Vorlesung 11b

Markovketten (Teil 2)

6. Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S

und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist

$$T_C := \text{min}\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

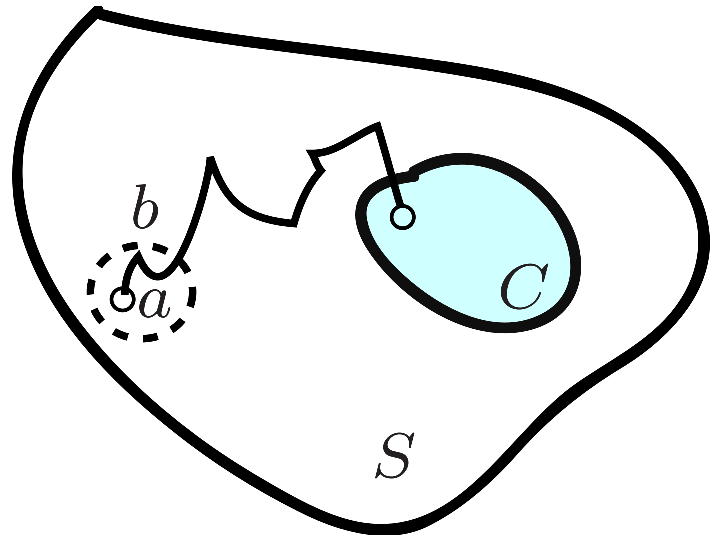
die erste Treffzeit von C.

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann “Neustart” in b:

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_C]$$

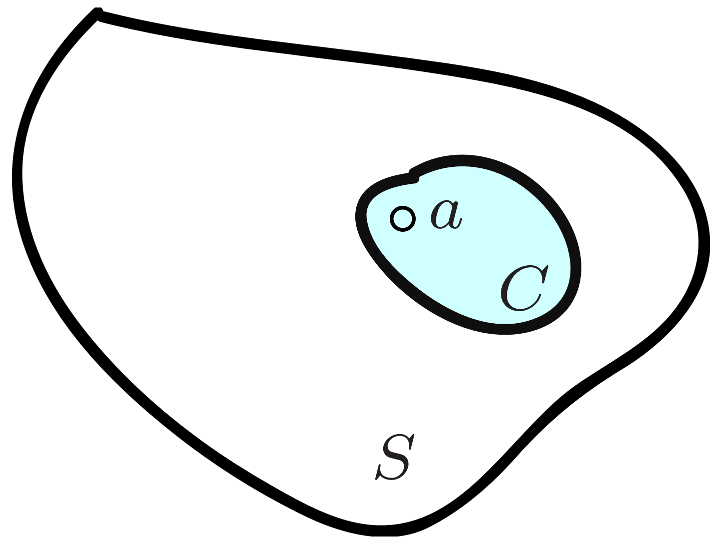
(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106.)

Und für $a \in C$

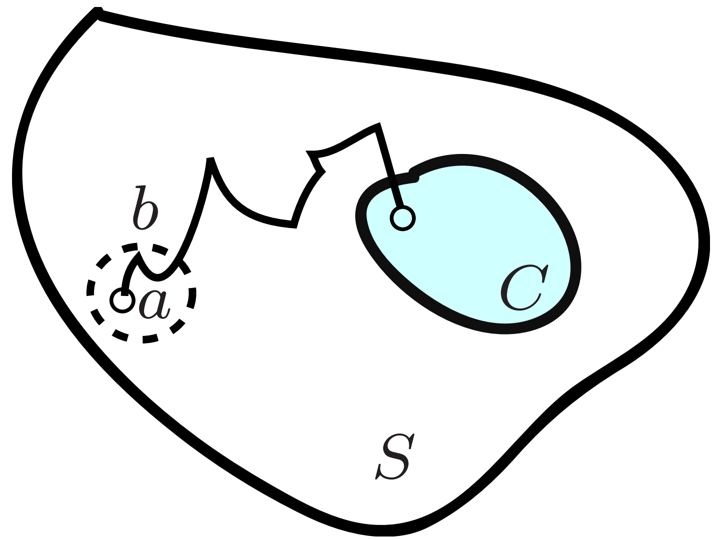
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

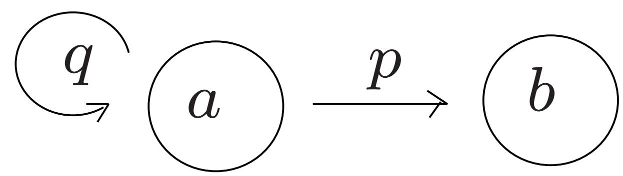
$$e(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$e(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.

