

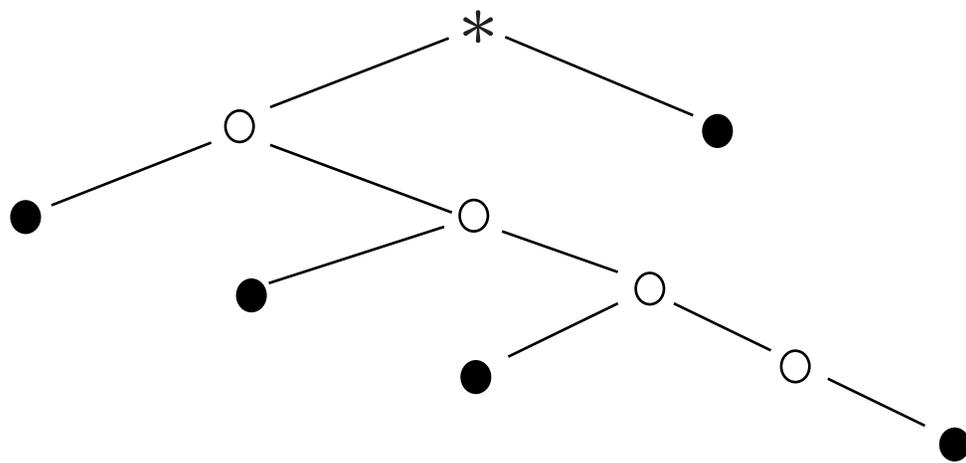
Vorlesung 15a

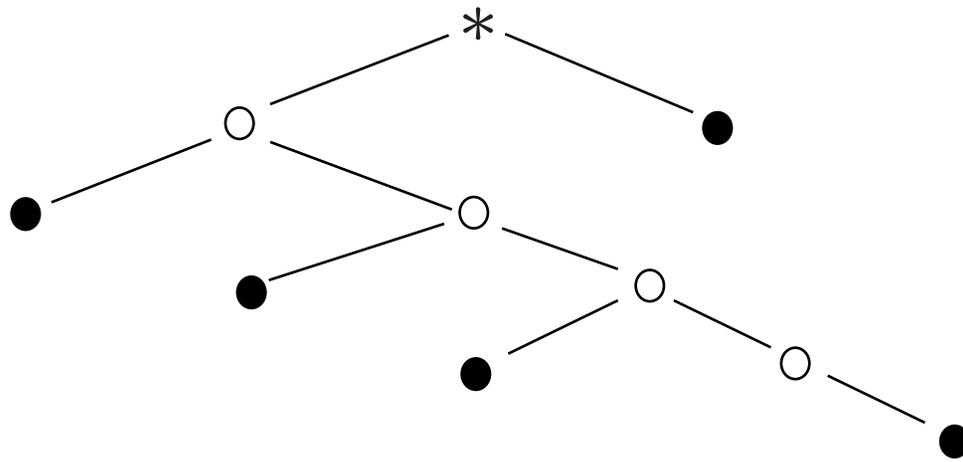
Quellencodieren und Entropie

1. Volle Binärbäume
als gerichtete Graphen

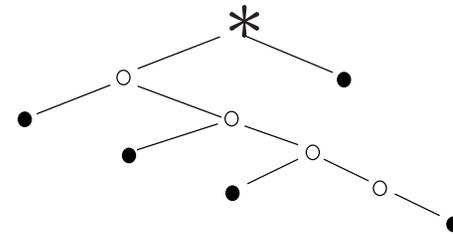
und

die gewöhnliche Irrfahrt
von der Wurzel zu den Blättern





ein (nicht voller) Binärbaum



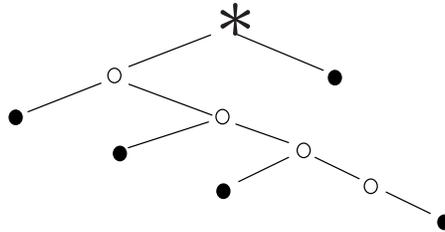
Merkmale eines Binärbaumes:

Ein Knoten ist ausgezeichnet als *Wurzel*.

