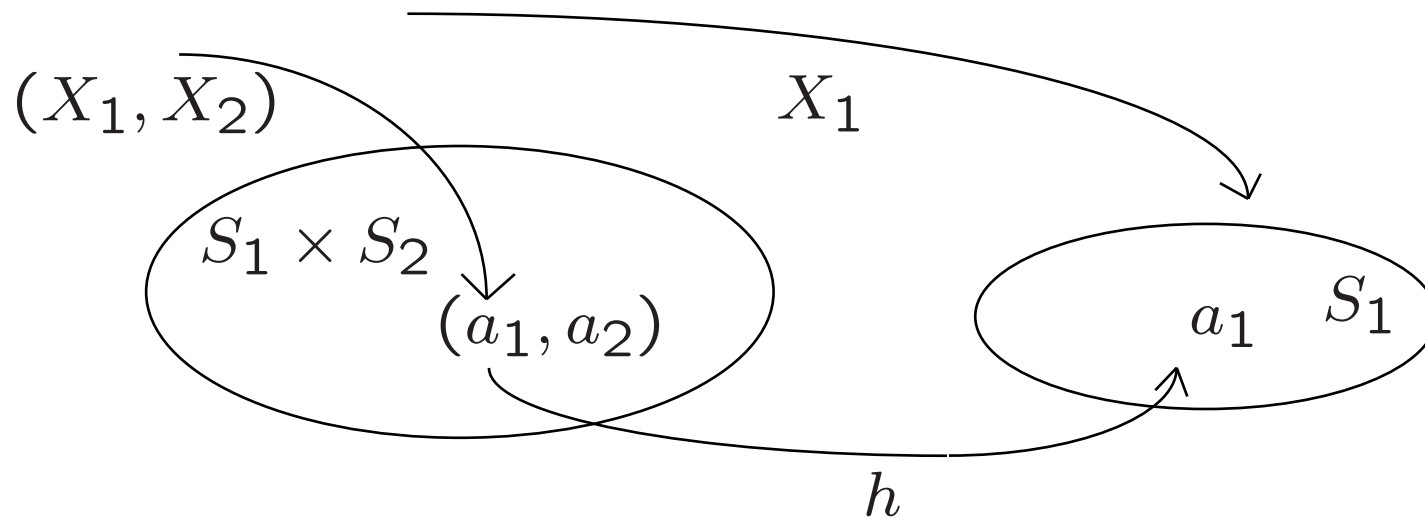
Die Verteilungsgewichte von X schreiben wir als

$$\begin{aligned}\rho(a_1, a_2) &= \mathbf{P}((X_1, X_2) = (a_1, a_2)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) ,\end{aligned}$$

Sei ρ_1 die Verteilung von X_1 .

Man erhält deren Gewichte als

$$\rho_1(a_1) = \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \rho(a_1, a_2) .$$



$$h((a_1, a_2)) := a_1$$

ist die

Projektion des Paares (a_1, a_2) auf seine erste Komponente

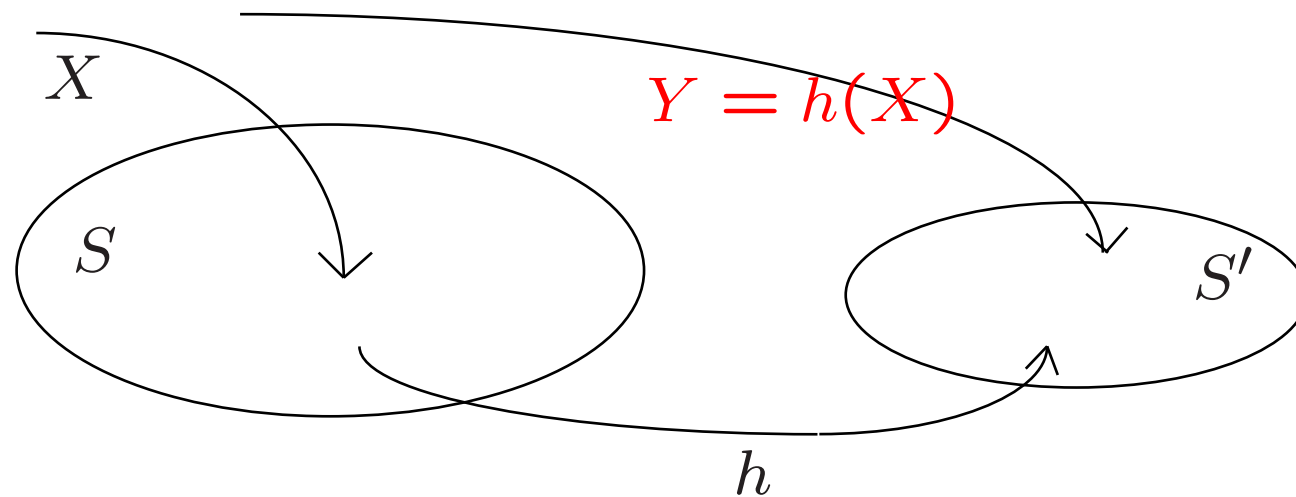
3. Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen und Transport von Verteilungen

Der Übergang von $X = (X_1, X_2)$
zur Komponente X_1
ist ein Beispiel einer
Vergrößerung (Weiterverarbeitung) einer Zufallsvariablen:

$$X_1 = h(X)$$

mit $h((a_1, a_2)) := a_1$

Sind S und S' zwei Mengen,
 X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S ,
 h eine Abbildung von S nach S' ,
und nimmt man X als zufällige Eingabe von h ,
dann bekommt man eine Zufallsvariable Y mit Zielbereich S' :