$S = \{a, b\}$



$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1 + q\mathbf{E}_a[T_b] + p\mathbf{E}_b[T_b]\ .$$

Wegen $\mathbf{E}_b[T_b] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1/p.$$

7. Gleichgewichtsverteilungen

Sei P eine Übergangsmatrix auf S

und ρ eine (Start-)Verteilung auf S.

Dann gilt

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a, X_1 = b) = \rho(a)P(a,b), \quad \text{also}$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a) = \rho(a),$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_1 = b) = \sum_{a \in S} \rho(a)P(a,b).$$

Für welche Startverteilung ρ ist X_1 so verteilt wie X_0?

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P,

wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(G1) $$\sum_{a\in S} \pi(a)P(a,b) = \pi(b)\ , \quad b \in S\ .$$

(G2) $$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

d.h. unter $\mathbf{P}_\pi$ haben X_0 und X_1 dieselbe Verteilung.

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

Hinreichend für

(G2)

$$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

Denn dann ist unter $\mathbf{P}_\pi$

das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0),

also insbesondere X_0 so verteilt wie X_1.

Gleichbedeutend mit

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

ist

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a)\ , \quad a, b \in S\ .$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P.

8. Beispiele

Ein Beispiel einer

nicht reversiblen Gleichgewichtsverteilung:

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a,b) = P(b,c) = P(c,a) := p,$$

$$P(b,a) = P(c,b) = P(a,c) := 1 - p\,.$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist Gleichgewichtsverteilung zu P.

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

Die Gleichgewichtsverteilung der einfachen Irrfahrt auf dem Würfel $S = \{0,1\}^3$:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn. (Zwei Elemente von S heißen *benachbart*, wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.) Für benachbarte Knoten a und b ist hier $P(a,b) = 1/3$.

Die uniforme Verteilung auf S ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Eine wichtige Beispielklasse:

Die einfache Irrfahrt

auf einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

mit endlicher Knotenmenge S

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn:

$$P(a,b) = \frac{1}{g(a)},$$

mit b Nachbar von a, $g(a) := \#$ Nachbarn von a .

Ansatz: $\pi(a) := \frac{1}{c} g(a)$

Diese Verteilung π erfüllt die die Reversibilitätsbedingung (R),

denn für benachbarte Knoten a, b gilt:

$$\frac{1}{c} g(a) \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c} g(b) \frac{1}{g(b)}$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis): Es gibt (unter den gegebenen Voraussetzungen) nur **eine** Gleichgewichtsverteilung.

Fazit: Die Gewichte der Knoten

unter der Gleichgewichtsverteilung

sind proportional zur Anzahl der Nachbarn der Knoten.

9. Das Ehrenfest-Modell

veröffentlicht 1909 von Paul und Tatjana Ehrenfest, konzipiert als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:
ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.
In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.
Hat diese Dynamik eine Gleichgewichtsverteilung, und wenn ja, wie sieht sie aus?

Zur Illustration betrachten wir hier nur den Fall $d = 3$. Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind dann (für $\ell = 0, 1, 2, 3$):

$$P(\ell, \ell + 1) = \frac{3 - \ell}{3}, \qquad P(\ell, \ell - 1) = \frac{\ell}{3}.$$

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden nummeriert mit $1, 2., 3$.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls das Teilchen mit Nr. } i \text{ in linker Urne,} \\ 0 & \quad \ldots\ldots \qquad \text{in rechter Urne.} \end{cases}$$

$$a := (a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Dynamik des Feinmodells:

Eine Nummer $i \in \{1, 2, 3\}$ wird rein zufällig ausgewählt

und das a_i wird "geflippt"

(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt die Irrfahrt auf der Menge der Würfelecken

$\{0, 1\}^3$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:

die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch
“Zählen der Teilchen links”:

$$h(a) := a_1 + a_2 + a_3.$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$, dann ist $Z^{(1)} + Z^{(2)} + Z^{(3)}$ Binomial(3, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial$(3, \frac{1}{2})$-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell

mit $d = 3$ Kugeln:

$$2^{-3}\binom{3}{\ell}\,\frac{3-\ell}{3} = 2^{-3}\binom{3}{\ell+1}\,\frac{\ell+1}{3}. \ \square$$

Was 3 recht ist, ist einem allgemeinen d billig -

siehe Buch S. 109-110:

Die Binomial$(d, \frac{1}{2})$-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht

für das Ehrenfest-Modell mit d Kugeln.