

# Vorlesung 2a

## Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

(Buch S. 6-11)

# 0. Erinnerung und Auftakt

Sei  $S$  eine endliche Menge.

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *diskret uniform verteilt auf  $S$* ,

wenn

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt  $X$  eine *rein zufällige Wahl*  
aus  $S$ .

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \dots, g\}^n$$

$X :=$  rein zufällige  $1, \dots, g$  - Folge der Länge  $n$ .

Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch ein paar  
*Hilfen fürs Abzählen.*

# 1. Rein zufällige Permutation

## 1a. Elementares

Eine *Permutation* von  $1, \dots, n$   
ist eine bijektive Abbildung der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich.

Z. B. mit  $n = 7$

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

Wie wahrscheinlich ist es,  
dass eine rein zufällige Permutation  
genau **so** ausfällt?

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

mal  $(n - 2)$  Möglichkeiten für das Bild von 3

...

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$



Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, n$ ,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$  die Menge aller Permutationen von  $1, \dots, n$   
ist, und die auf  $S$  uniform verteilt ist.

Für alle Elemente  $a \in S$  gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

## 1b. Zufällige Permutation und zufälliges Ziehen

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation  
entstanden denken?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern  
beim  $n$ -maligen rein zufälligen *Ziehen ohne Zurücklegen*  
aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne  
mit anfangs  $n$  Kugeln, beschriftet mit den Nummern  $1, \dots, n$ .

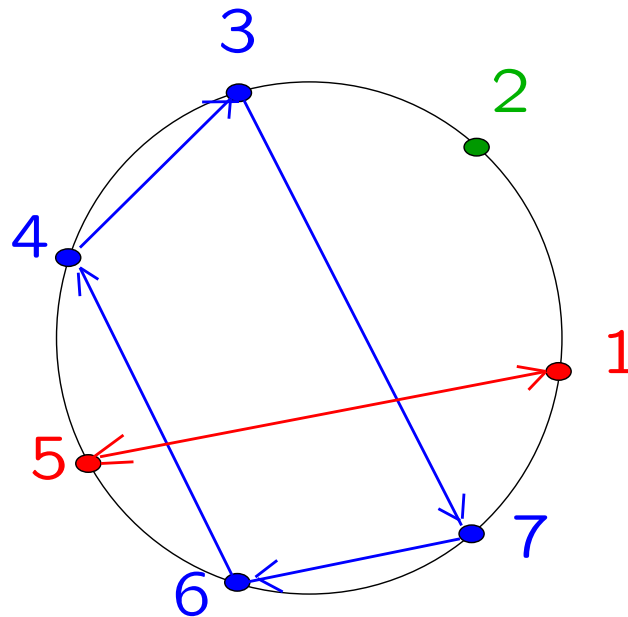
Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle  $n$  Kugeln  
und notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

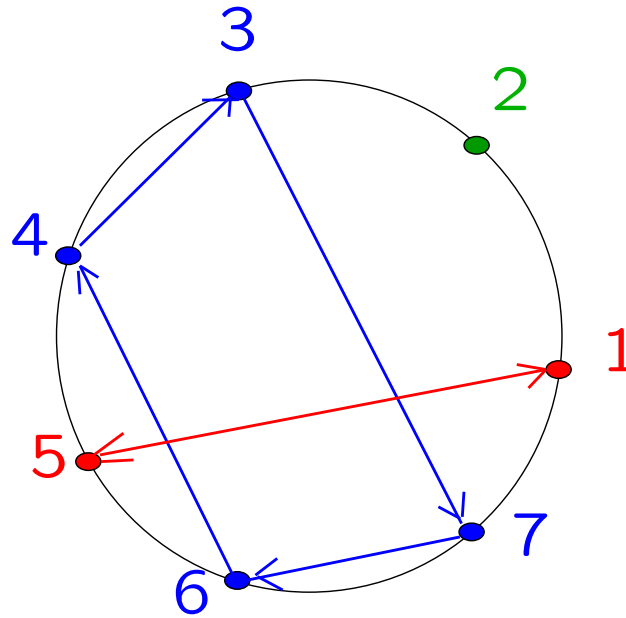
## 1c. Zyklendarstellung einer Permutation

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6





Die Länge des **Zyklus**, der die **Eins** enthält, ist hier **zwei**.

