Stochastik für die Informatik

Wintersemester 2018/19

Anton Wakolbinger

StofI-Webseite:

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/teaching/StofI1819/

Oder:

google: “Wakolbinger”

$\to$ Goethe-Universität – Homepage A. Wakolbinger

$\to$ Veranstaltungen WS 2018/19

Übungsgruppen zur Stochastik für die Informatik,
WS 2018/19

Gruppe	Zeit	Ort		Tutorin/Tutor
1	Di 14-16	Raum 110	RM10	Maxim Mansurow
2	Di 16-18	Raum H4	Gr56	Niyat Isayas
3	Mi 08-10	Raum H13	Gr56	Jan Lukas Igelbrink
4	Mi 10-12	Raum H7	Gr56	Anna Lena Weinel
5	Mi 12-14	Raum H6	Gr56	An Hoang
6	Do 10-12	Raum H6	Gr56	Maxim Mansurow
7	Do 10-12	Raum H13	Gr56	Kasra Khani-Alemuti
8	Do 12-14	Raum 110	RM10	Shehryar Bokhari
9	Fr 10-12	Raum 110	RM10	Lea Kristo
10	Fr 14-16	Raum H13	Gr56	Jan Lukas Igelbrink

Anmeldung zu einer Übungsgruppe:

elektronisch über OLAT ($\leftarrow$ StofI - Webseite)

bis Sonntag 21. Oktober 2018, 24 Uhr

nach dem first come - first serve Prinzip

Dienstags: Ausgabe des Übungsblatts.

Tipps zu den Übungsaufgaben:
in den anschließenden Tutorien (ab nächster Woche)
und auch in der Vorlesung!

Termin für die Abgabe der schriftlichen Lösungen der “S-Aufgaben”:
am Freitag (11 Tage nach Ausgabe des Blattes)

In der Woche nach der Abgabe
werden die Lösungen in den Tutorien besprochen.

Bonuspunkte (maximal 12):

durch aktive Beteiligung in den Tutorien.

Bonuspunkte bekommt man nur, wenn man
mindestes zweimal im Semester
Lösungen von Übungsaufgaben (oder Teile davon)
im Tutorium vorstellt,

und nur für die Aufgaben, bei deren Lösungsbesprechung
man im Tutorium anwesend ist.

Abschlussklausur:

Dienstag, 19. Februar 2019, 10:15-11:45 Uhr, HV/HVI

Dabei können 100 Klausurpunkte erreicht werden.

Die Note errechnet sich aus

der Summe der Anzahl der erreichten Klausurpunkte

plus der Anzahl der erreichten Bonuspunkte.

Beträgt diese Summe mindestens 50,

gilt die Abschlussprüfung über die Veranstaltung

als bestanden.

Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger

Elementare Stochastik, Birkhäuser, 2. Aufl. 2010,

Preis: 19,99 EUR

Semesterausleihe möglich aus der

Bibliothek des Mathematischen Seminars,

Robert-Mayer-Str. 8, 4. Stock

in der UB als E-Book vorhanden

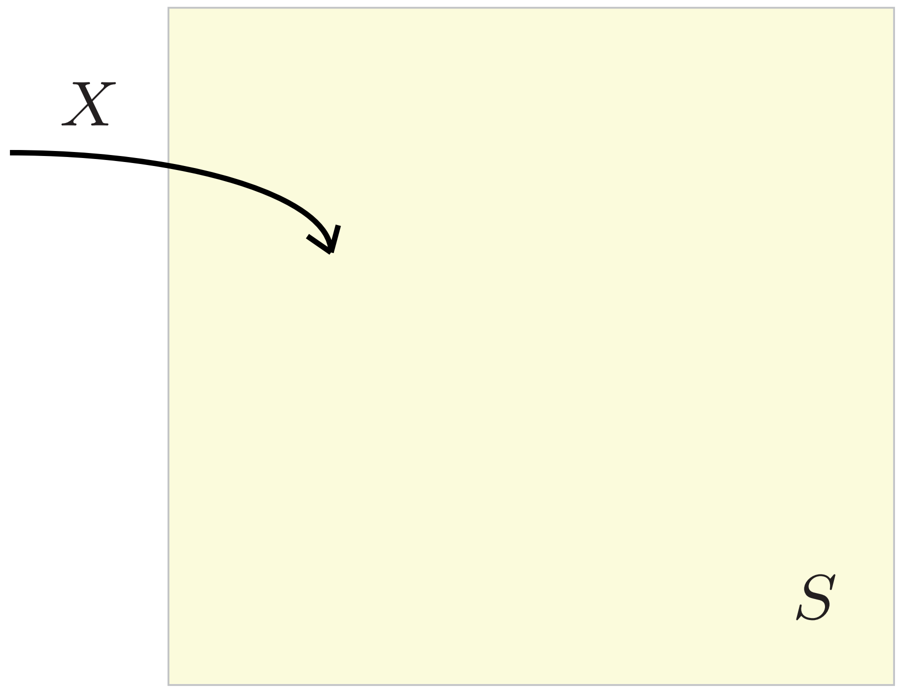
Vorlesung 1a

Zufallsvariable und Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen

vorgestellt an einem Beispiel

1. Rein zufällige Wahl aus einer endlichen Menge

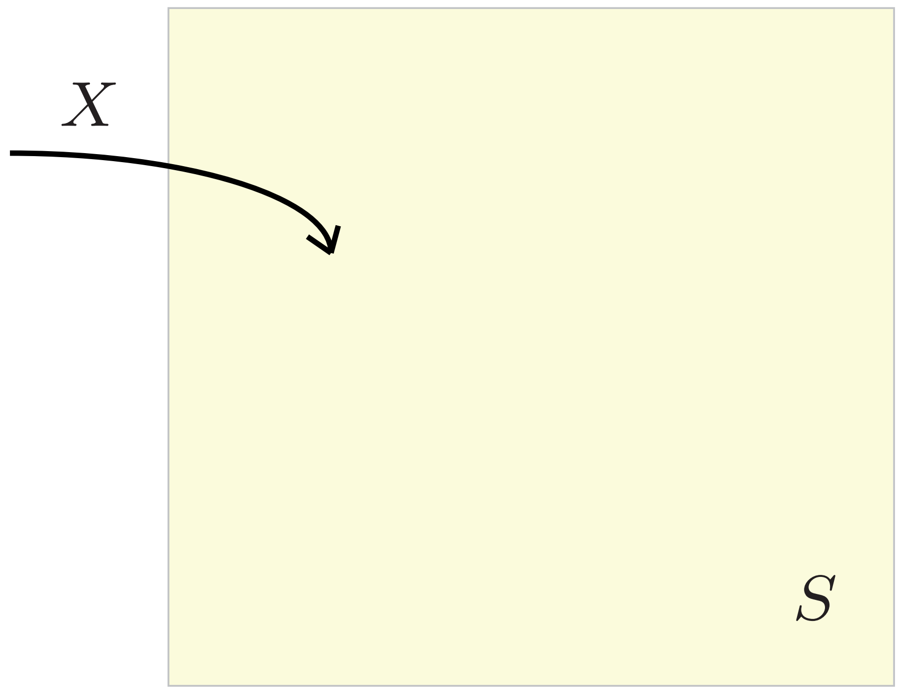
Prototypisches Beispiel einer Zufallsvariablen:



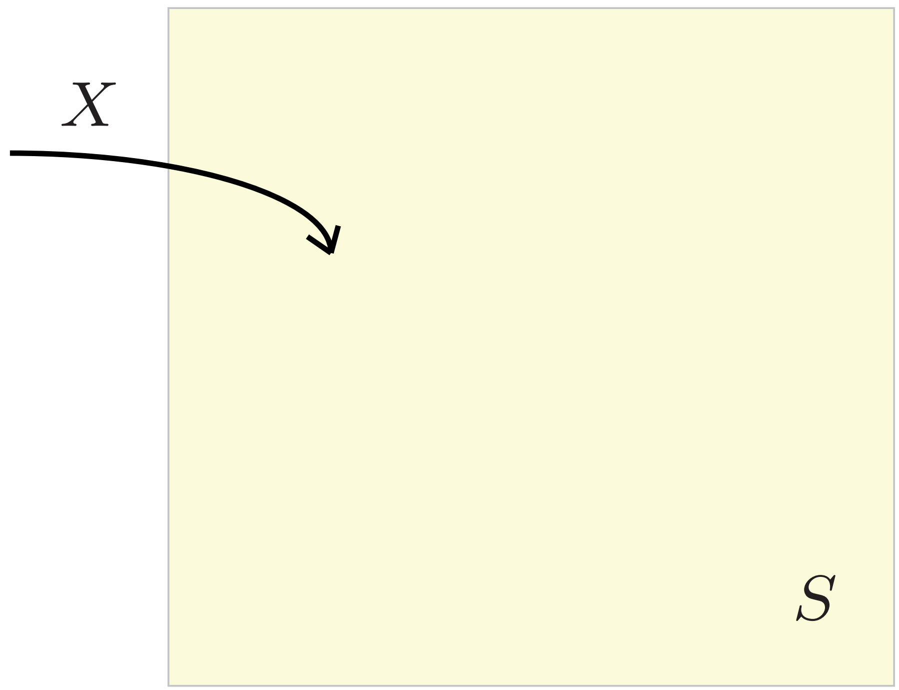
rein zufällige Wahl eines Punktes aus einer Fläche

(z. B. aus dem angegebenen Quadrat S)

Prototypisches Beispiel einer Zufallsvariablen:



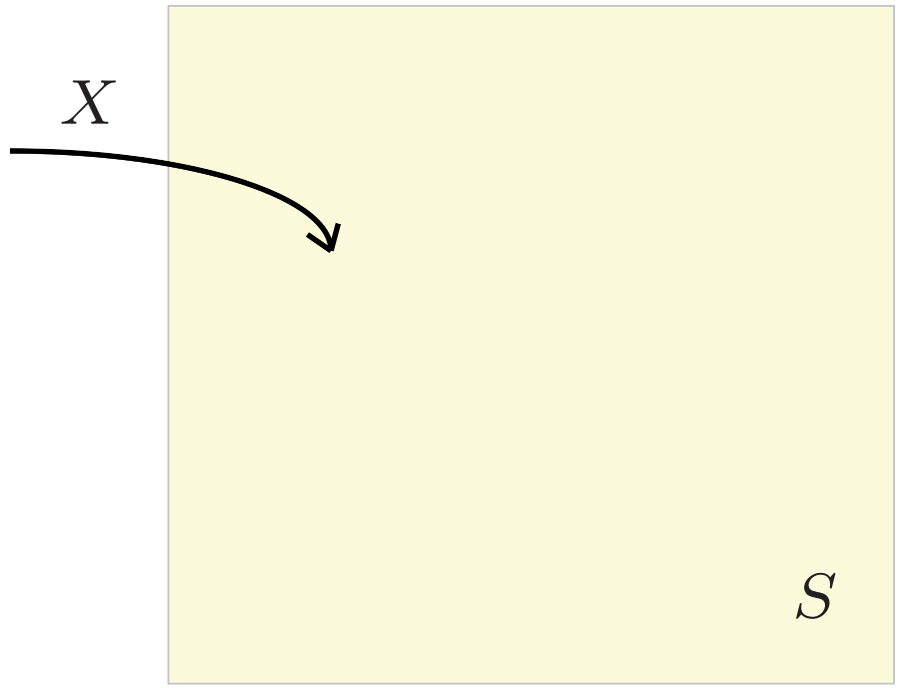
Was heißt “rein zufällige Wahl” eines Punktes?



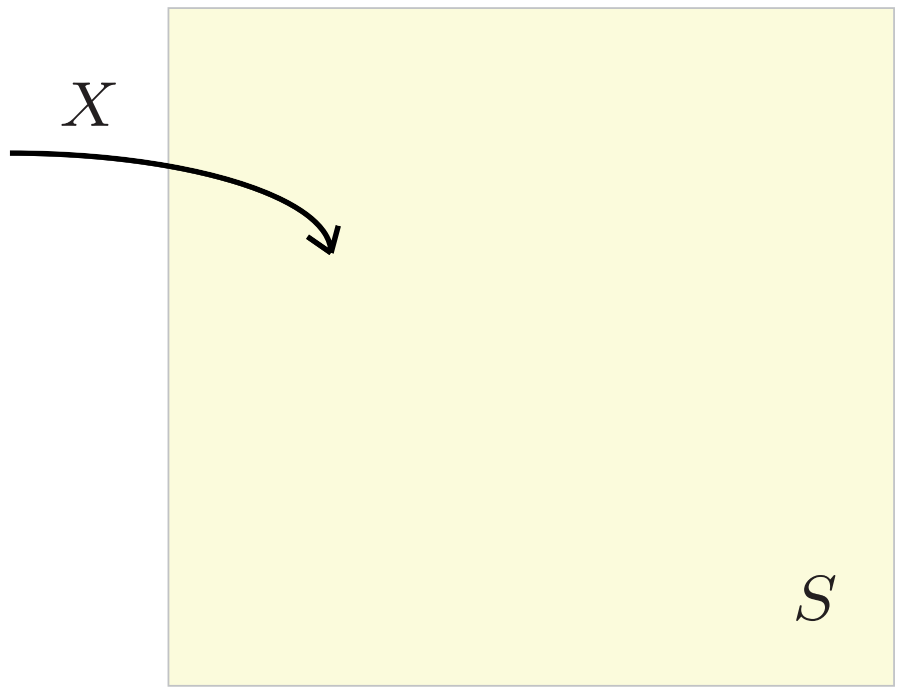
Fürs Erste sind endlich viele Pixel leichter vorstellbar

als ein Kontinuum aus unendlich vielen Punkten.