Jeder Knoten (außer der Wurzel) hat genau einen Vorgänger.

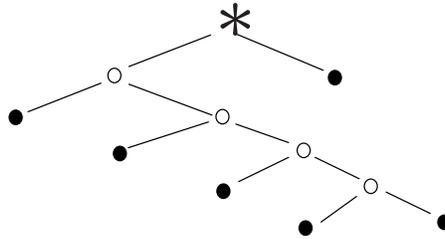
Jeder Knoten hat zwei, einen oder keinen Nachfolger.

Die Knoten ohne Nachfolger heißen *Blätter*,
die mit Nachfolger heißen *innere Knoten*.



Wir sprechen von einem *vollen Binärbaum*,
wenn jeder innere Knoten zwei Nachfolger hat.

Jeder Binärbaum lässt sich “auf minimale Weise”
zu einem vollen Binärbaum ergänzen.



Wir sprechen von einem *vollen Binärbaum*,
wenn jeder innere Knoten zwei Nachfolger hat.

Jeder Binärbaum lässt sich “auf minimale Weise”
zu einem vollen Binärbaum ergänzen.

Sei T ein Binärbaum.

Die gewöhnliche Irrfahrt auf T

- macht von jedem inneren Knoten einen Schritt zu einem zufällig gewählten seiner (ein oder zwei) Nachfolger

Sei T ein Binärbaum.

Die gewöhnliche Irrfahrt auf T

- macht von jedem inneren Knoten einen Schritt zu einem zufällig gewählten seiner (ein oder zwei) Nachfolger

- und endet in einem der Blätter.

Sei T ein Binärbaum.

Die gewöhnliche Irrfahrt auf T

- macht von jedem inneren Knoten einen Schritt zu einem zufällig gewählten seiner (ein oder zwei) Nachfolger

- und endet in einem der Blätter.

Wenn nicht anderes vermerkt, nehmen wir immer an,
dass die Irrfahrt in der Wurzel startet.

Sei T ein voller Binärbaum auf T
und Y die gewöhnliche Irrfahrt auf T

Dann gilt für jedes Blatt b von T mit Tiefe $\ell(b)$:

$$\mathbf{P}(Y \text{ endet in } b) = 2^{-\ell(b)}$$

Sei T ein voller Binärbaum auf T
und Y die gewöhnliche Irrfahrt auf T

Dann gilt für jedes Blatt b von T mit Tiefe $\ell(b)$:

$$\mathbf{P}(Y \text{ endet in } b) = 2^{-\ell(b)}$$

(denn auf dem Weg von der Wurzel zu b muss $\ell(b)$ -mal
das “richtige” Münzwurfergebnis kommen)

Folgerung:

Für jeden vollen Binärbaum T mit Blattmenge B gilt:

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} = 1.$$

Folgerung:

Für jeden vollen Binärbaum T mit Blattmenge B gilt:

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} = 1.$$

Ist T nicht voll, dann gilt die entsprechende Gleichheit für jede "Vervollständigung" T' von T .

Folgerung:

Für jeden vollen Binärbaum T mit Blattmenge B gilt:

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} = 1.$$

Ist T nicht voll, dann gilt die entsprechende Gleichheit für jede “Vervollständigung” T' von T .

T' hat dann mehr Blätter als T ,

also ist dann

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} < 1.$$

Dies fassen wir zusammen in der

Bemerkung:

Für jeden Binärbaum T
mit Blattmenge B und Blatttiefen $\ell(b)$ gilt:

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} \leq 1,$$

mit Gleichheit genau dann wenn T voll ist.

Wir fragen:

Welche Bedingung an natürliche Zahlen t_1, \dots, t_m
ist notwendig und hinreichend dafür,
dass diese Zahlen
als Blatttiefen eines binären Baumes auftreten?

Die Antwort gibt die

Fano-Kraft Ungleichung für binäre Bäume:

t_1, \dots, t_m seien natürliche Zahlen.

