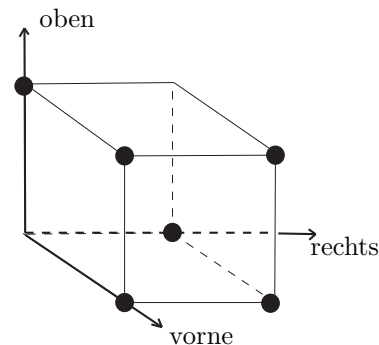


Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 1. Dezember 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

21. Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen.

X sei eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind „vorne“, drei sind „rechts“ und drei sind „oben“. Wir betrachten die Ereignisse $E_1 := \{X \text{ landet vorne}\}$, $E_2 := \{X \text{ landet rechts}\}$, $E_3 := \{X \text{ landet oben}\}$.



a) Gilt $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \cdot \mathbf{P}(E_3)$?

b) Sind die drei Ereignisse E_1 , E_2 , E_3 unabhängig? Argumentieren Sie hier sowohl rechnerisch als auch anschaulich.

22. S. Paare und Summen von Zählvariablen. In der Situation von Aufgabe 13 sei Z_i die Indikatorvariable des Ereignisses, dass X_i und X_{i+1} in verschiedene Partionselemente fallen ($i = 1, \dots, 19$).

a) Bestimmen Sie, gerundet auf 4 Nachkommastellen, die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von Z_3 und Z_4 .

b) Welche der drei folgenden Aussagen trifft zu: Z_3 und Z_4 sind

(i) unkorreliert (ii) positiv korreliert (iii) negativ korreliert ?

c) Berechnen Sie die Varianz von $Z_1 + \dots + Z_{19}$.

d) Zusatzfrage für Extra-Punkte: Von n Kugeln sind n_1 schwarz, n_2 grün und n_3 weiß gefärbt (mit $n = n_1 + n_2 + n_3$). Die Kugeln werden rein zufällig ohne Zurücklegen gezogen. Wir betrachten das Ereignis $E_1 :=$ „die Farbe der ersten und der zweiten gezogenen Kugel sind gleich“ und das Ereignis $E_2 :=$ „die Farbe der zweiten und der dritten gezogenen Kugel sind gleich“. Finden Sie ein Beispiel für n, n_1, n_2 und n_3 , in dem E_1 und E_2 negativ korreliert sind, und ein weiteres, in dem E_1 und E_2 positiv korreliert sind. (Eine Frage an den Hausverstand: Wenn es deutlich viel mehr schwarze Kugeln gibt als grüne und weiße und Ihnen jemand verrät, dass E_1 eingetreten ist: würden Sie dann vielleicht eher auf das Eintreten von E_2 wetten als ohne die besagte Information, und wenn ja, aus welchem intuitivem Grund?)

23. S. Varianz des Stichprobenmittels. a) Es sei n eine natürliche Zahl, und Y eine auf $\{1, \dots, n\}$ uniform verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert μ , (ii) die Varianz σ^2 , (iii) die Standardabweichung von Y . (Die Formel $\sum_{a=1}^n a^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ist dabei hilfreich.)

b) Wir ziehen rein zufällig und ohne Zurücklegen aus der Menge $\{1, \dots, 20\}$ und bezeichnen mit X_i das beim Zug Nr. i gezogene Element.

α) Warum hängt (für $1 \leq i \neq j \leq 20$) die Kovarianz $\mathbf{Cov}[X_i, X_j]$ nicht von i und j ab?

β) Berechnen Sie die Kovarianz von X_1 und X_2 aus der Identität $0 = \mathbf{Var}(X_1 + \dots + X_{20})$.

γ) Berechnen Sie die Varianz des Stichprobenmittels $\frac{1}{10}(X_1 + \dots + X_{10})$.

δ) Vergleichen Sie das Ergebnis aus γ) mit der Varianz des entsprechenden Stichprobenmittels beim Ziehen mit Zurücklegen.

24. Die Standardabweichung der zufälligen Trefferquote. In der Stunde Eins haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche G dadurch geschätzt, dass wir n Punkte rein zufällig in G geworfen und als Schätzer $\hat{p}$ die relative Treffzahl von F genommen haben. Berechnen Sie die Standardabweichung von $\hat{p}$, wenn der tatsächliche Wert von p gleich $1/5$ ist. Was ergibt sich für (i) $n = 100$, (ii) $n = 400$, (iii) $n = 1600$?