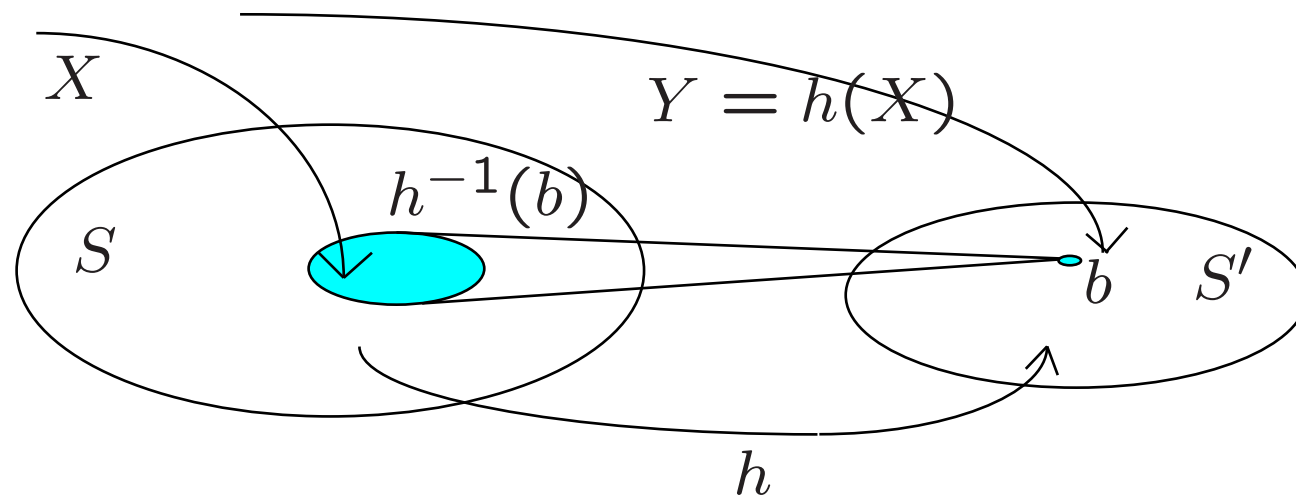


Für jedes $b \in S'$ gilt:

$$\{h(X) = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}$$

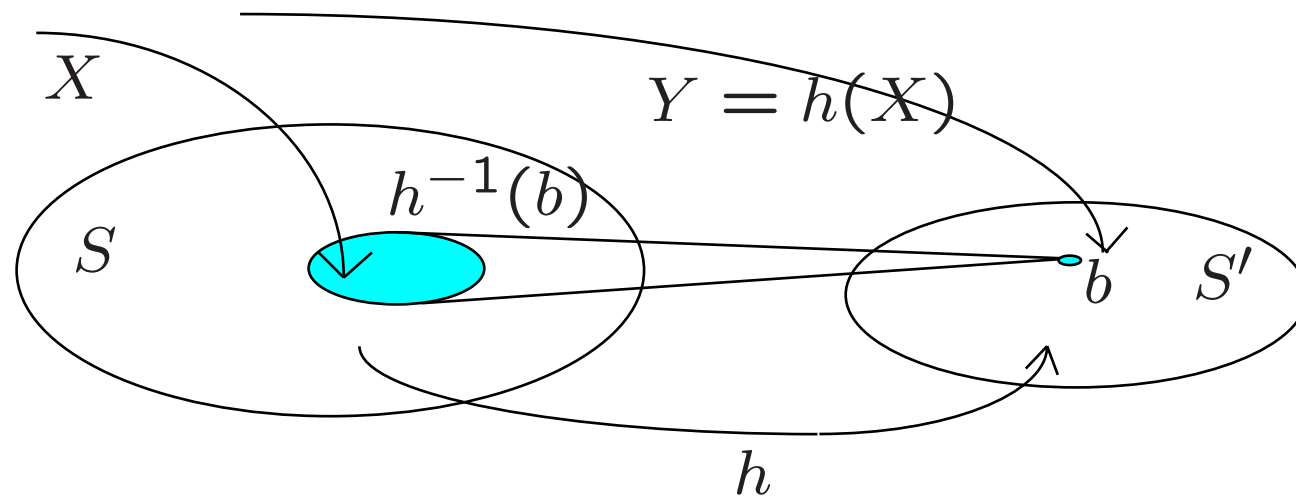
Für die Verteilungsgewichte von $Y = h(X)$ ergibt sich:

$$\mathbf{P}(Y = b) = \mathbf{P}(X \in h^{-1}(b)) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a).$$