Genau dann gibt es einen binären Baum T ,
für den die t_1, \dots, t_m die Tiefen seiner Blätter sind,
wenn gilt:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m 2^{-t_i} \leq 1.$$

Beweis:

“ \implies ” siehe die [Bemerkung](#) auf Folie 11.

“ \impliedby ”: mit Induktion: Für $m = 1$ ist die Behauptung klar.

Schritt vom m zu $m + 1$:

Seien $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m+1}$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^{-t_i} \leq 1. \text{ Dann gilt}$$

$$\sum_{i=1}^m 2^{-t_i} < 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es
einen Binärbaum T_m mit Blattiefen t_1, \dots, t_m .
Nach der Bemerkung auf Folie 11 ist T_m nicht voll,
besitzt also einen inneren Knoten (in Tiefe $< t_m$)
mit nur einem Nachfolger.

Zu diesem Knoten fügen wir einen zweiten Nachfolger hinzu
und setzen (falls $t_{m+1} > t_m$) seine “Nachkommenslinie” fort,
bis wir bei der Tiefe t_{m+1} angekommen sind.

Damit ist ein Binärbaum mit den Blattiefen t_1, \dots, t_{m+1}
konstruiert. \square

Die Ungleichung von Fano und Kraft, formuliert für das bijektive Beschriften der Blattmenge eines Binärbaums:

S sei eine endliche oder abzählbar unendliche Menge
und $t(a)$, $a \in S$, seien natürliche Zahlen.

Genau dann gibt es einen binären Baum, dessen Blätter
bijektiv mit den Elementen $a \in S$ beschriftet sind

und Tiefen $t(a)$ haben,

wenn $\sum_{a \in S} 2^{-t(a)} \leq 1$ gilt.

Die Ungleichung von Fano und Kraft, formuliert für das bijektive Beschriften der Blattmenge eines Binärbaums:

S sei eine endliche oder abzählbar unendliche Menge
und $t(a)$, $a \in S$, seien natürliche Zahlen.

Genau dann gibt es einen binären Baum, dessen Blätter
bijektiv mit den Elementen $a \in S$ beschriftet sind
und Tiefen $t(a)$ haben,

wenn $\sum_{a \in S} 2^{-t(a)} \leq 1$ gilt.

Die Aussage folgt sofort mit dem vorher gegebenen Induktionsargument,
wenn man die $t(a)$ der Größe nach absteigend ordnet.

2. Binäre Präfixcodes als Blattbeschriftungen von binären Bäumen

S sei eine endliche (oder abzählbar unendliche) Menge
(ein “Alphabet”).

Die Elemente von S nennen wir *Buchstaben*.

S sei eine endliche (oder abzählbar unendliche) Menge
(ein “Alphabet”).

Die Elemente von S nennen wir *Buchstaben*.

Wir wollen die Buchstaben a, a', \dots durch
01-Folgen $k(a), k(a'), \dots$ codieren.

S sei eine endliche (oder abzählbar unendliche) Menge
(ein “Alphabet”).

Die Elemente von S nennen wir *Buchstaben*.

Wir wollen die Buchstaben a, a', \dots durch
01-Folgen $k(a), k(a'), \dots$ codieren.

Dabei soll so etwas wie

$$k(a) = 001, k(a') = 00101$$

ausgeschlossen sein.

Definition:

Eine Abbildung

$$k : S \rightarrow \bigcup_{t \geq 1} \{0, 1\}^t$$

heißt **(binärer) Präfixcode**,

wenn kein $k(a)$ Anfangsstück irgendeines $k(a')$, $a \neq a'$, ist.

Definition:

Eine Abbildung

$$k : S \rightarrow \bigcup_{t \geq 1} \{0, 1\}^t$$

heißt **(binärer) Präfixcode**,

wenn kein $k(a)$ Anfangsstück irgendeines $k(a')$, $a \neq a'$, ist.

