Vorlesung 14b

Eine Klausur aus dem Vorjahr

mit Besprechung der Lösungen an der Tafel

1. Berechnen Sie beim fairen Münzwurf die erwartete Anzahl von Würfen, bis erstmals das Muster `0101` erscheint.*

(Beispielsweise ist bei der Realisierung `00101` *diese Anzahl gleich 5.)*

Finden Sie dafür zuerst einen passenden Graphen.

*Lösung: 20

2. a) Es sei K eine Binomial $(20,\frac{1}{2})$-verteilte Zufallsvariable.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
$\{|\,K - \mathbf{E}[K]\,| \geq 8\}$.

b) Wir betrachten eine auf $[0, \infty)$ definierte, strikt positive Dichtefunktion f. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{20}$ seien unahängig und haben Dichte $f(a)\, da$, $a \geq 0$.

Es wurde folgendes Ergebnis berichtet: “Zwei der X_i sind kleiner ausgefallen als 4, und die restlichen 18 größer als 4”.

i) Wie wahrscheinlich ist unter der Annahme

$$(H_0) \qquad \int_0^4 f(a)\, da = \frac{1}{2}$$

ein so “extremes” Ergebnis wie das berichtete? *(Man beachte: Unter der Annahme (H_0) wäre das Ergebnis “Zwei der X_i sind größer ausgefallen als 4, und die restlichen 18 kleiner als 4” ebenso “extrem” wie das oben berichtete.)*

ii) *Im Jargon der Statistik (und mit unserer Annahme an f) bedeutet (H_0), dass die Zahl* 4 der Median *der Verteilung mit Dichte $f(a)\,da$ ist.* Zu welchem p-Wert können Sie aufgrund des in i) berichteten Ergebnisses

“Zwei der X_i sind kleiner ausgefallen als 4,
und die restlichen 18 größer als 4”

die Hypothese ablehnen, dass der Median gleich 4 ist?

3. U sei uniform verteilt auf $[0,2] \cup [3,7] \cup [8,10]$.
Denken Sie sich U als zweite Stufe eines Zufallsexperimentes dargestellt, dessen erste Stufe X Wertebereich $\{1,2,3\}$ hat und dessen Übergangsverteilungen $P(1,.)$, $P(2,.)$, $P(3,.)$ jeweils uniforme Verteilungen auf einem Intervall sind.

a) Wie ist die Verteilung von X zu wählen, damit die oben beschriebene Darstellung klappt?

b) Berechnen Sie mittels dieser Darstellung die Varianz von U.

4. Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable, und $s > 0$.

a) Begründen Sie unter Verwendung der Ungleichung von Markov, warum für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq b) \leq \frac{\mathbf{E}[e^{sX}]}{e^{sb}}.$$

Schreiben Sie dazu erst einmal das Ereignis $\{X \geq b\}$ auf passende Weise um.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[e^{sX}]$ für

(i) Binomial$(1, p)$

(ii) Binomial(n, p)

–verteiltes X.

(*Bei (ii) ist die altbekannte Formel* $e^{u+v} = e^u e^v$ *hilfreich. Erinnern Sie sich auch daran, dass sich eine Binomial*(n, p)*-verteilte Zufallsvariable als Anzahl der Erfolge bei einem* n*-fachen* p*-Münzwurf auffassen lässt.*)

5. S und R seien zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariable, $M := S + R$. (S steht für *Signal*, R für *Rauschen* und M für *Messung*.) Die Zufallsvariable S sein N$(10, 4)$-verteilt, und die Zufallsvariable R sei N$(1, 1)$-verteilt.

a) Berechnen Sie die beste affin lineare Prognose $h(M)$ von S auf der Basis von M.

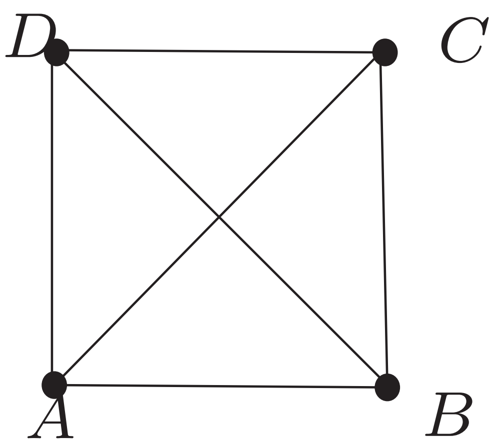
b) Finden Sie den Erwartungswert des Quadrates der Differenz $h(M) - S$.

5. S und R seien zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariable, $M := S + R$. Die Zufallsvariable S sein N$(10, 4)$-verteilt, und die Zufallsvariable R sei N$(1, 1)$-verteilt.

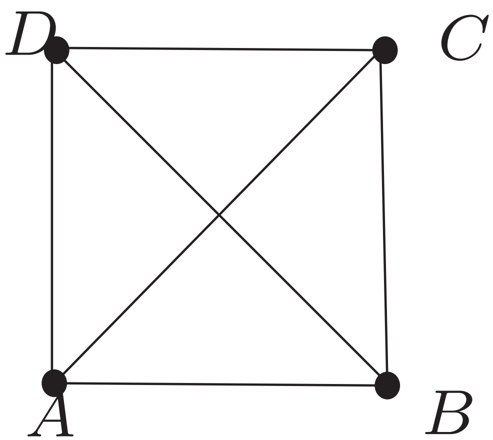
c) *Wie in einer unserer Übungsaufgaben kann man sich überzeugen, dass S gegeben $\{M = b\}$ die Verteilung $\mathrm{N}(g(b), v)$ hat, wobei der bedingte Erwartungswert $g(b)$ affin linear von b abhängt und die bedingte Varianz v nicht von b abhängt. Das sollen Sie hier nicht überprüfen, aber zu Folgendem verwenden:*

Geben Sie ein aus M gewonnenes zufälliges Intervall J an, für das gilt: $\mathbf{P}(S \in J | M = b) \approx 0.95$.

6. Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt $X = (X_0, X_1, \dots,)$ auf dem skizzierten ungerichteten Graphen (mit 4 Knoten und 6 Kanten), startend in ihrer Gleichgewichtsverteilung π.



a) Bestimmen Sie $\mathbf{P}_\pi((X_0, X_2) = (A, C))$.



b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Zeitpunkte $i \in \{0, \dots, 100\}$, für die $(X_i, X_{i+2}) = (D, B)$ gilt.

Nächste Woche in unseren **Tutorien**:

Besprechung einer weiteren Klausur aus dem Vorjahr.

Und:
Das **Lernzentrum Informatik** bietet während der Klausurenphase zu folgenden Zeiten fachliche Beratung zu den Inhalten der Basismodule:

18.02. - 06.03.2019: Mo - Fr 12:00 - 15:00 Uhr,
ausgenommen Freitag, 01.03.2019

27.03. - 09.04.2019: Mo - Fr 12:00 - 15:00 Uhr