Stellen wir uns vor, S besteht aus 1000×1000 Pixeln

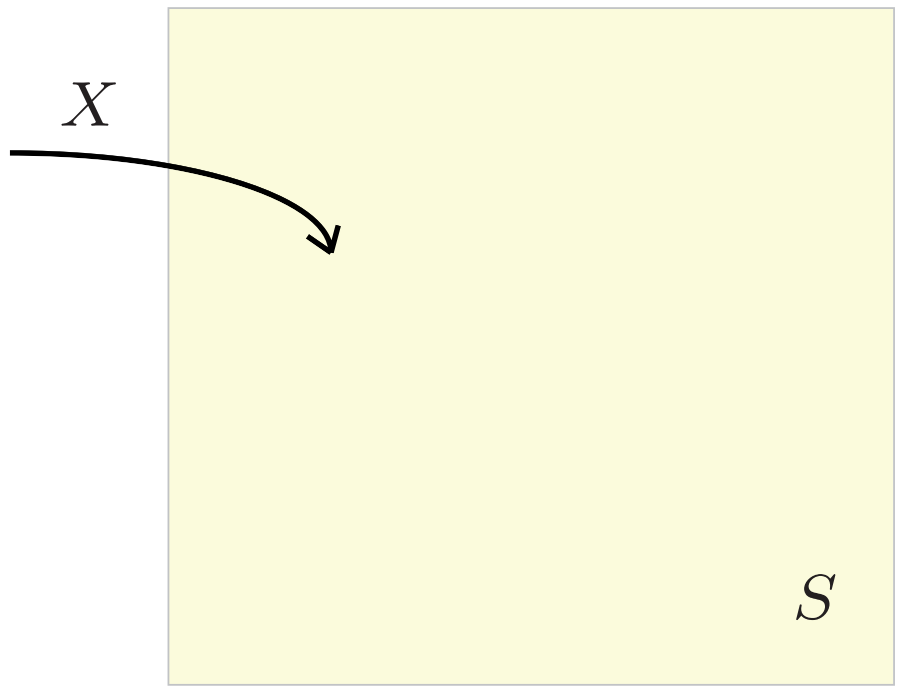


“Rein zufällige Wahl aus S” soll heißen:



alle Pixel in S haben dieselbe Chance,

zum Zug zu kommen.



Man spricht dann von einer

uniform auf S verteilten Zufallsvariablen X

Analogie zum fairen Würfeln:

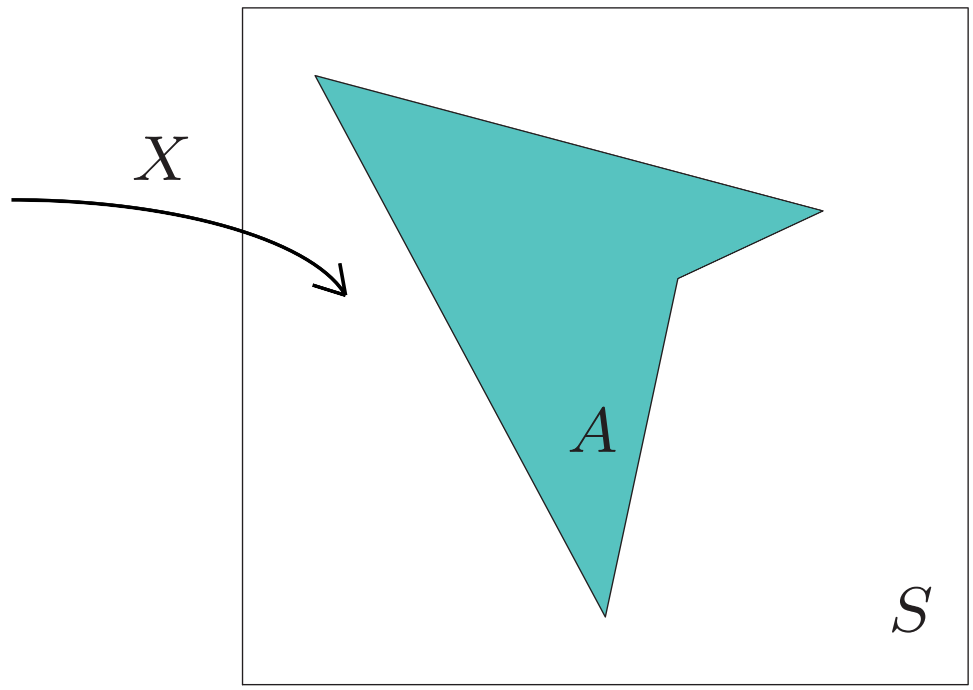
Die Menge der möglichen Ausgänge ist hier

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Auch hier wird der zufällige Ausgang beschrieben durch eine uniform auf S verteilte Zufallsvariable X.