Ist $k(a) = k_1(a) \dots k_t(a)$, dann nennt man

$$\ell(a) := t$$

die *Länge* (oder auch die Anzahl der Bits)

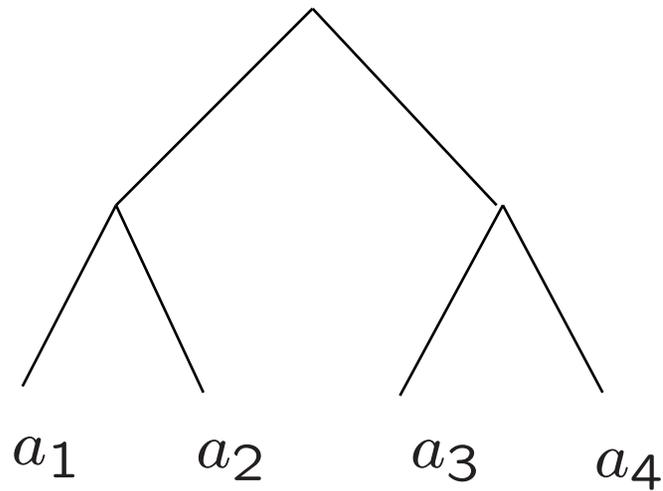
des *Codeworts* $k(a)$.

Binäre Präfixcodes kann man sich auch als
(planare (d.h. “in die Ebene gezeichnete”))
Binärbäume vorstellen,

deren Blätter bijektiv
mit den Buchstaben des Alphabets beschriftet sind.

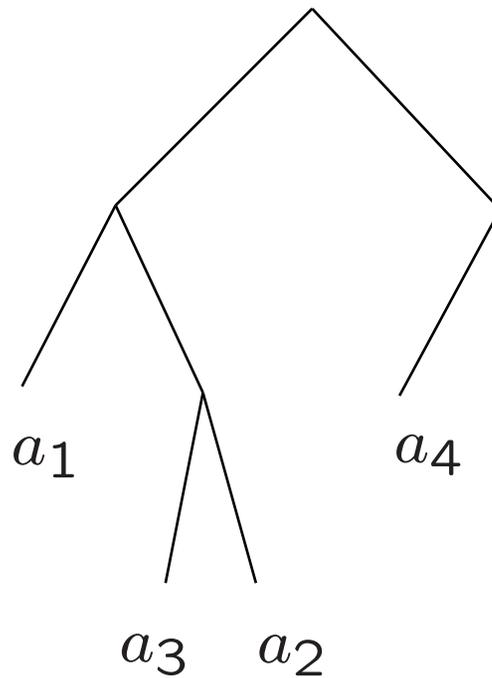
Beispiel: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$k(a_1) := 00$, $k(a_2) := 01$, $k(a_3) := 10$, $k(a_4) := 11$.



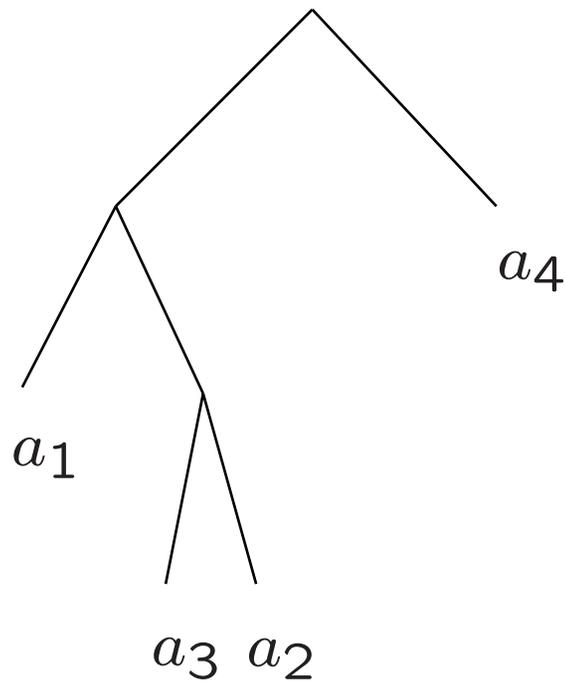
Beispiel: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$k(a_1) := 00$, $k(a_2) := 011$, $k(a_3) := 010$, $k(a_4) := 10$.



