Vorlesung 12a

Schätzen mit Verlass

Beispiele von Konfidenzintervallen

1. Schätzen von Anteilen

Große Population (♀ und ♂)

mit unbekanntem Weibchenanteil p

In einer Stichprobe vom Umfang $n = 53$

gab es 23 Weibchen.

Wie zuverlässig ist $\frac{23}{53}$ als Schätzung für p ?

Goldene Idee der Statistik:

In einem idealisiert gedachten Szenario
interpretiert man den Schätzwert
als Realisierung einer Zufallsvariablen
und rechnet mit deren Variabilität.

Deutung der Stichprobenziehung als p-Münzwurf

Als *Schätzer* für p betrachten wir die *Zufallsvariable*

$$\widehat{p} := H := \frac{K}{n}, \quad \text{mit} \quad K := \text{Anzahl der “Erfolge”}.$$

H ist die (relative) Häufigkeit der Erfolge.

$$\sigma_H = ?$$

K ist Bin(n, p)-verteilt. Also:

$$\boxed{\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}}$$

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt:

H ist approximativ normalverteilt

mit Erwartungswert $\mu_H = p$ und Standardabweichung σ_H.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_p(|p - H| \leq 2\sigma_H) \approx 0.95$$

$$\mathbf{P}_p(p \in [H - 2\sigma_H, H + 2\sigma_H]) \approx 0.95$$

In der Praxis ist auch σ_H

(aus der *einen* vorliegenden Stichprobe) zu schätzen.

Als Schätzer für $\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$ bietet sich an:

$$\widehat{\sigma_H} := \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{H(1-H)}$$

$$\mathbf{P}_p(p \in [H - 2\sigma_H,\, H + 2\sigma_H]) \approx 0.95$$

überträgt sich auf

$$\mathbf{P}_p(p \in [H - 2\widehat{\sigma_H},\, H + 2\widehat{\sigma_H}]) \approx 0.95$$

Das zufällige Intervall

$$I := [H - 2\widehat{\sigma_H},\, H + 2\widehat{\sigma_H}]$$

ist ein

Konfidenzintervall für p

mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.95

oder kurz ein

approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.

In unserem Eingangsbeispiel ($n = 53,\ k = 23$)

hatten die beobachtetet Realisierungen von H und $\widehat{\sigma_H}$

die Werte

$$h = 23/53 = 0.43,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)} = \sqrt{\frac{0.43 \cdot 0.57}{53}} = 0.07.$$

Als Realisierung von $I = [H - 2\widehat{\sigma_H},\ H + 2\widehat{\sigma_H}]$ ergab sich

$$[0.43 - 2 \cdot 0.07,\ 0.43 + 2 \cdot 0.07] = [0.29, 0.57].$$

Man beachte:

Nicht der Parameter p ist zufällig, sondern das Intervall I.

Im Jargon der Statistik wird oft
sowohl der Schätzer (die Zufallvariable) H
als auch der Schätzwert (die Zahl) h
mit dem Symbol $\widehat{p}$ bezeichnet.

Auf der nächsten Folie,
die das Obige zsammenfasst,
steht $\widehat{p}$ für die Zufallsvariable H
(vgl. Buch S. 122):

Das zufällige Intervall

$$I := \left[\widehat{p} - \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})},\ \widehat{p} + \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}\right]$$

ist ein

Konfidenzintervall für p

mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.95

oder kurz ein

approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.

Dabei sollte $np(1-p)$ “nicht zu klein” sein.
Eine Faustregel für die Anwendbarkeit ist: $nh \geq 9$ und $n(1-h) \geq 9$.

2. Schätzung des Erwartungswertes

einer Verteilung auf $\mathbb{R}$

(Lageschätzung)

$$m := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

wird gedacht als eine Realisierung der Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt

mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

Anders als bei der Anteilschätzung ist hier σ i.a. keine Funktion von μ.

$\bar{X}$ ist ein Schätzer für μ.

$\bar{X}$ hat Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.

Ein Schätzer für σ^2 ist

$$S^2 := \tfrac{1}{n-1}\big((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\big)$$

Im Jargon der Statistik schreibt man meist s^2 statt S^2 und verwendet s^2 auch zur Bezeichung von Schätzwerten (Realisierungen).

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ist approximativ N}(0, 1)\text{-verteilt.}$$

Bei bekanntem σ ist also für große n

$$\left[\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

In der Praxis hat man auch σ aus den Daten zu schätzen.

Für große n ist auch

$$J := \left[\bar{X} - 2\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ

Dieses Intervall enthält keine unbekannten Parameter.