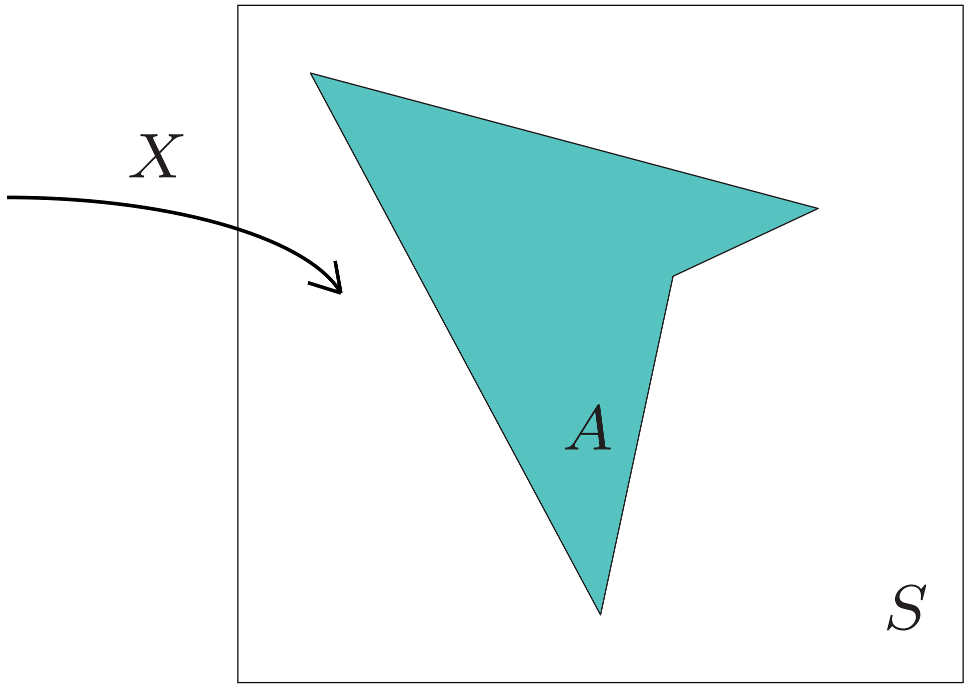
2. Ereignisse

Betrachten wir wieder unser Quadrat S



diesmal zusammen mit einer bestimmten Teilmenge A von S

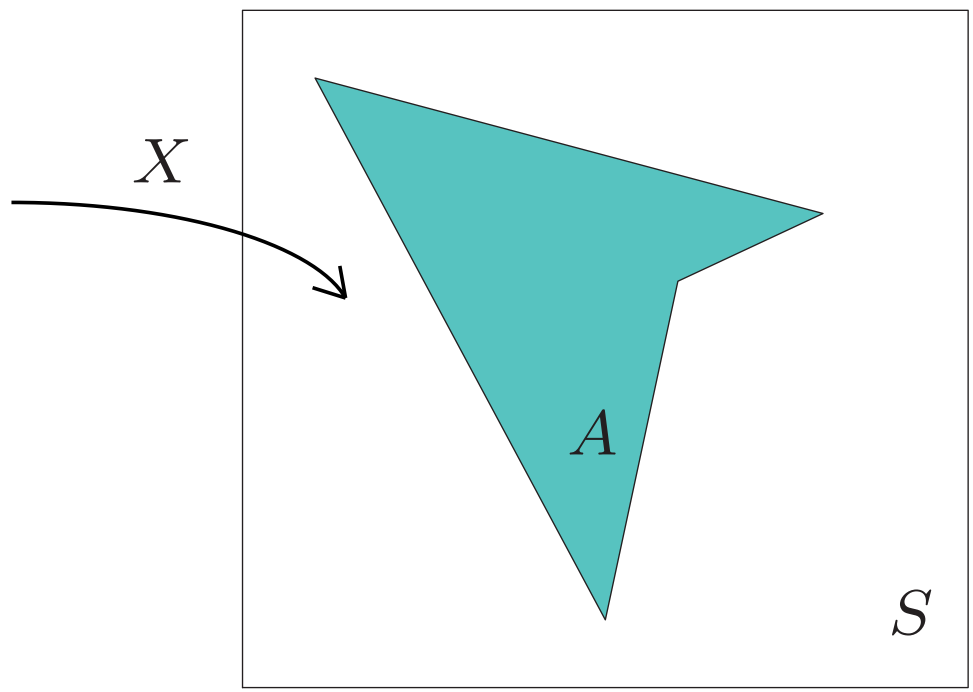
Bei der Wahl eines Pixels aus S



kann die Wahl auf A fallen

– oder auch nicht.

Bei der Wahl eines Pixels aus S



kann das Ereignis "X fällt in A" eintreten

– oder auch nicht.

Das Ereignis “X fällt in A”

notiert man als

$$\{X \in A\}.$$

Die Menge aller Ereignisse $\{X \in A\}$, $A \subset S$,

nennt man auch die

"von X erzeugte Kollektion von Ereignissen".

Ereignisse kann man (aussagen-)logisch verknüpfen, z.B. gilt:

$$\{X \in A\} \text{ und } \{X \in B\} = \{X \in A \cap B\}.$$

Mehr dazu später!

3. Wahrscheinlichkeiten

Wie wahrscheinlich ist es,

dass bei einer rein zufälligen Wahl eines Pixels aus S

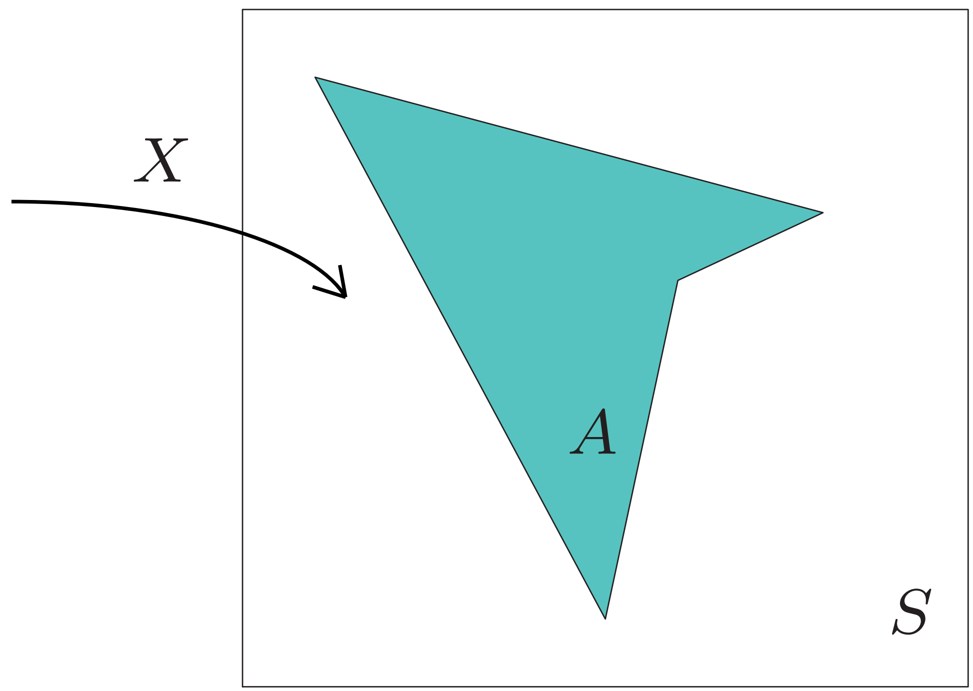
die Wahl auf A fällt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

des Ereignisses $\{X \in A\}$?

Normierung:

Das Ereignis $\{X \in S\}$ hat Wahrscheinlichkeit 1.



Bei der rein zufälligen Wahl eines Pixels aus S,

beschrieben durch die Zufallsvariable X, ist

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X \in A\}$

proportional zur Anzahl der Pixel in A.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X \in A\}$

schreiben wir

$$\mathbf{P}(\{X \in A\})$$

oder kurz

$$\mathbf{P}(X \in A).$$

P steht für **probabilitas** (= Wahrscheinlichkeit)

Zusammengefasst:

X ist *rein zufälliger Pixel aus dem Quadrat* S

bedeutet:

Für jede Teilmenge A von S ist

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\text{Anzahl der Pixel in } A}{\text{Anzahl der Pixel in } S}$$

lies und merke:

die Wahrscheinlichkeit, dass X in A fällt

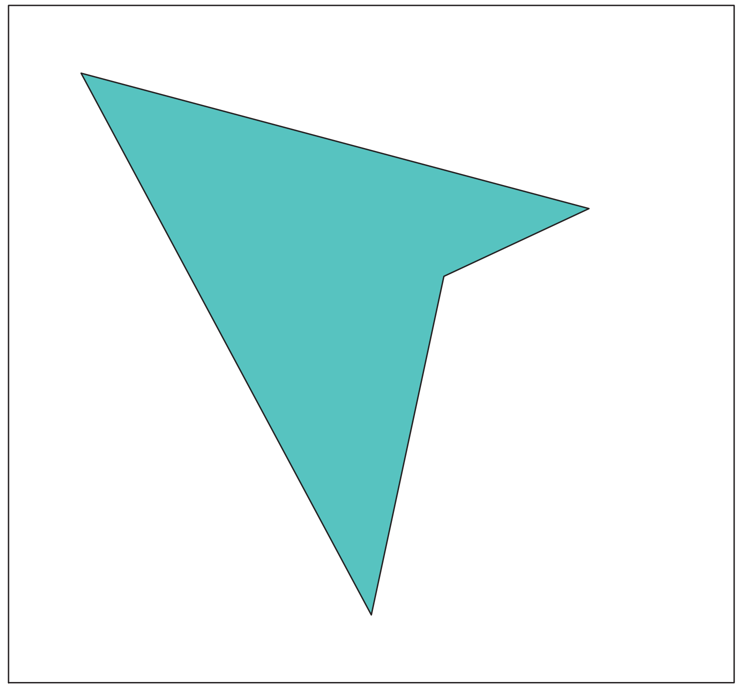
ist der Anteil der Menge A an der Menge S.