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, 7$ ,

Wie wahrscheinlich ist es, dass der die 1 enthaltende Zykel  
genau die Länge 2 hat?

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, 7$  mit dieser Eigenschaft  
gibt es?

$6 \cdot 5!$  (warum?)

Also ist die gefragte W'keit:  $\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$ .

Jetzt allgemein:

Für eine Permutation  $a \in S$  bezeichne

$$h(a)$$

die Länge des Zyklus von  $a$ , der die Eins enthält.

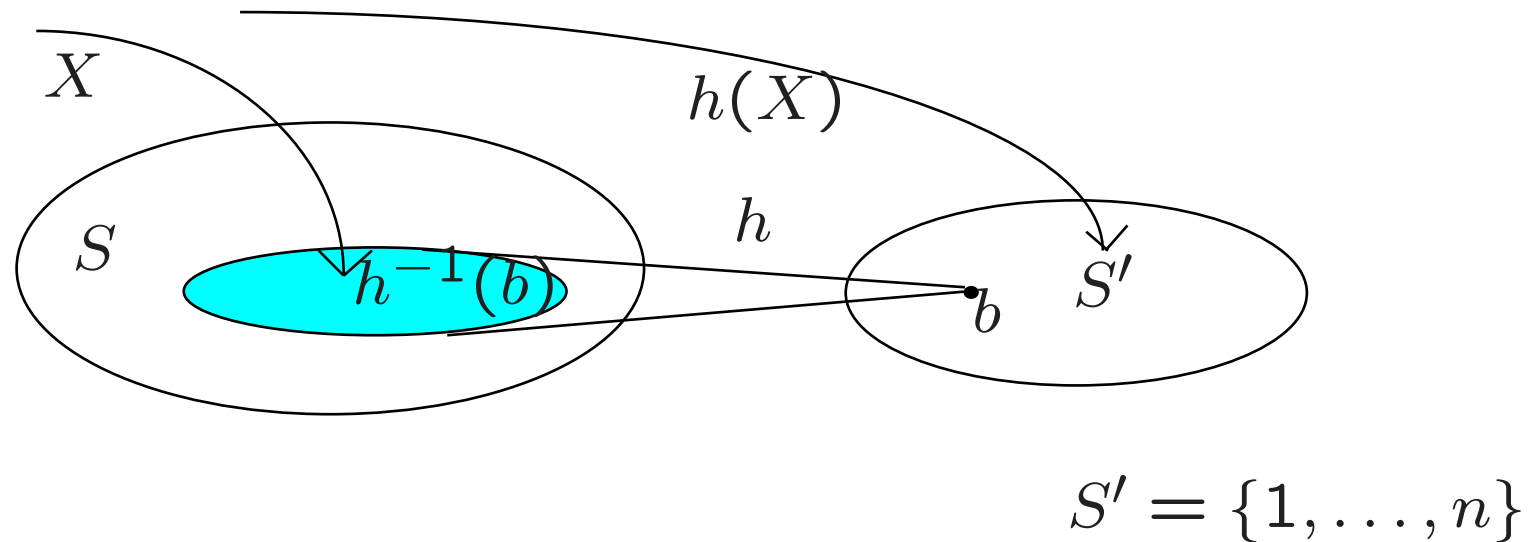
Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $\{1, \dots, n\}$ ,

also eine rein zufällige Wahl aus  $S$ ,

und sei  $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$





Wieviele Permutationen  $a \in S$  gibt es mit  $h(a) = b$ ?