Beispiel: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$k(a_1) := 00$, $k(a_2) := 011$, $k(a_3) := 010$, $k(a_4) := 1$.



Regeln für die Beschriftung der Knoten mit 01-Wörtern:

Die Wurzel trägt das Wort der Länge 0 (das "leere Wort").

Regeln für die Beschriftung der Knoten mit 01-Wörtern:

Die Wurzel trägt das Wort der Länge 0 (das “leere Wort”).

Das Wort an einem Knoten (außer der Wurzel)
setzt das Wort am Vorgängerknoten um ein Bit fort
(die Wörter in der Tiefe t haben somit die Länge t).

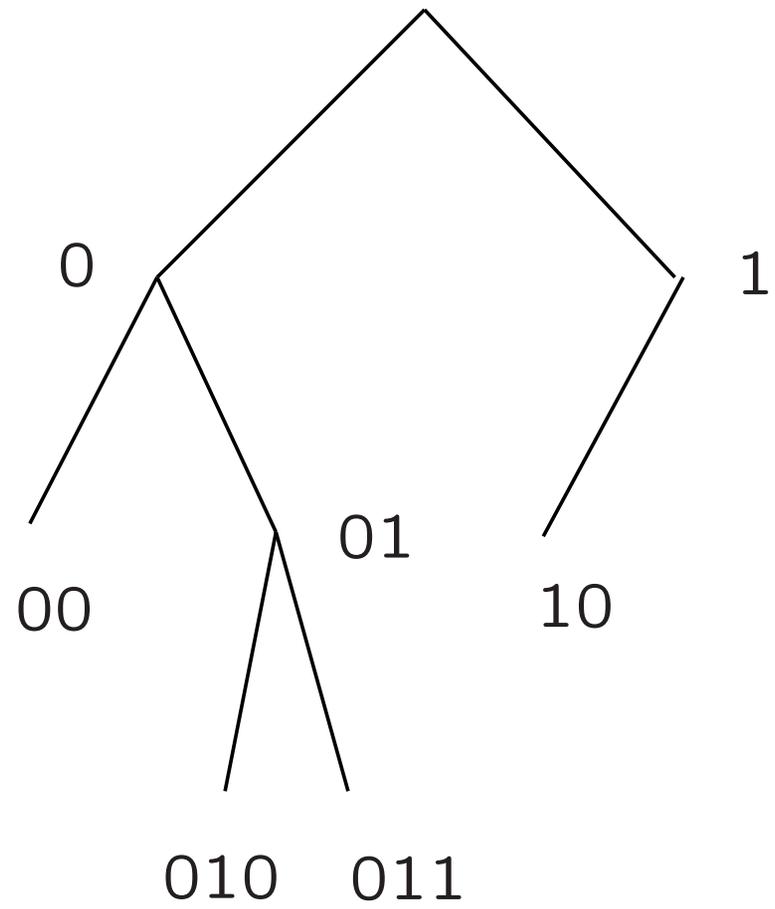
Regeln für die Beschriftung der Knoten mit 01-Wörtern:

Die Wurzel trägt das Wort der Länge 0 (das "leere Wort").

Das Wort an einem Knoten (außer der Wurzel)
setzt das Wort am Vorgängerknoten um ein Bit fort
(die Wörter in der Tiefe t haben somit die Länge t).

Verschiedene Knoten tragen verschiedene Wörter.

Beispiel:



Wir formulieren die (bereits oben bewiesenen)
zwei Aussagen um die Fano-Kraft-Ungleichung
jetzt noch einmal für binäre Präfixcodes:

Die Fano-Kraft-Ungleichung für binäre Prefixcodes:

(Teil 1) Für jeden binären Prefixcode k gilt:

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1 .$$

Die Fano-Kraft-Ungleichung für binäre Prefixcodes:

(Teil 1) Für jeden binären Prefixcode k gilt:

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1 .$$

“Je mehr Buchstaben man codieren will,
um so länger müssen die Codewörter sein.”

Die Fano-Kraft-Ungleichung für binäre Prefixcodes:

(Teil 1) Für jeden binären Prefixcode k gilt:

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1 .$$

“Je mehr Buchstaben man codieren will,
um so länger müssen die Codewörter sein.”