Bezeichnet ρ die Verteilung von X und ρ' die von Y ,
dann ist

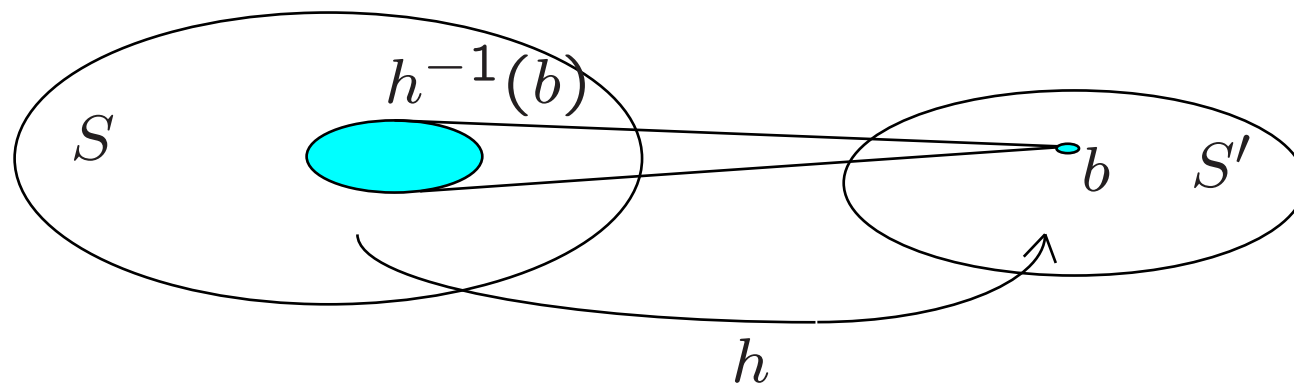
$$\rho'(b) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \rho(a).$$



Bezeichnet ρ die Verteilung von X und ρ' die von Y ,
dann ist

$$\rho'(b) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \rho(a).$$

Man sagt: Die Verteilung ρ wird durch die Abbildung h
in die Verteilung ρ' transportiert.



Diese Situation haben wir schon mehrmals angetroffen:

in Vorlesung 1b:

$X :=$ rein zufällige $1, \dots, g$ -Folge der Länge n

$T = h(X) :=$ Zeitpunkt der ersten Kollision

(mit $T := \infty$ falls keine Kollision eintritt)

in Vorlesung 2a:

$X :=$ rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$

$h(X) :=$ Länge des Zyklus von X , der die Eins enthält.

Heutiges Programm:
Weitere Beispiele für
“Vergrößerungen von zufälligen Folgen”

→ wichtige Beispiele
diskreter Zufallsvariabler und diskreter Verteilungen.

4. Die Anzahl der Erfolge beim fairen Münzwurf

$$S := \{0, 1\}^n$$

die Menge der 01-Folgen der Länge n

X sei uniform verteilt auf S ,

jeder Ausgang hat somit das Gewicht

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}$$

(Man sagt auch: X ist ein n -facher “fairer Münzwurf”.)

$Y :=$ die Anzahl der Einsen in X .

Was ergibt sich für die Verteilungsgewichte von Y ?

Jede einzelne 01-Folge a der Länge n mit genau k Einsen

hat Gewicht

$$\frac{1}{2^n}$$

Wieviele derartige a gibt es?

$$\binom{n}{k}$$

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

5. Die Anzahl der Sechsen beim fairen Würfeln

Beispiel

n -faches Würfeln:

Wie ist die Anzahl der Sechsen verteilt?

$W = (W_1, \dots, W_n)$ uniform verteilt auf
 $S := \{1, \dots, 6\}^n$.

$Z := (Z_1, \dots, Z_n)$, mit
 $Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(W_i)$

Z ist also eine zufällige 01-Folge, mit
 $Z_i = 1$ falls der i -te Wurf eine Sechs ergibt
und $Z_i = 0$ sonst.
Wie ist Z verteilt?

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_1 = 1, \dots, Z_k = 1, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_n = 0) \\ &= \mathbf{P}(W_1 = 6, \dots, W_k = 6, W_{k+1} \neq 6, \dots, W_n \neq 6) \\ &= \frac{1^k \cdot 5^{n-k}}{6^n} \end{aligned}$$

$$= p^k q^{n-k},$$

mit $p := \frac{1}{6}$ und $q := \frac{5}{6}$.

Auch für jede andere Platzierung von **genau k "Sechsen"** in den n Würfeln ergibt sich diese W'keit.

Fazit zur

Verteilung der Anzahl der Sechsen beim n -fachen Würfeln:

Sei

$W = (W_1, \dots, W_n)$ uniform verteilt auf $S := \{1, \dots, 6\}^n$,

$$Z := (Z_1, \dots, Z_n), \quad \text{mit } Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(W_i)$$

Die Verteilung von

$$Y := Z_1 + \dots + Z_n$$

ist dann gegeben durch die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (\text{warum?})$$

6. Vom p -Münzwurf zur Binomialverteilung

(“Was $1/6$ recht ist, soll p billig sein...”)

Definition (p -Münzwurf):