4. Schätzung eines Flächenanteils

Eine Anwendung der “rein zufälligen Wahl”:

Monte-Carlo Schätzung eines Flächenanteils.

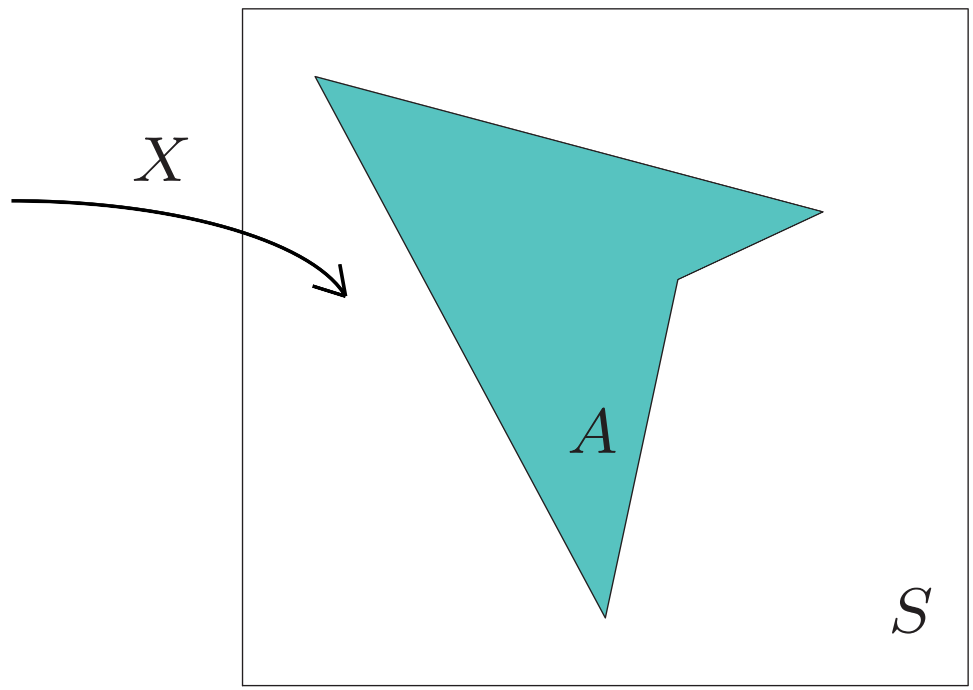
Wir fragen:



Wie groß ist der Anteil der blauen Fläche

an der Fläche des Quadrats?

und übersetzen in die Sprache der Stochastik:



Wie wahrscheinlich ist es, dass die

rein zufällige Wahl eines Pixels aus dem Quadrat

in die blaue Fläche trifft?

Wie wir bald sehen werden

(und wie auch intuitiv klar ist)

gibt es einen engen Zusammenhang zwischen

Wahrscheinlichkeiten und Trefferquoten.

Angenommen wir haben ein Werkzeug, mit dem man einen **rein zufälligen Pixel** aus dem Quadrat wählen kann

– und das nicht nur einmal, sondern “immer wieder neu”.

Wir bekommen dann mit unserem Werkzeug

nicht nur *einen einzigen* rein zufälligen Pixel,

sondern sogar beliebig viele,

genauer:

eine *rein zufällige Folge* $(X_1, X_2, ...)$

von Pixeln in S.

Sei $A \subset S$.

$$Z_i := \mathbf{1}_A(X_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

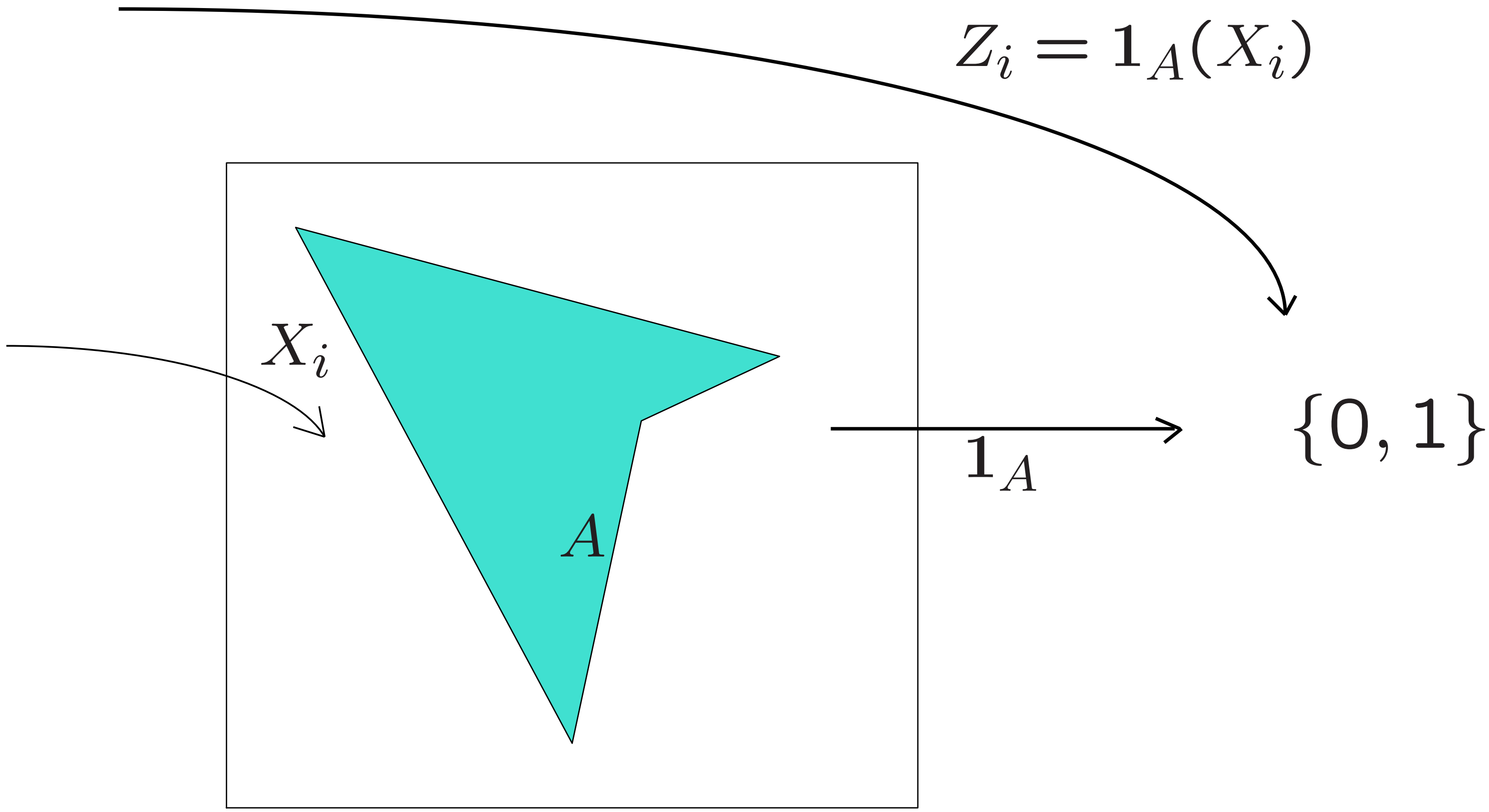
zählt, ob X_i in A fällt.