Seine Realisierung ist $[\bar{x} - 2f, \bar{x} + 2f]$.

Der *Standardfehler*

$$f := \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ist ein Schätzwert für die

Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$ des Stichprobenmittelwertes $\bar{X}$.

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$ ist approximativ $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilt.

Bei bekanntem σ ist also

$$\left[\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

In der Praxis hat man auch σ aus den Daten zu schätzen.

Für (einigermaßen) große n ist auch

$$\left[\bar{X} - \frac{2S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2S}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

Für kleine n (etwa: $n \leq 10$) und (exakt bzw. annähernd) normalverteilte X_i

macht man sich zunutze, dass die Verteilung von $T := \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$ (exakt bzw. annähernd) so verteilt ist wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und $\mathrm{N}(0,1)$ verteilten $N_0, \ldots, N_{n-1}$.

Satz (W. Gosset (alias “Student”, 1908), R. Fisher (1924))

Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

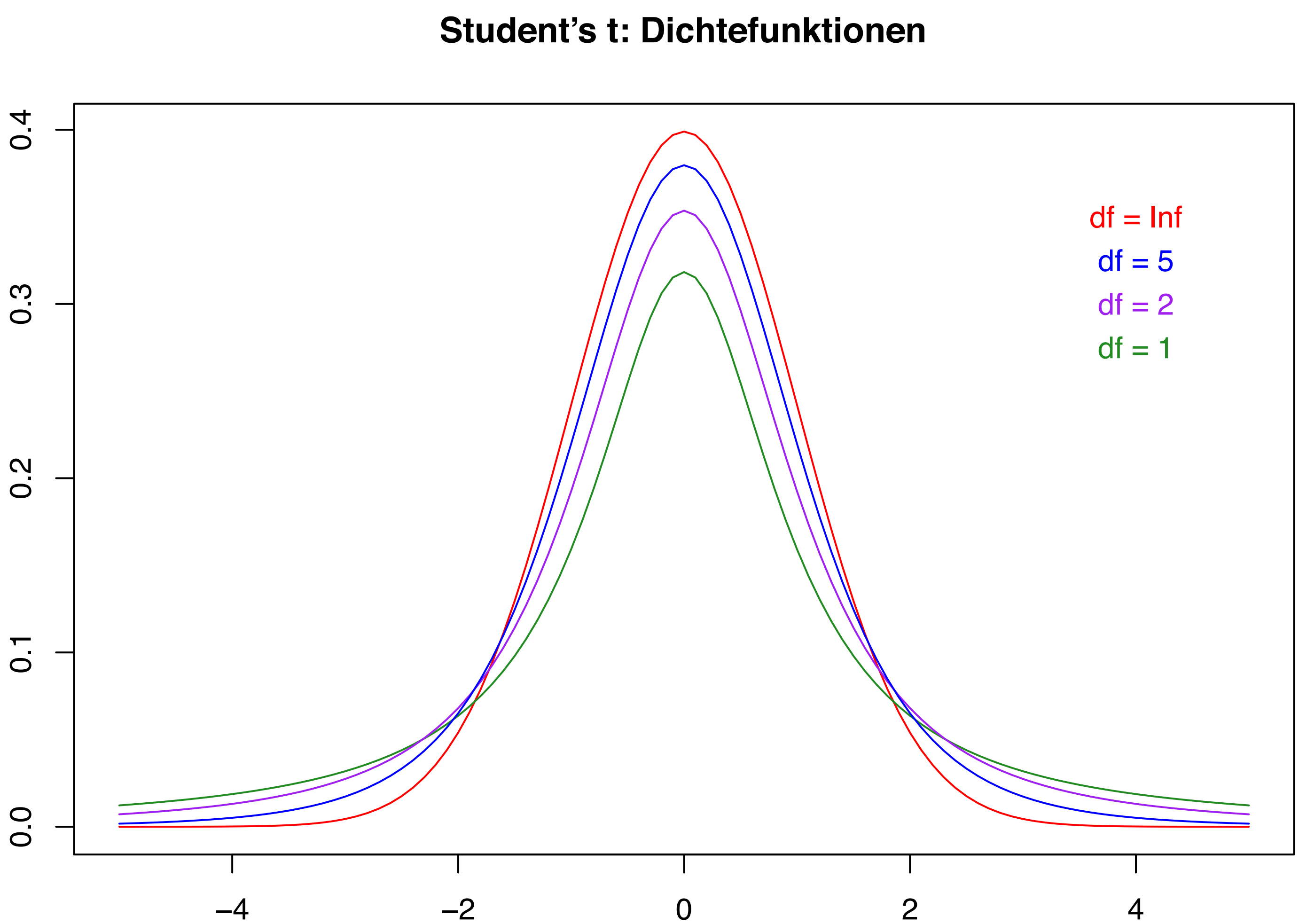
dann ist $\quad T := \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \quad$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und N$(0, 1)$ verteilten $N_0, \dots, N_{n-1}$.