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

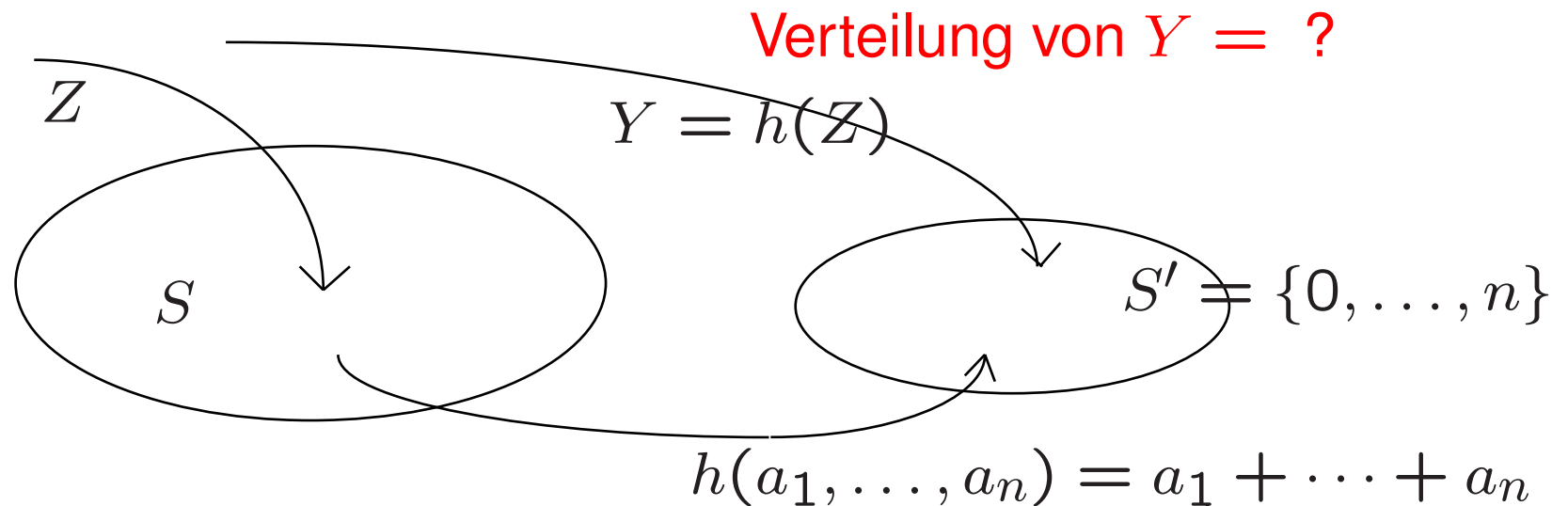
heißt **n -facher p -Münzwurf**,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

Ein Paradebeispiel für die
Weiterverarbeitung einer Zufallsvariablen ist die
Anzahl der Erfolge beim n -fachen p -Münzwurf:

Sei $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ ein n -facher p -Münzwurf
 und $Y = Z_1 + \dots + Z_n$ die *Anzahl der Erfolge*
 (die Anzahl der Einsen in der zufälligen 0-1 Folge Z)

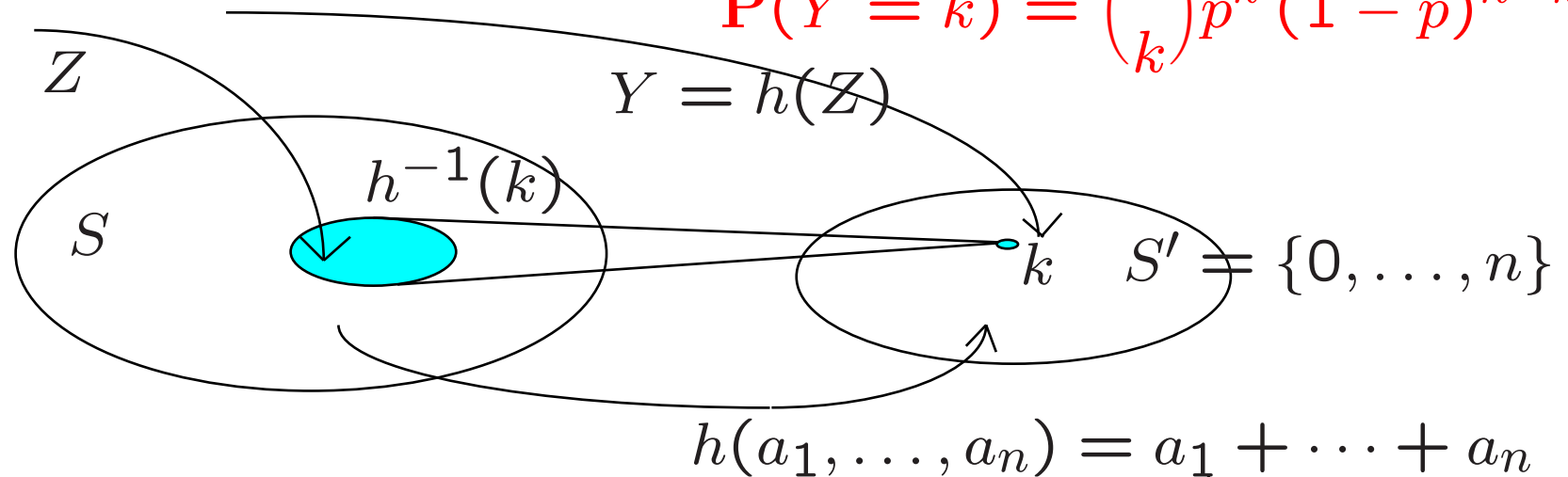


Jedes $a \in S$ mit $h(a) = k$
 (d.h. mit k Einsen und $n - k$ Nullen)

hat Gewicht $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Es gibt $\binom{n}{k}$ solche a .

