

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 22. Dezember 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

33. S. a) Y sei normalverteilt mit Erwartungswert μ_Y und Varianz σ_Y^2 . Wie ist b zu wählen, damit das zufällige Intervall $I := [Y - b, Y + b]$ die Zahl μ_Y mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95 überdeckt? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie das Ereignis $\{\mu_Y \in I\}$ passend umformen.

b) In einer Stichprobe des Umfangs 100 aus einer großen Population ergab sich der Stichprobenmittelwert $m = 7.8$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 4.0$. Bestimmen Sie daraus die Realisierung eines zufälligen Intervalls, welches den Populationsmittelwert mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95 überdeckt.

34. Z_1 und Z_2 seien unkorreliert und jeweils mit Erwartungswert 0 und Varianz 1; es sei $X := 3 + 3Z_1 + 4Z_2$ und $Y := 5 + 5Z_1 - 3Z_2$. Berechnen Sie

(a) diejenige affin lineare Funktion $h = h(x)$, für die der erwartete quadratische Prognosefehler $\mathbf{E}[(Y - h(X))^2]$ unter allen affin linearen Funktionen minimal wird

(b) den mit der Lösung aus (a) resultierenden erwarteten quadratischen Prognosefehler.

35. Wir betrachten ein simples Modell für die Körpergrößen (X, Y) eines zufällig aus der Population gewählten Vater-Sohn-Paares: Z_0, Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt, $X := 170 + 10Z_0 + 10Z_1$, $Y := 170 + 10Z_0 + 10Z_2$. Berechnen Sie den Wert der besten affin linearen Prognose

a) von Y auf Grundlage der Beobachtung $X = 185$,

b) von X auf Grundlage der Beobachtung $Y = 180$.

36 S. Das zufällige Paar (X_1, X_2) mit Werten in $\{b, c, d\} \times \{1, 2, 3\}$ komme durch ein zweistufiges Experiment zustande, wobei $\mathbf{P}(X_1 = b) = 2\mathbf{P}(X_1 = c) = 2\mathbf{P}(X_1 = d)$ gelte und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, \cdot)$, $a_1 \in \{b, c, d\}$, durch die rechts angegebene Matrix bestimmt sind.

	1	2	3
b	0.4	0.2	0.4
c	0.3	0.2	0.5
d	0.5	0.4	0.1

(i) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(ii) Finden Sie die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) und die Verteilung von X_2 .

(iii) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(a_2, \cdot)$, $a_2 \in \{1, 2, 3\}$ so, dass das zufällige Paar (X_2, X_1) als zweistufiges Zufallsexperiment (jetzt mit X_2 als erster Stufe) entsteht.