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\begin{aligned} \#A &= (n-1)(n-2) \cdots (n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b) \cdots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

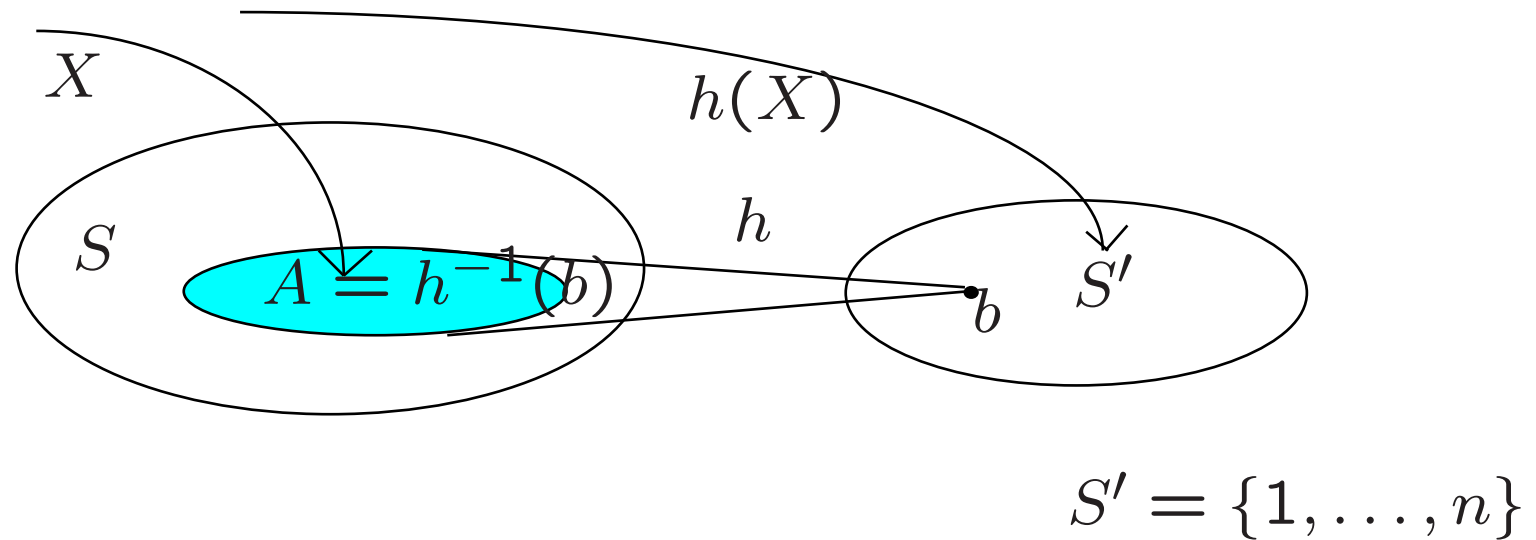
$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$A = \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \dots, n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus  
einer rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,  
der die Eins enthält,  
ist uniform verteilt auf  $\{1, \dots, n\}$ .

## 2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

2a. Die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ : der Binomialkoeffizient.

Sei  $k \leq n$ .

Jetzt sei  $S$

die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

**Wieviele  $k$ -elementige Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gibt es?**

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus  $n$  Personen ein  $k$ -köpfiges Komitee ohne Reihung zu bilden?

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es  $n(n - 1) \cdots (n - (k - 1))$  mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,  
somit führen jeweils  $k!$  dieser Wahlprotokolle  
auf dieselbe  $k$ -elementige Teilmenge.

Also:

$$\#S = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!}.$$



$$\#S = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

*Binomialkoeffizient „n über k“*

die Anzahl der Möglichkeiten für „k aus n“

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) = \cdots (x + y) = ?$$

Multipliziert man aus, dann ergeben sich  $2^n$  Summanden  
(entsprechend den  $xy$ -Folgen der Länge  $n$ ),  
jeder von der Form  $x^k y^{n-k}$ .

Die Zahl  $k$  gibt an, wie oft der Faktor  $x$   
im jeweiligen Summanden zum Zug kommt.

$$\text{Also } (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## Pascal'sches Dreieck

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
				.						
				.						