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\{0, 1, \dots, n\}$

heißt *binomialverteilt* mit Parametern n und p ,

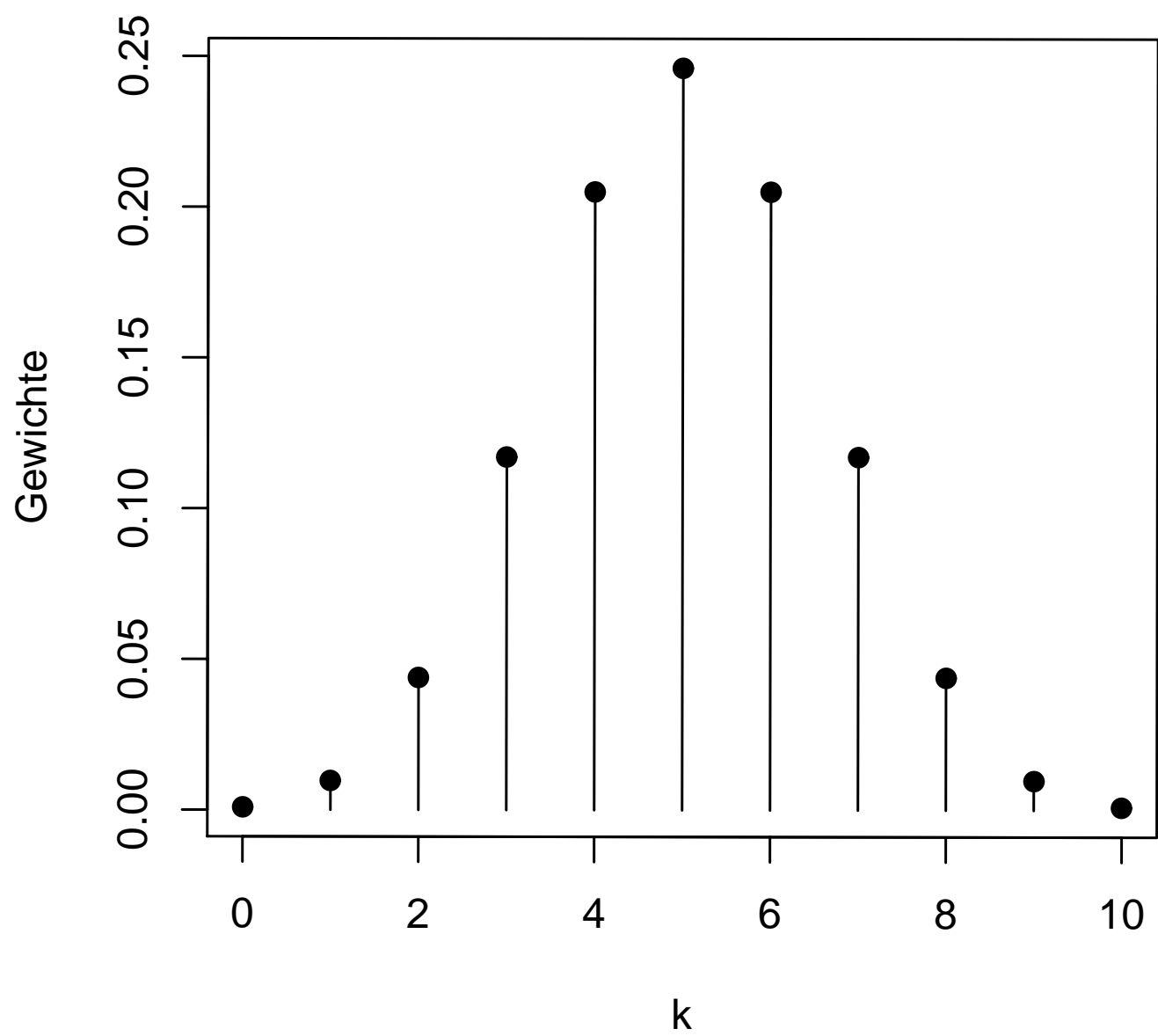
kurz

$\text{Bin}(n, p)$ -verteilt,

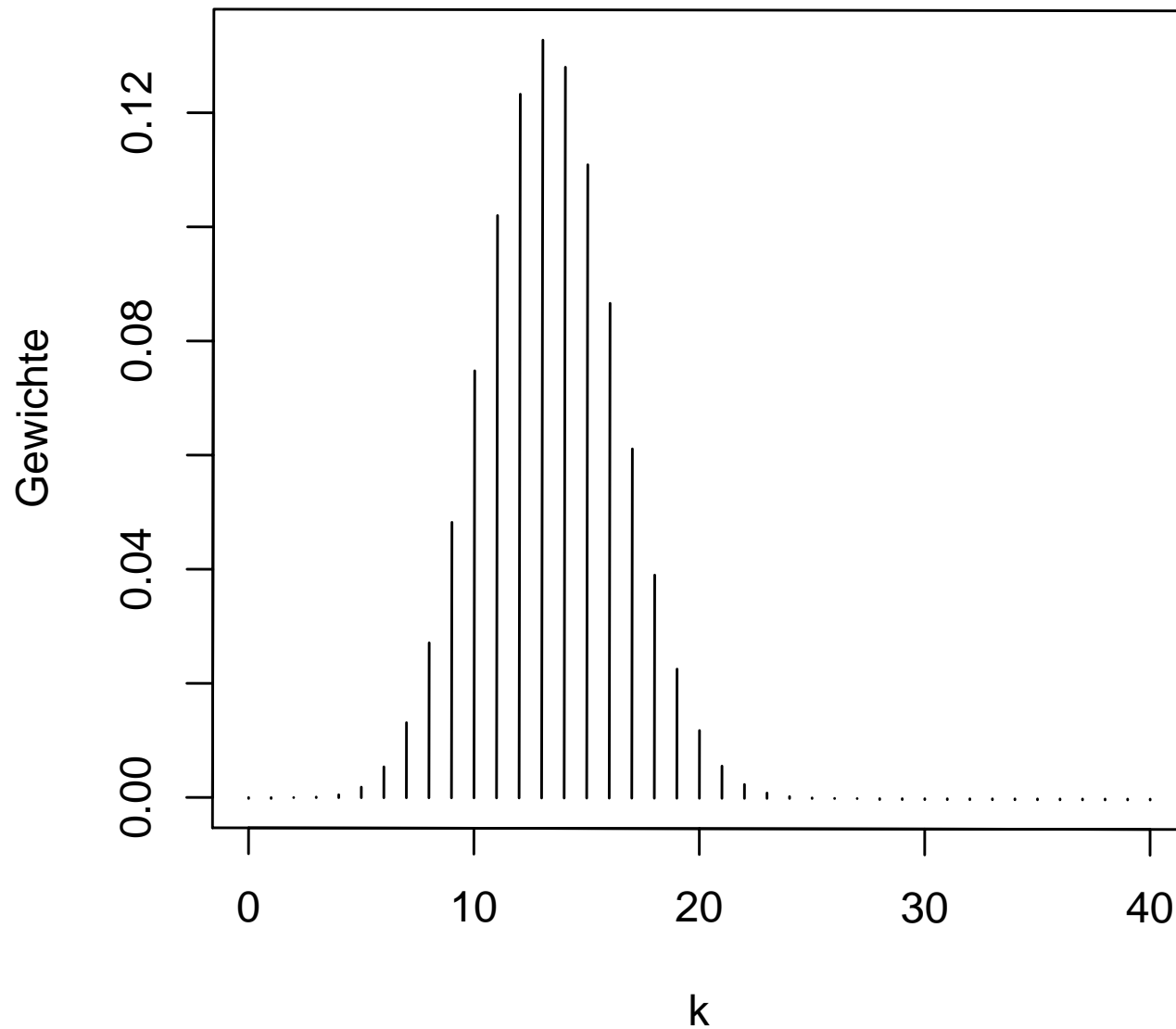
wenn

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

mit $q = 1 - p$.



Gewichte der Bin(10, 1/2) Verteilung



Gewichte der Bin(40, 1/3) Verteilung

7. Vom Ziehen mit Zurücklegen zum p -Münzwurf

n -maliges Ziehen *mit Zurücklegen*
aus einer ideal durchmischten Urne.

Ein Anteil p der Kugeln ist **rot**,
der restliche Anteil $q = 1 - p$ ist **blau**.

Zufällige 0-1 Folge $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$:

$Z_i = 1$ wenn beim i -ten Zug eine rote Kugel kommt,
und $Z_i = 0$ wenn beim i -ten Zug eine blaue Kugel kommt.

Sei a eine vorgegebene 0-1 Folge der Länge n mit k Einsen,

$$\text{z. B.: } a := (\underbrace{1, \dots, 1}_{k\text{-mal}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k)\text{-mal}})$$

$$P(Z = a) = ?$$

Sei g die Gesamtanzahl der Kugeln in der Urne.

Die Anzahl der roten Kugeln ist pg ,

die der blauen Kugeln ist qg . Für obiges a gilt:

$$P(Z = a) = \frac{(pg)^k (qg)^{n-k}}{g^n} = p^k q^{n-k}$$

Das ist so für jede 0-1 Folge a mit k Einsen und $n - k$ Nullen.