(Teil 2) Ist $\ell : S \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1$,

dann gibt es einen binären Prefixcode,

für den $\ell(a)$ die Länge von $k(a)$ ist für alle $a \in S$.

Die Fano-Kraft-Ungleichung für binäre Präfixcodes:

(Teil 1) Für jeden binären Präfixcode k gilt:

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1 .$$

“Je mehr Buchstaben man codieren will,
um so länger müssen die Codewörter sein.”

(Teil 2) Ist $\ell : S \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1$,

dann gibt es einen binären Präfixcode,

für den $\ell(a)$ die Länge von $k(a)$ ist für alle $a \in S$.

“Jede nicht allzu kurzwertige Abbildung ℓ tritt als
Codewortlängenabbildung auf.”

3. Sparsames Codieren zufälliger Buchstaben.

Sei X eine S -wertige Zufallsvariable
(ein “zufälliger Buchstabe”)
mit Verteilungsgewichten $\rho(a) = \mathbf{P}(X = a)$.

Sei X eine S -wertige Zufallsvariable
(ein “zufälliger Buchstabe”)
mit Verteilungsgewichten $\rho(a) = \mathbf{P}(X = a)$.

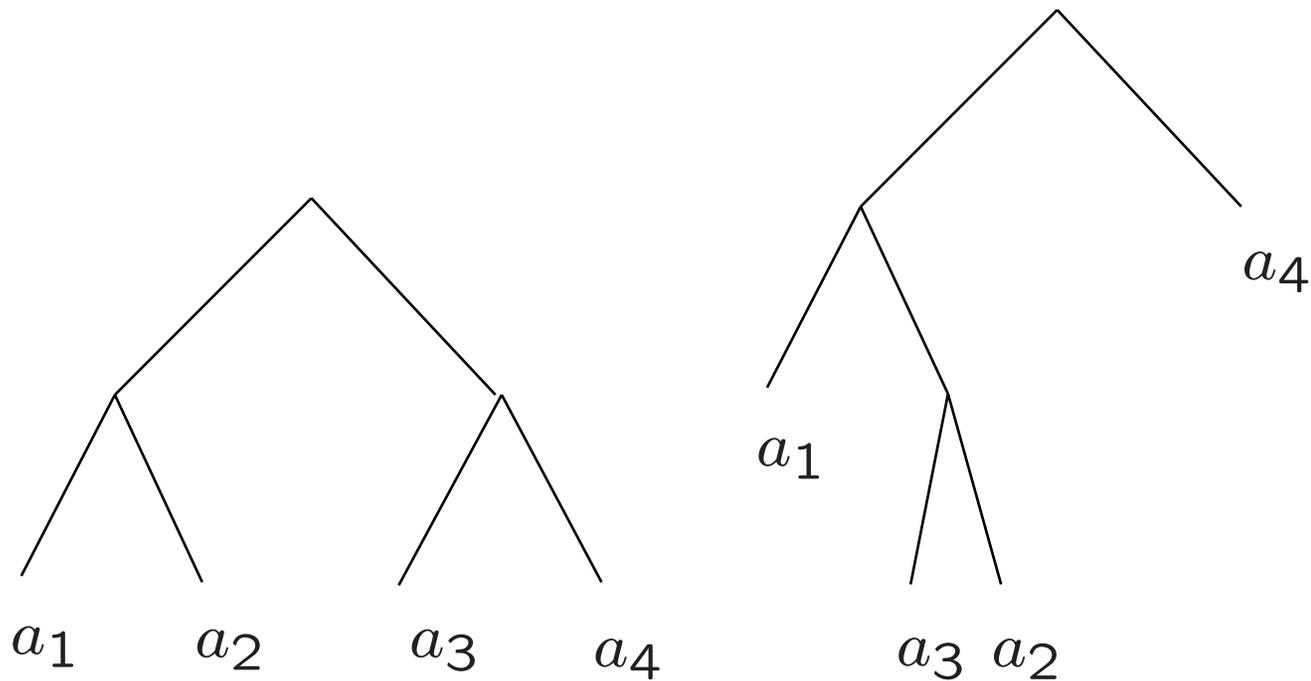
Gefragt ist nach einem binären Präfixcode,
dessen erwartete Codelänge

$$\mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a \in S} \ell(a) \rho(a)$$

möglichst klein ist.