Rekursion: 
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Rekursion: 
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten,  
aus  $n$  Männern und einer Frau  
ein  $k+1$  köpfiges Komitee auszuwählen.  
Entweder die Frau ist im Komitee...  
oder sie ist nicht im Komitee...

Rekursion: 
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten,  
aus  $n$  Männern und einer Frau  
ein  $k+1$  köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder **die Frau ist im Komitee...**

oder **sie ist nicht im Komitee...**

## 2b. Rein zufällige Teilmengen

Sei  $0 \leq k \leq n$

und sei  $Y$  eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge  
von  $\{1, \dots, n\}$ .

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis  $\{Y = \{1, \dots, k\}\}$  ?

Der Zielbereich von  $Y$  ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\},$$

die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

Wir haben gesehen:

$$\#S = \binom{n}{k}$$

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

## 2c. Ein Zusammenhang mit rein zufälligen Permutationen



Wie bekommt man eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt (für  $k \leq n$ ):

Ist  $X = (X_1, \dots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,

dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

Anders gesagt:

Beim **Ziehen ohne Zurücklegen**  
führen die ersten  $k$  Züge auf eine  
rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne  
mit  $k$  roten und  $n - k$  blauen Kugeln.

Notiere die **Nummern  $X_1, \dots, X_k$  der Züge**,  
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$   
eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

# 3. Besetzungszahlen

### 3a. Begriffsbildung

Sei  $a = (a_1, \dots, a_n)$  eine  $1, \dots, g$  - Folge der Länge  $n$ .

Vorstellung: Objekt Nr.  $i$  kommt auf Platz  $a_i$ .

Wie oft wird laut Protokoll  $a$  der Platz  $j$  besetzt?

Anders gesagt: Für wieviele  $i$  ist  $a_i = j$ ?

$$b_j(a) := \#\{i : a_i = j, 1 \leq i \leq n\}$$

Das  $g$ -tupel der Besetzungszahlen  $b_j(a)$  nennen wir kurz  
“die (durch  $a$  induzierte) Besetzung”.

In der Vorstellung des sukzessiven Setzens  
von  $n$  Objekten auf  $g$  mögliche Plätze  
gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen  
(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

## 3b. Besetzungszahlen bei sukzessiver rein zufälliger Platzwahl

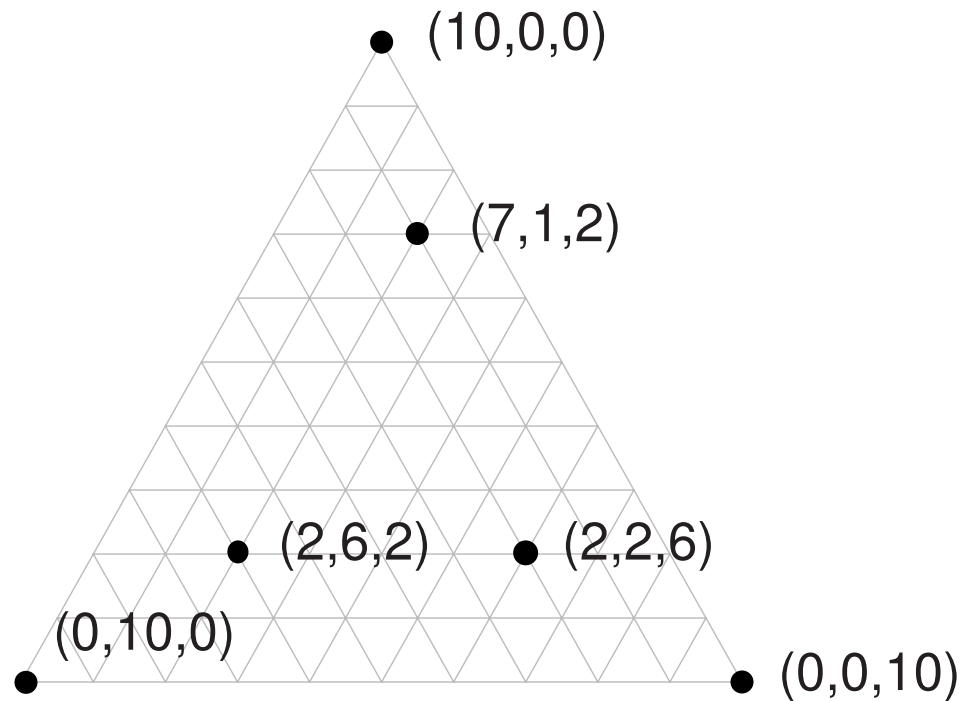
Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung, die aus einem auf  $\{1, \dots, g\}^n$  uniform verteilten  $X$  entsteht.

Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:  
 $n$  Individuen werden rein zufällig (und “unabhängig”)  
auf  $g$  mögliche Plätze gesetzt.

Auf der übernächsten Folie folgt das Ergebnis einer Simulation für  $n = 10$  und  $g = 3$ , veranschaulicht im sogenannten *de Finettii-Dreiecks*

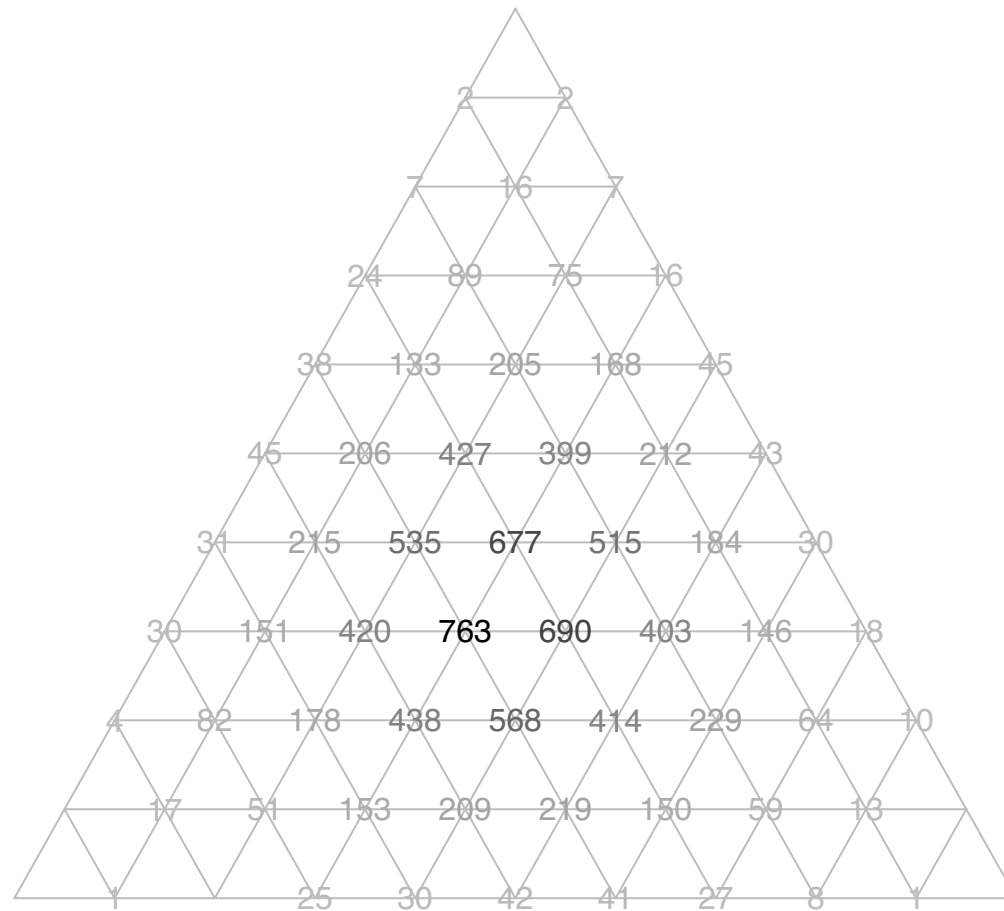


Das de Finetti Dreieck als Schaubild für die Besetzungen von 3 Plätzen mit  $n$  (hier 10) Objekten



Für einige Punkte sind (exemplarisch) die zugehörigen Besetzungen eingetragen

# Häufigkeiten der Besetzungen bei 10000 Wiederholungen



Wir sehen aus der Simulation:

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist  
(bei weitem) nicht uniform.