Zur Erinnerung:

Definition (p -Münzwurf):

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}\}$$

heißt **n -facher p -Münzwurf**,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

8. Vom p -Münzwurf
zum (p_1, \dots, p_g) -Würfeln

Oder: Was 2 recht ist, soll g billig sein!

Definition (“ n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln”):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_g = 1$.

Wir definieren **Gewichte** auf

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \dots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Eine Zufallsvariable W mit diesem Zielbereich S
und diesen Verteilungsgewichten ρ nennen wir

n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln.

Für jedes $a \in S$ mit
 k_1 Komponenten gleich 1,
 k_2 Komponenten gleich 2,
...
 k_g Komponenten gleich g

ist dann

$$\mathbf{P}(W = a) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_g^{k_g}$$

9. Vom (p_1, \dots, p_g) -Würfeln zur Multinomialverteilung

Beispiel: Besetzung der Ergebnisse beim “Würfeln”:

$W = (W_1, \dots, W_n)$ sei ein n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln

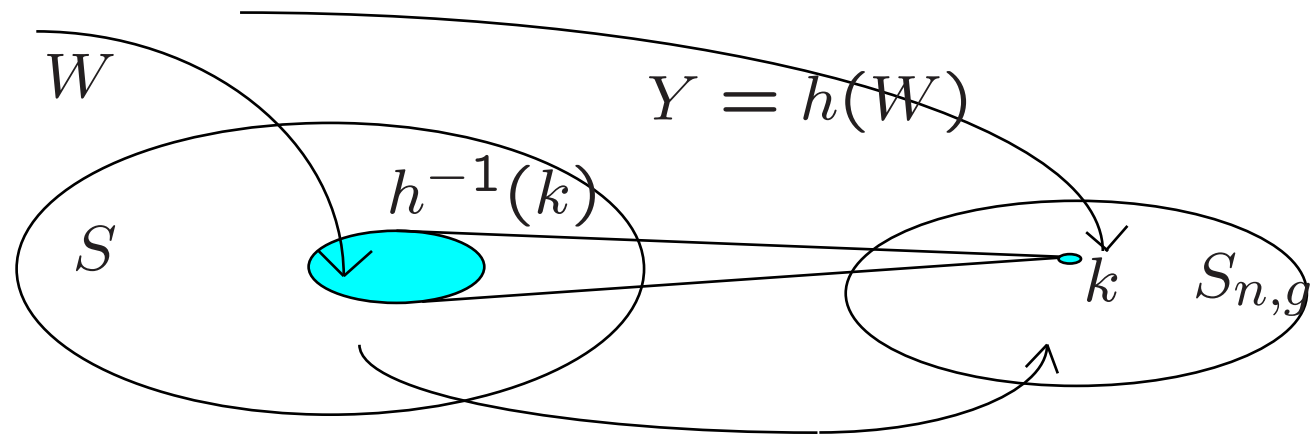
$$Y_j := \#\{i : W_i = j\}$$

(die Anzahl der Würfe mit Ergebnis j).