Beispiel: Beispiel: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Sind die vier Ausgänge gleich wahrscheinlich,
dann ist der Code links günstiger als der rechts.



Für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist glaubhaft

(und in der Tat auch eine Folgerung des in Abschnitt 4. formulierten und bewiesenen Quellencodierungssatzes):

Gilt $\#S = 2^t$ mit $\rho(a) = 2^{-t}$, $a \in S$,
dann ist es am besten, alle 2^t Buchstaben
mit den 01-Folgen der Länge t zu codieren.

Für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist glaubhaft

(und in der Tat auch eine Folgerung des in Abschnitt 4. formulierten und bewiesenen Quellencodierungssatzes):

Gilt $\#S = 2^t$ mit $\rho(a) = 2^{-t}$, $a \in S$,
dann ist es am besten, alle 2^t Buchstaben
mit den 01-Folgen der Länge t zu codieren.

In diesem Fall gilt

$$\ell(a) = t = -\log_2 \rho(a) \quad \text{für alle } a \in S.$$

4. Shannon-Codes und der Quellencodierungssatz

Gegeben seien

eine (endliche oder abzählbar unendliche) Menge S
und Verteilungsgewichte $\rho(a)$ auf S .

Wir denken uns

eine S -wertige Zufallsvariable X mit Verteilung ρ .

Ein *Shannon-Code* für (S, ρ) ist ein Präfixcode, bei dem jeder Buchstabe $a \in S$ mit einer 01-Folge codiert wird, deren Länge $\ell(a)$ durch Aufrunden von $-\log_2 \rho(a)$ auf die nächste ganze Zahl entsteht, also

$$-\log_2 \rho(a) \leq \ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1 .$$

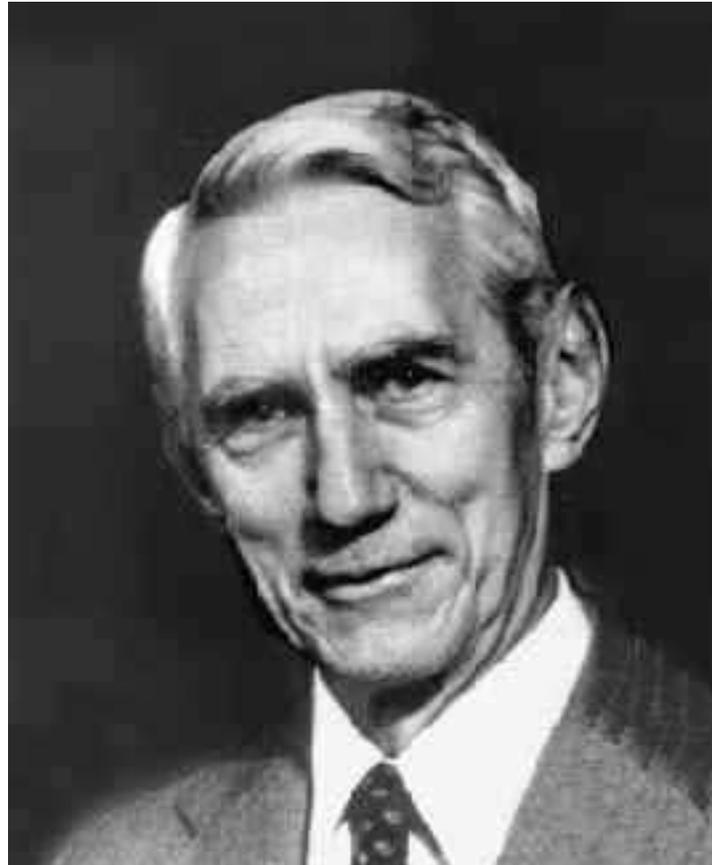
Ein *Shannon-Code* für (S, ρ) ist ein Präfixcode, bei dem jeder Buchstabe $a \in S$ mit einer 01-Folge codiert wird, deren Länge $\ell(a)$ durch Aufrunden von $-\log_2 \rho(a)$ auf die nächste ganze Zahl entsteht, also

$$-\log_2 \rho(a) \leq \ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1 .$$

Solche Codes gibt es immer,
denn für die so festgelegten $\ell(a)$ folgt

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq \sum_{a \in S} \rho(a) = 1 ,$$

die Fano-Kraft Bedingung ist also erfüllt.