Wir kommen auf diese Verteilung  
in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

### 3c. Uniform verteilte Besetzung

von  $g$  Plätzen mit  $n$  Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,g} := \{k = (k_1, \dots, k_g) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_g = n\}$$

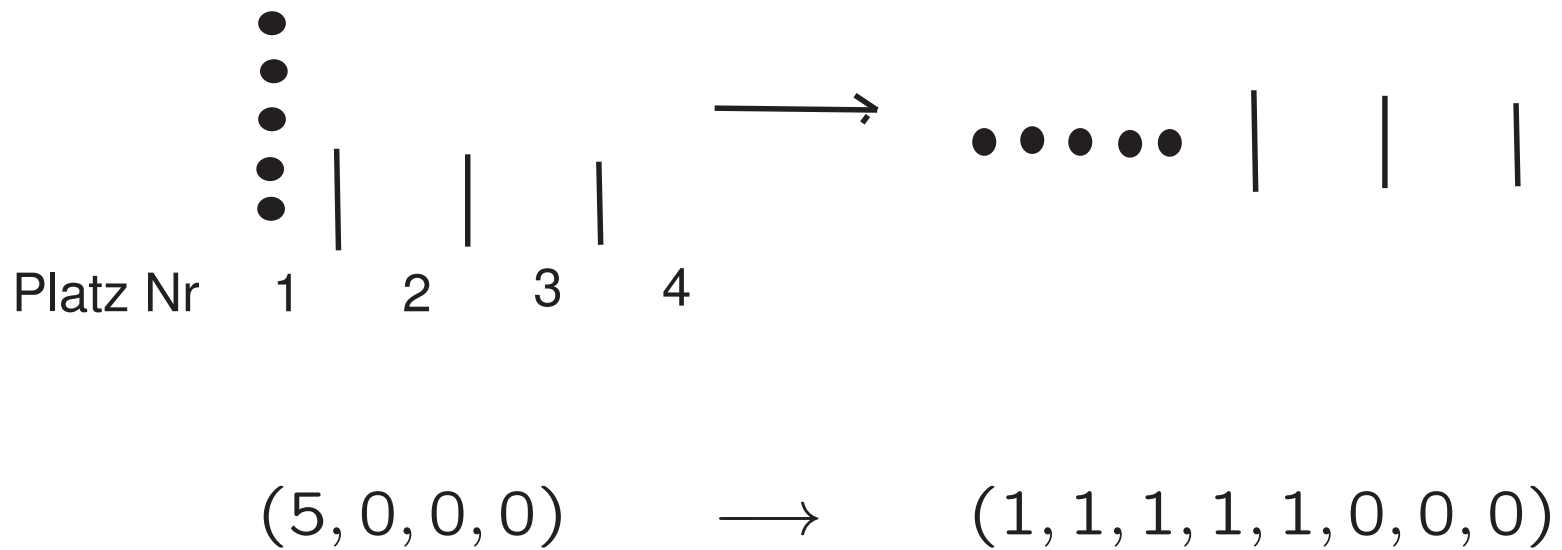
$k$  ist ein  $g$ -tupel von Besetzungszahlen, kurz: eine Besetzung.