$Y := (Y_1, \dots, Y_g)$ hat dann den Zielbereich

$$S_{n,g} = \{(k_1, \dots, k_g) : k_1 + \dots + k_g = n\}.$$

Verteilung von $Y = ?$



$$h(a_1, \dots, a_n) = (k_1, \dots, k_g) =: k$$

mit $k_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (k_1, \dots, k_g)$

hat Gewicht $p_1^{k_1} \dots p_g^{k_g}$

Wieviele solche a gibt es?

Dazu überlegen wir:

Auf wieviele Arten kann man
 n Objekte so auf g Fächer verteilen,
dass das j -te Fach genau k_j Objekte enthält?

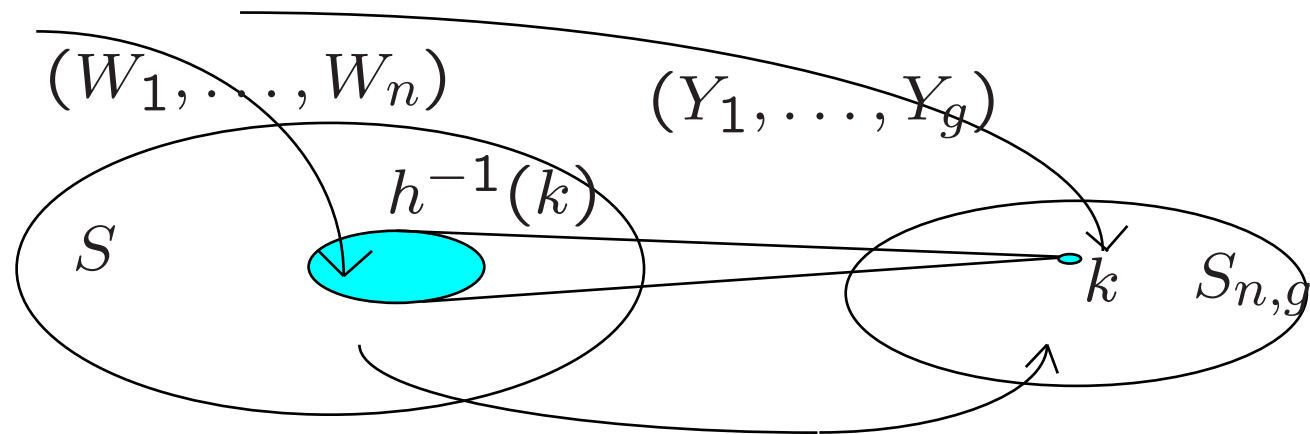
Dabei ist $k_1 + \dots + k_g = n$.

Die Antwort ist:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n - k_1}{k_2} \cdots \binom{n - k_1 - \dots - k_{g-1}}{k_g}$$

$$= \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_g!} =: \binom{n}{k_1, \dots, k_g}$$

Multinomialkoeffizient, lies: n über k_1, \dots, k_g



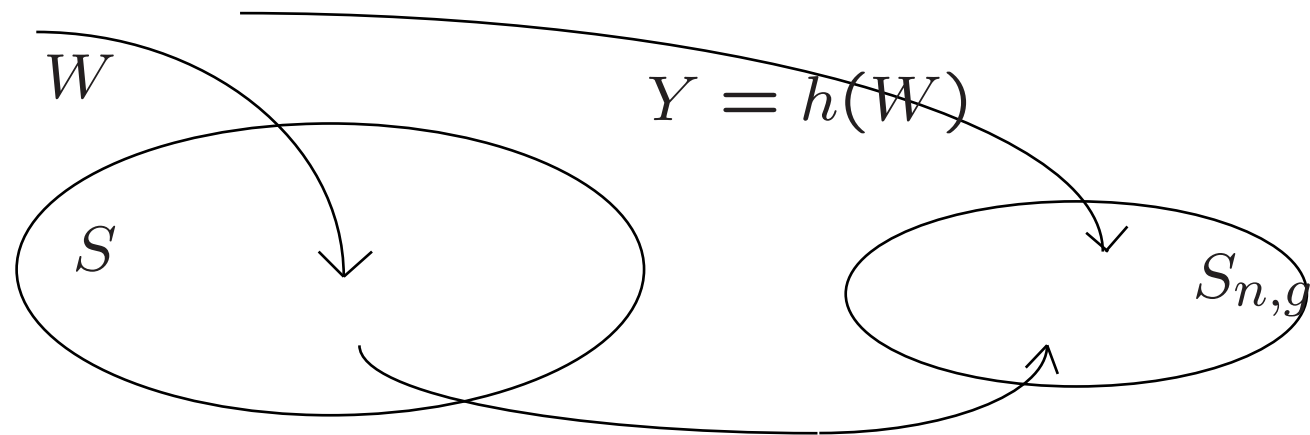
$$h(a_1, \dots, a_n) = (k_1, \dots, k_g)$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (k_1, \dots, k_g)$

hat Gewicht $p_1^{k_1} \dots p_g^{k_g}$

Es gibt $\binom{n}{k_1, \dots, k_g}$ solche a .