Claude Shannon
1916 - 2001

Wir werden zeigen:

Shannon-Codes

verfehlen die minimal mögliche erwartete Codelänge
um höchstens ein Bit.

Wir werden zeigen:

Shannon-Codes

verfehlen die minimal mögliche erwartete Codelänge
um höchstens ein Bit.

Sei dazu

$$\mathbf{H}_2[X] := - \sum_{a \in S} \rho(a) \log_2 \rho(a),$$

mit $0 \log 0 := 0$.

Satz
(Quellencodierungssatz von Shannon)

a) Für jeden binären Präfixcode gilt

$$\mathbf{E}[\ell(X)] \geq \mathbf{H}_2[X].$$

Satz
(Quellencodierungssatz von Shannon)

a) Für jeden binären Präfixcode gilt

$$\mathbf{E}[\ell(X)] \geq \mathbf{H}_2[X].$$

b) Für binäre Shannon-Codes gilt außerdem

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

und folglich

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \sum_a \rho(a)(-\log_2 \rho(a) + 1) \quad .$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

und folglich

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \sum_a \rho(a)(-\log_2 \rho(a) + 1) = \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

und folglich

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \sum_a \rho(a)(-\log_2 \rho(a) + 1) = \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

und folglich

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \sum_a \rho(a)(-\log_2 \rho(a) + 1) = \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Dies beweist erst einmal Teil b) des Satzes.

Jetzt zu Teil a):

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \leq c \cdot (x - 1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \leq c \cdot (x - 1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] \leq c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \left(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1 \right)$$

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \leq c \cdot (x - 1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] &\leq c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \left(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1 \right) \\ &\leq c \cdot \left(\sum_a 2^{-\ell(a)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \leq c \cdot (x - 1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] &\leq c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \left(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1 \right) \\ &\leq c \cdot \left(\sum_a 2^{-\ell(a)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nach Fano-Kraft ist die rechte Seite ≤ 0 , also

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)}$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \leq c \cdot (x - 1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] &\leq c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \left(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1 \right) \\ &\leq c \cdot \left(\sum_a 2^{-\ell(a)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nach Fano-Kraft ist die rechte Seite ≤ 0 , also

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] \leq 0. \quad \square$$

5. Die Entropie

Die im Quellencodierungssatz auftretende Größe

$$\mathbf{H}_2[X] := - \sum_{a \in S} \rho(a) \log_2 \rho(a)$$

heißt die **Entropie** von X (zur Basis 2).

Die Entropie ist *der* fundamentale Begriff
der Informationstheorie.

Die Entropie ist *der* fundamentale Begriff
der Informationstheorie.

Nach dem Quellenkodierungssatz gibt die Entropie
fast genau die mittlere Anzahl von Ja-Nein Fragen an,
die notwendig und

- bei guter Wahl des Codes - auch hinreichend ist,
um den unbekanntes Wert von X von jemandem zu erfragen,
der X beobachten kann.

Die Entropie ist *der* fundamentale Begriff
der Informationstheorie.

Nach dem Quellenkodierungssatz gibt die Entropie
fast genau die mittlere Anzahl von Ja-Nein Fragen an,
die notwendig und

- bei guter Wahl des Codes - auch hinreichend ist,
um den unbekanntem Wert von X von jemandem zu erfragen,
der X beobachten kann.

Dies ist gemeint, wenn man die Entropie beschreibt als den
Grad von Unbestimmtheit oder Ungewissheit
über den Wert, den X annimmt.