Diese Tatsache lässt sich aus der Rotationssymmetrie der n-dimensionalen Standard-Normalverteilung gut verstehen, siehe Buch S.138/139

Bezeichnung: Die Verteilung von T_{n-1} heißt t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit $n - 1$ Freiheitsgraden.



df (= $n - 1$) steht hier für "degrees of freedom" , d.h. "Freiheitsgrade"

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

Für $n \to \infty$ ist T_{n-1} asymptotisch N$(0, 1)$-verteilt (Gesetz der großen Zahlen für den Nenner von T_{n-1}).

Je kleiner n, um so mehr schwankt der Nenner, und um so *breitschultriger* ist die Verteilung von T_{n-1}

Z.B. für $n = 6$: $\quad \mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95$.
Der passende R-Befehl ist `qt(0.975, 5)`,
mit der Ausgabe 2.57
Denn: $\mathbf{P}(T_5 \leq 2.57) = 0.975$.
Man sagt:
Das 0.975-Quantil der $t(5)$-Verteilung ist 2.57.

Eine direkte Folgerung aus dem Satz von Gosset-Fisher:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist für jedes $c > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}\right]\right)$$
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\right| \leq c\right) = \mathbf{P}(|T_{n-1}| \leq c).$$

Damit $\left[\bar{X} - \frac{cS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cS}{\sqrt{n}}\right]$

ein 95%-Konfidenzintervall für μ ist,

bestimme also c so,

dass $\mathbf{P}(|T_{n-1}| \leq c) = 0.95$ gilt.

Z.B. für $n = 6$: $\quad \mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95.$

Ein 95%-Konfidenzintervall für μ ist somit hier gegeben durch

$$\left[\bar{X} - 2.57\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.57\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2.57 ist deutlich größer als das aus dem Fall großer n vertraute 2 (siehe Folie 16).

Die zusätzliche, durch die Schwankungen des Schätzers S verursachte Variablität wird durch die passende Verlängerung des Intervalls kompensiert.

3. Schätzung des Medians einer Verteilung*

*Nachgetragen in der Vorlesung am 0.5.01.2019

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, mit Verteilung ρ.

Es gibt Situationen, in denen die Schätzung der “Lage” von ρ über den Stichprobenmittelwert problematisch ist – etwa wenn ρ so viel Masse weit draußen hat, dass die Varianz von ρ sehr groß ist (oder sogar der Erwartungswert von ρ gar nicht existiert)

In diesem Fall ist es günstig, einen “robusteren” Lageschätzer zu verwenden:

Definition.

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Wenn es nur eine Zahl ν gibt mit $\rho((-\infty, \nu]) = 1/2$

(also z. B. wenn $\rho([\ell, r]) = 1$ gilt

und ρ eine strikt positive Dichtefunktion besitzt),

dann ist ν **der** Median von ρ.

Definition.

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,

wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Wenn es mehrere Zahlen ν gibt mit $\rho((-\infty, \nu]) = 1/2$,

dann ist jede dieser Zahlen **ein** Median von ρ.

Bsp: Für die uniforme Verteilung auf $[0, 1] \cup [2, 3]$

ist jedes $\nu \in [1, 2]$ ein Median.

Wie schätzt man den Median?

Die *Ordnungsstatistiken* $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ sind die aufsteigend geordneten $X_1, \ldots, X_n$.

Ein Kandidat für ein Konfidenzintervall für den Median ist

$$[X_{(1+j)}, X_{(n-j)}]$$

mit $0 \leq j < n/2$.

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \notin [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) = \mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) + \mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu)\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) \leq 2^{-n}$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu) \leq 2^{-n}.$$

Also:

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \, .$$

Bsp: $n = 6$

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(6)}]\big) \geq 1 - \frac{1}{32} = 0.97 \ :$$

Das Konfidenzintervall $[X_{(1)}, X_{(6)}]$ für den Median hält die Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.97 ein.

Mit ähnlichen Überlegungen lässt sich zeigen:

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1+j)}, X_{(n-j)}]\big) \geq \mathbf{1} - \mathbf{2P}(Y \leq j)$$

mit Y Bin($n, 1/2$)-verteilt.

Man beachte:

Mit wachsendem j wird das Intervall kürzer

und die Überdeckungsw'keit nimmt ab!