$$\mathbf{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_g = k_g) = \binom{n}{k_1, \dots, k_g} p_1^{k_1} \dots p_g^{k_g}$$



$$h(a_1, \dots, a_n) = (k_1, \dots, k_g) =: k$$

mit $k_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

$$\mathbf{P}(Y_1 = k_1, \dots, Y_g = k_g) = \binom{n}{k_1, \dots, k_g} p_1^{k_1} \dots p_g^{k_g}$$

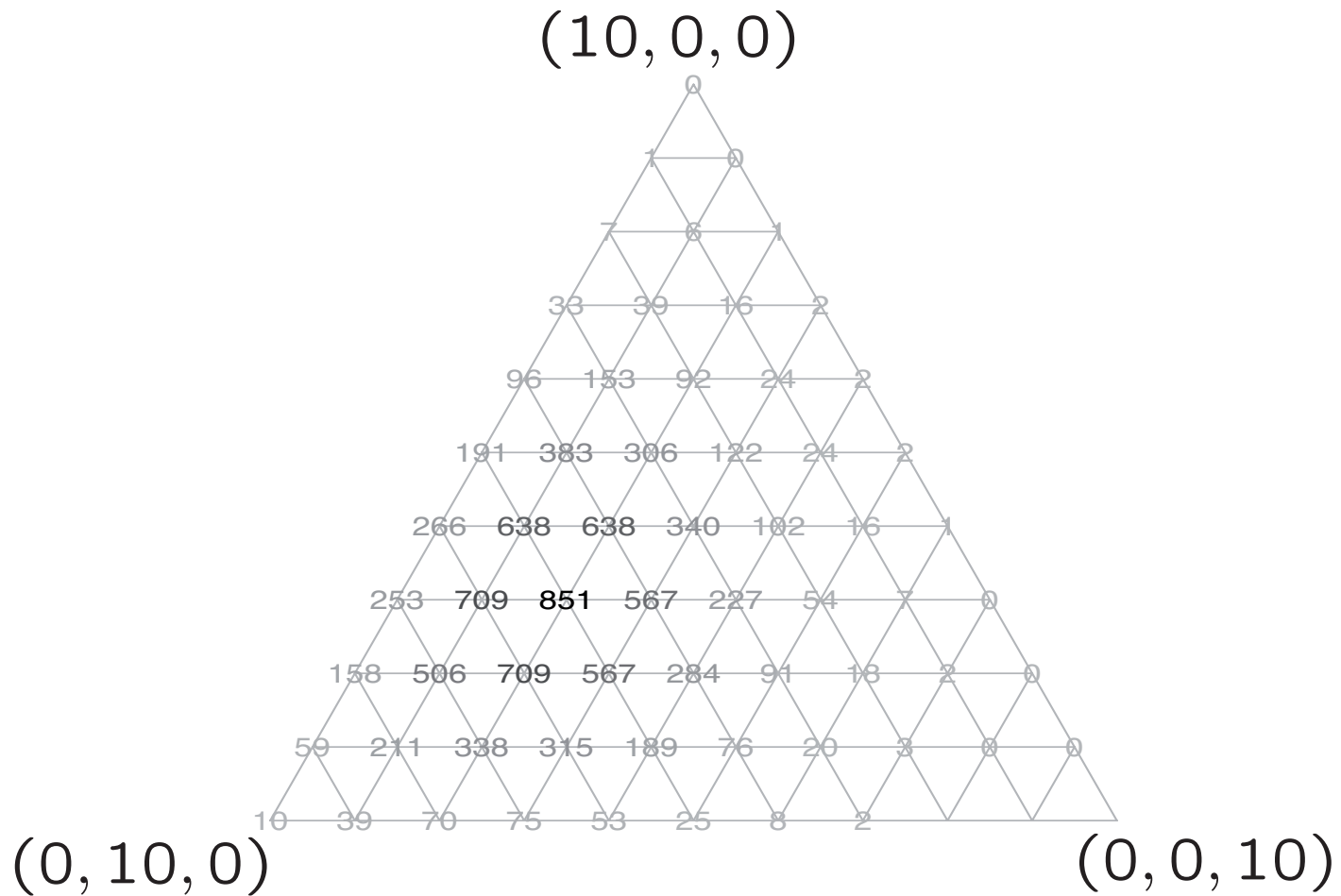
Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S_{n,g}$
heißt *multinomialverteilt* mit Parametern $n; p_1, \dots, p_g$,

wenn

$$\mathbf{P}(X = (k_1, \dots, k_g)) = \binom{n}{k_1, \dots, k_g} p_1^{k_1} \dots p_g^{k_g},$$

$$(k_1, \dots, k_g) \in S_{n,g}.$$



Gewichte der Multinomialverteilung, notiert in Vielfachen von $\frac{1}{10000}$,
für $n = 10$, $g = 3$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$

$$g \in \mathbb{N}$$

Würfeln

Besetzung der Ausgänge

Multinomialverteilung

$$g = 2$$

Münzwurf

Anzahl der Erfolge

Binomialverteilung

Zwei wichtige Beispiele aus der heutigen Vorlesung

Stichprobenziehen \rightarrow Münzwurf \rightarrow Binomialverteilung

$$(g = 2)$$

Stichprobenziehen \rightarrow "Würfeln" \rightarrow Multinomialverteilung

$$(g = 3)$$

werden illustriert durch die

Wandtner'schen R-Programme zu VL 2b.