Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 24. November 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

17. a) X_n sei Binom(n,p)-verteilt. Beweisen Sie mit der Ungleichung von Markov, angewandt auf ein passend gewähltes Y: Für jedes $\delta > 0$ ist

$$\mathbf{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2 \geq \delta\right) \leq \frac{1}{\delta}\frac{pq}{n}.$$

b) Folgern Sie aus a) das *Gesetz der großen Zahlen von Jakob Bernoulli*:
Sei $Z_1, Z_2, \dots$ ein fortgesetzter p-Münzwurf und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mathbf{P}(|\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) - p| \geq \varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$ eine gegen 0 konvergente Folge, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Anzahl der Erfolge um mehr als ε von der Erfolgswahrscheinlichkeit p abweicht, wird verschwindend klein im Grenzwert $n \to \infty$.

18. S. $X^{(n)}$ sei eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$.
a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Fixpunkte von $X^{(n)}$.
b) Für $0 \leq k \leq n$ sei $f_k^{(n)}$ die Anzahl der Permutationen von $1, \dots, n$ mit genau k Fixpunkten. Finden Sie eine Beziehung zwischen $f_k^{(n)}$ und $f_0^{(n-k)}$.
c) Es sei $p_k^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass $X^{(n)}$ genau k Fixpunkte hat. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Folge $p_k^{(n)}$ für $n \to \infty$ gegen das Poissongewicht von k zum Parameter 1 konvergiert.

19. S. Für $r \in \mathbb{N}$, sei $Z_1, Z_2, \dots$ ein fortgesetztes r-Würfeln mit den gleich wahrscheinlichen Ausgängen $1, \dots, r$.
a) Was ist die erwartete Anzahl der Würfe, bis erstmals alle r Ausgänge erzielt worden sind?
b) Es sei $r = 1000$; man würfelt in jeder Sekunde einmal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bis zum Ausgang 1 länger als eine Stunde warten muss? Verwenden Sie die Exponentialapproximation.

20. Es sei Q ein Quadrat mit 100×100 Pixeln und T ein Teilquadrat von Q mit 10×10 Pixeln. $(X_1, X_2, \dots,)$ sei eine fortgesetzte rein zufällige Wahl von Pixeln aus Q. (Die mehrfache Wahl eines Pixels ist damit nicht ausgeschlossen.) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den ersten 200 gewählten Pixeln genau 5 Treffer von T sind? Rechnen Sie
(i) “exakt” (z.B. mit einem entsprechenden R-Befehl) und
(ii) mit der Poissonapproximation.