Dabei ist

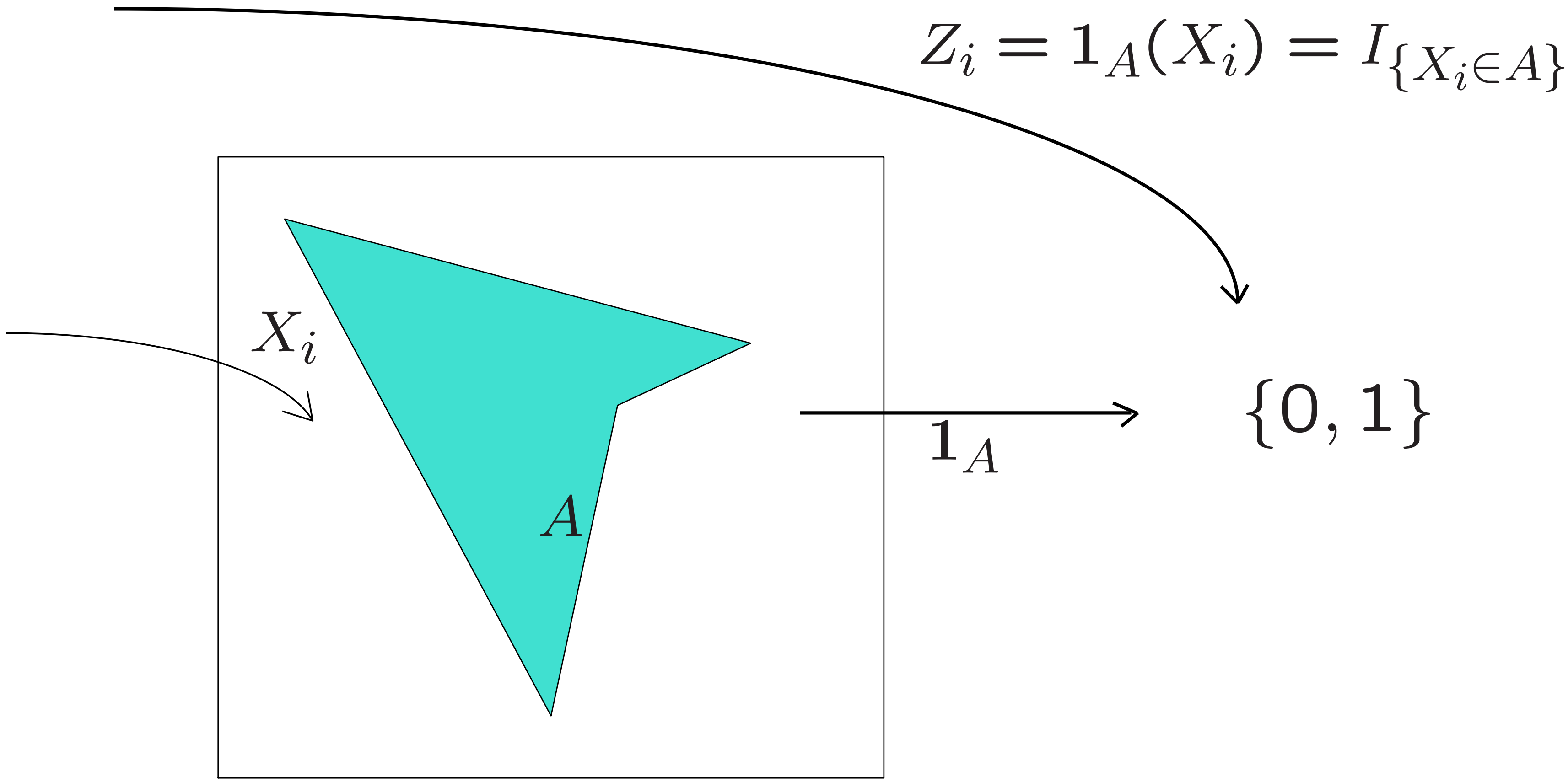
$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in A \\ 0 \text{ für } x \in S \setminus A \end{cases}$$

Z_i ist der *der Indikator* *(“der Zähler”)*

des Ereignisses “X_i fällt in A”.



Eine alternative Schreibweise für $\mathbf{1}_A(X_i)$ ist $I_{\{X_i \in A\}}$



Eine alternative Schreibweise für $\mathbf{1}_A(X_i)$ ist $I_{\{X_i \in A\}}$

5. Die Verteilung der zufälligen Trefferquote

In unserem Beispiel wurden $n = 100$ Punkte

rein zufällig aus dem Quadrat gewählt.

$$Z_i = \mathbf{1}_A(X_i), \ \ i = 1, 2, \ldots$$

Die zufällige Zahl

$$M := \frac{1}{100}(Z_1 + \cdots + Z_{100})$$

(die “Trefferquote”)

ist ein *Schätzer* für die Wahrscheinlichkeit

$$p := \mathbf{P}(X \in A)$$

(und damit für den gefragten Flächenanteil).

Ein Ergebnis ("eine Realisierung") von $(X_1, \ldots, X_{100})$

liefert eine Realisierung von $(Z_1, \ldots, Z_{100})$

und damit eine Realisierung von M

(einen Schätzwert für p).

Wie "zuverlässig" ist dieser Schätzwert?

$$M := \frac{1}{100}(Z_1 + \cdots + Z_{100})$$

Es sei an dieser Stelle verraten:

