Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 8. Dezember 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

25. X sei uniform verteilt auf $[-1,1]$, $Y := X^2$. Sind X und Y
(i) unkorreliert
(ii) unabhängig ?
Hinweis zu (ii): Betrachten Sie die Ereignisse $\{|X| < 1/2\}$ und $\{Y > 1/4\}$.

26. Es sei U eine Unif([0, 1])-verteilte Zufallsvariable.

a) Finden Sie eine Abbildung
$h = (h_1, h_2) : [0,1] \to \{0,1\}^2$ so, dass $X = h(U)$ so verteilt ist wie
(i) ein zweimaliger fairer Münzwurf
(ii) ein zweimaliger Münzwurf zum Parameter $p = 1/3$.

b) Finden Sie eine Abbildung $h : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ so, dass $X = h(U)$
(i) binomialverteilt ist zu den Parametern $n = 2$ und $p = 1/4$
(ii) exponentialverteilt ist zum Parameter $\lambda = 1/4$.

27. S U sei uniform auf $[0,2]$ verteilt, und X sei Exp(3)-verteilt. Berechnen Sie
(i) den Erwartungswert (ii) die Varianz (iii) die Verteilungsfunktion (iv) die Dichte von
a) U^5 b) $4X - 3$.
Hinweis zu (i) und (ii): Bei a) ist es geraten, mit der Transformationsformel für Erwartungswerte zu rechnen; bei b) helfen grundlegende Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz.

28. S a) Wieviele Versuche muss man in einem Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.8$ mindestens machen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 30 Erfolge zu erzielen, nicht geringer ist als 0.975? Rechnen Sie mit der Normalapproximation der Binomialverteilung. (Eine Skizze ist hilfreich.)
b) Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ und $q := 1 - p$ sei X Bin(n,p)-verteilt und Y N(np, npq)-verteilt. In der Vorlesung haben wir zumindest ansatzweise begründet, warum für großes npq gilt:

$$(*) \qquad \mathbf{P}(X = k) \approx \mathbf{P}(k - \frac{1}{2} \le Y \le k + \frac{1}{2}).$$

Vergleichen Sie in der Situation von a) die naive Approximation von $\mathbf{P}(X \ge 30)$ durch $\mathbf{P}(Y \ge 30)$ mit der genaueren Approximation von $\mathbf{P}(X \ge 30)$ mittels $(*)$.
c) Lösen Sie a) auch noch (ohne Normalapproximation) mittels des R-Befehls `dbinom`.