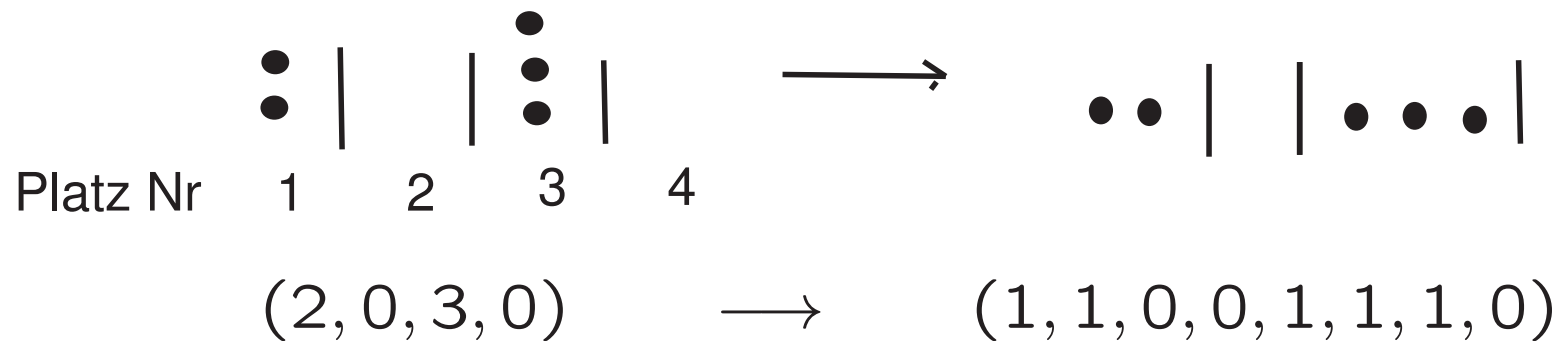
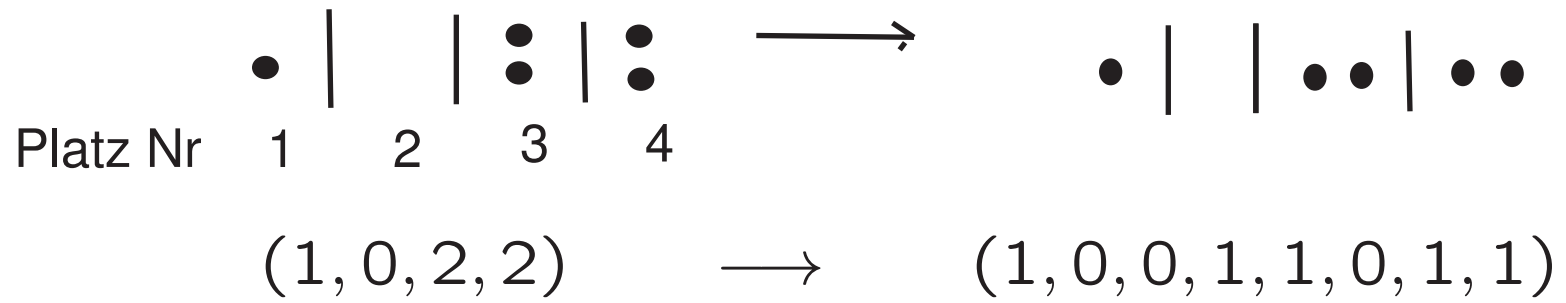
$$S_{n,g} := \{k = (k_1, \dots, k_g) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_g = n\}$$

$$\#S_{n,g} = ?$$

Hier hilft ein hübscher Trick,  $S_{n,g}$  anders darzustellen.

Beispiele:  $g = 4$  Plätze,  $n = 5$  Objekte





Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_g) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_g\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von  $S_{n,g}$  nach

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + g - 1$   
mit genau  $n$  Einsen



$$h(k_1, k_2, \dots, k_g) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_g\text{-mal}}$$

Voriges Beispiel:  $n = 5, g = 4$ :

$$(k_1, k_2, \dots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(k_1, k_2, \dots, k_g) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_g\text{-mal}}$$

Die Länge des  $j$ -ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz  $j$ .

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt. Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den  $g$  Plätzen, insgesamt gibt es  $g - 1$  solche Trennwände.

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + g - 1$   
mit genau  $n$  Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + g - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion mittels  $h$ ) auch:

$$\#S_{n,g} = \binom{n + g - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit  $n$  weißen und  $g - 1$  schwarzen  
Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen  
und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus  $S$ .

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von  $h$ )

in eine rein zufällige Besetzung.