Der Anteil der blauen Fläche am Quadrat

(den man in der Realität ja nicht kennt) ist in unserem Beispiel

$$p = 0.195$$

Damit hat M gar keine Chance, exakt auf p zu fallen, denn

der *Wertebereich* von M

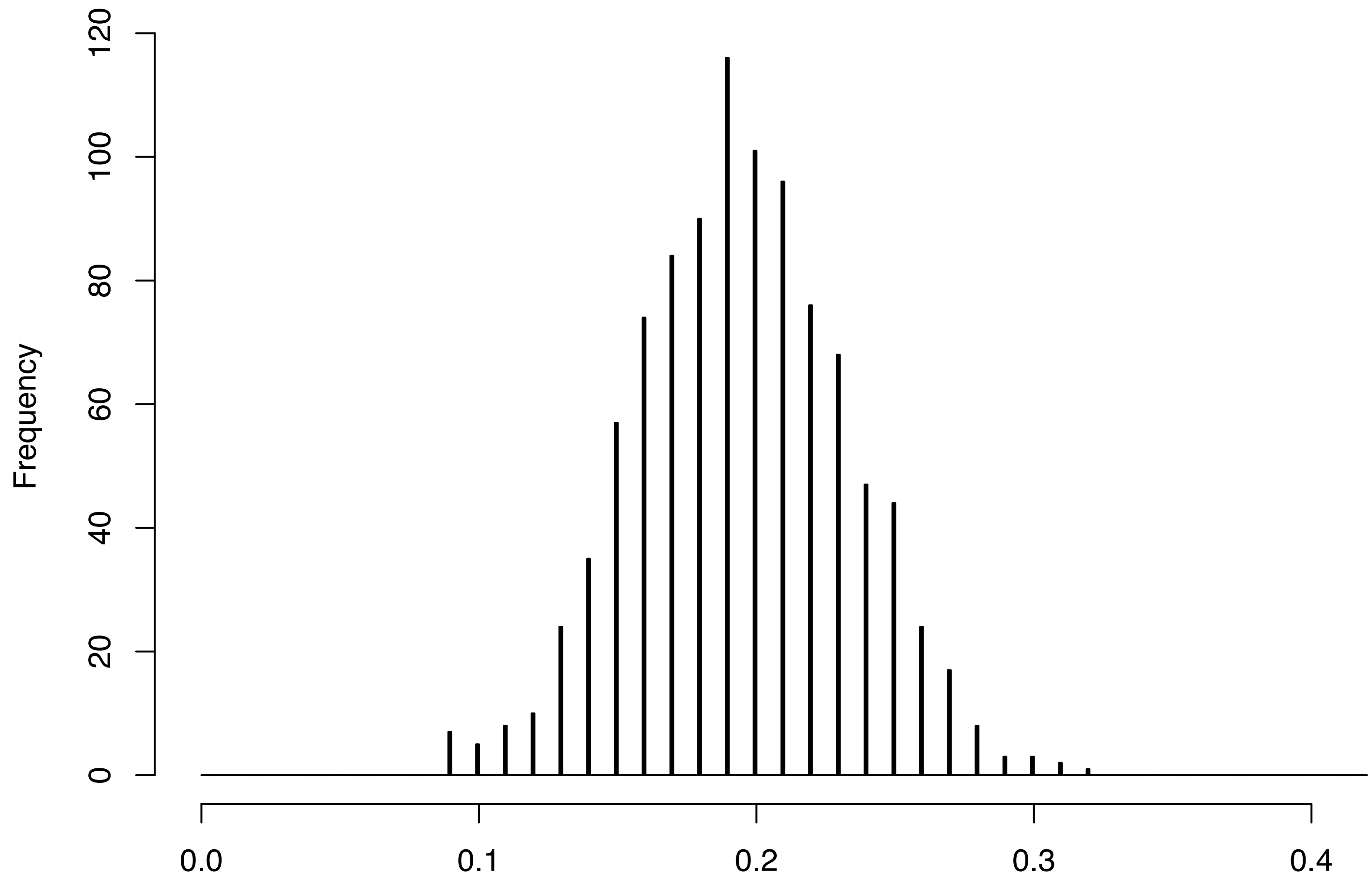
(d.h. die Menge der möglichen Ausgänge) ist

$$S' := \left\{\frac{0}{100}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{100}\right\}$$

Wie zuverlässig ist M als Schätzer für p?

Davon machen wir uns ein Bild, indem wir viele (z.B. 1000) “unabhängige Kopien” von M erzeugten und in einem *Histogramm* darstellen, wie oft welche Ausgänge realisert wurden.

Verteilung von M (Näherung aus 1000 Wiederholungen):



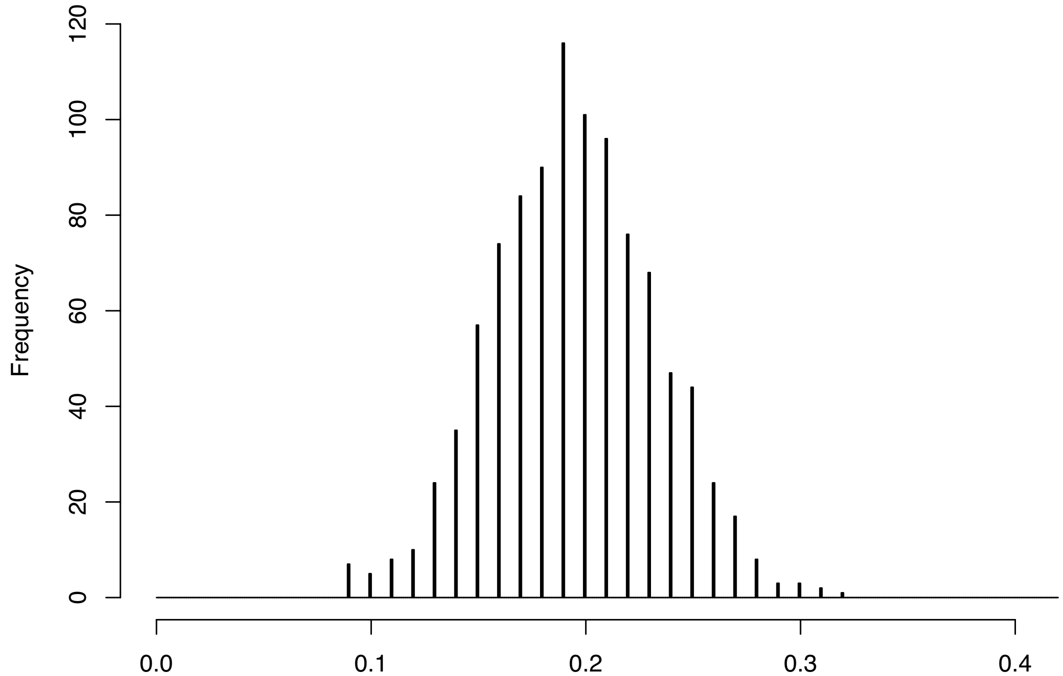
Wie zuverlässig ist M als Schätzer für p?
Davon machen wir uns ein Bild, indem wir viele (z.B. 1000) "unabhängige Kopien" von M erzeugten und in einem *Histogramm* darstellen, wie oft welche Ausgänge realisert wurden.

So bekommen wir eine näherungsweise Darstellung der Verteilung von M.

Die Verteilung von M ist bestimmt durch ihre Gewichte

$$\rho(b) := \mathbf{P}(M = b), \quad b \in S'.$$

Verteilung von M (Näherung aus 1000 Wiederholungen):



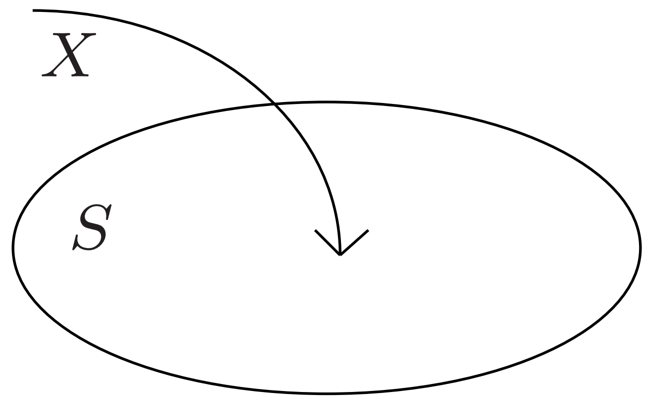
Die 101 möglichen Ausgänge von M

sind (bei weitem) nicht gleich wahrscheinlich:

die Verteilung von M “ist um p konzentriert”.

6. Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der ersten Stunde

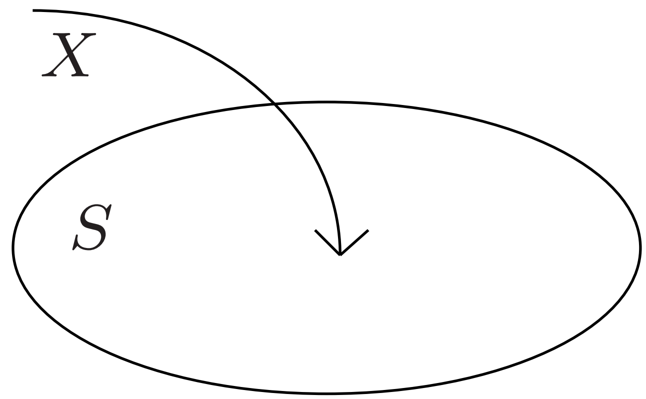
Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X . . . zufällige Wahl eines Elements aus S

S . . . Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:

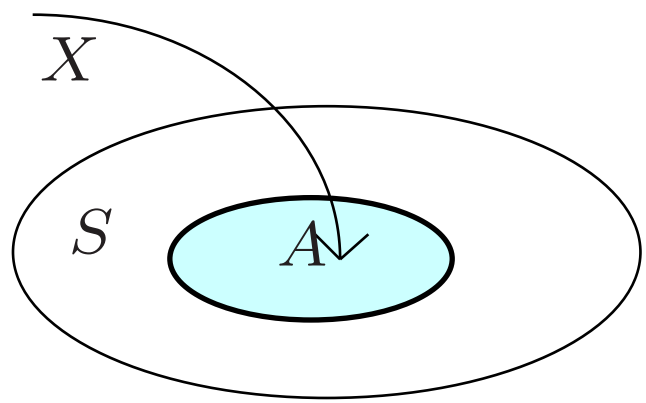


X ... **Zufallsvariable**

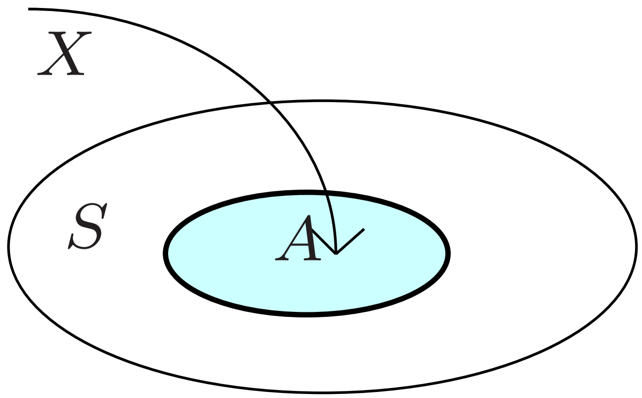
mit *Zielbereich (Wertebereich)* S

Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “X fällt in A”



Dabei ist A eine bestimmte Teilmenge von S.



Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

"X fällt in A".

“X ist *rein zufällig*”

heißt im Fall einer *endlichen* Menge S:

alle Elemente von S haben die gleiche W’keit

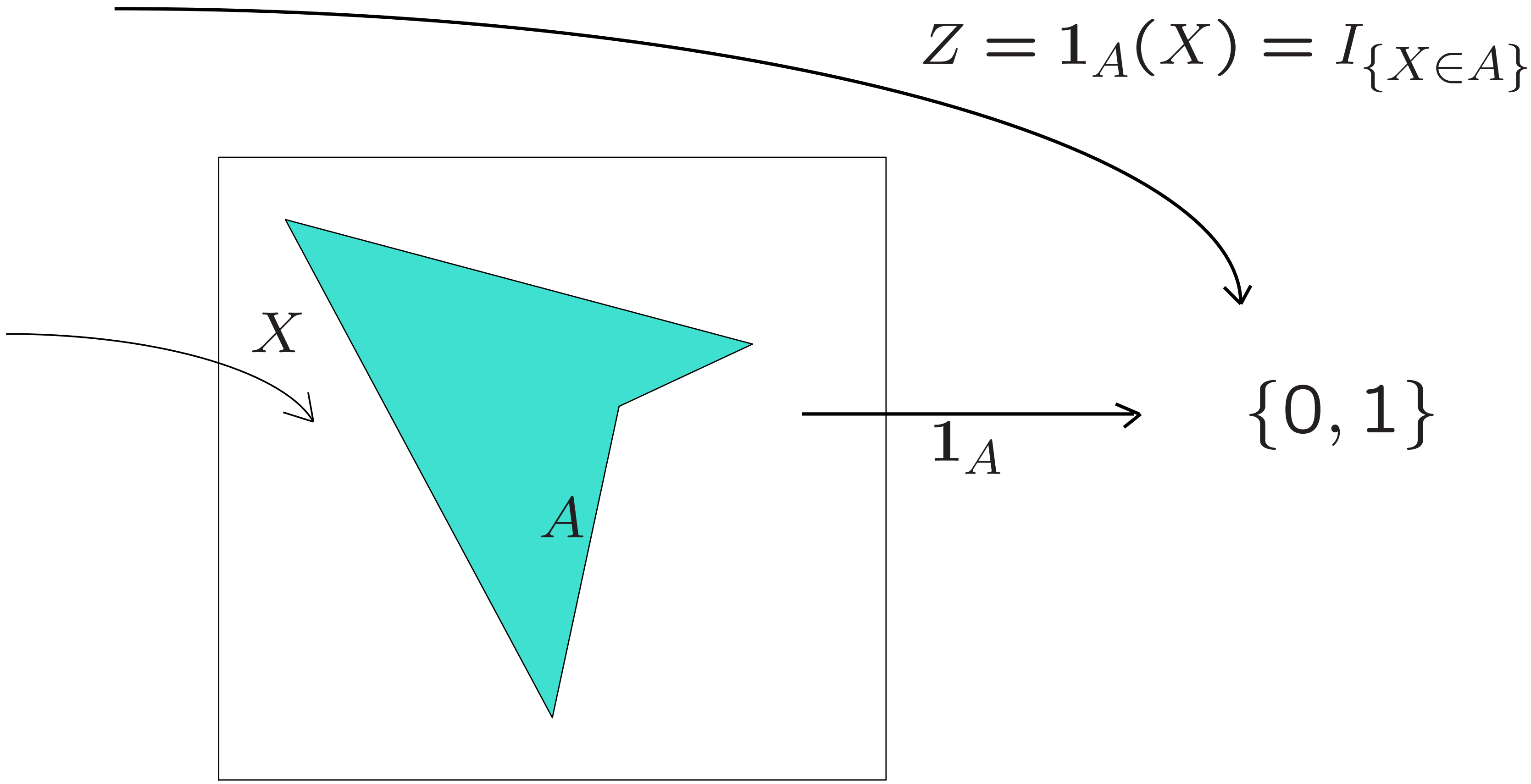
gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “X fällt in A”:

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ scheiben wir kurz:

$$\mathbf{P}(X \in A).$$



Die Ereignisse $\{X \in A\}$ und $\{Z = 1\}$ stimmen überein!

Ein Ausblick ins Kontinuum:

“X ist *rein zufällige Wahl aus S* ”

heißt im Fall einer **kontinuierlichen** Menge $S \subset \mathbb{R}^d$:

jede (messbare) Teilmenge A von S

kommt mit einer W’kt zum Zug,

die dem relativen Anteil ihres Volumens

am Volumen von S entspricht:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\text{Volumen von } A}{\text{Volumen von } S}$$