

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 17. November 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

13. $\{A, B, C\}$ sei eine Partition (eine “Zerlegung”) von $\{1, \dots, 20\}$, bestehend aus drei disjunkten Teilmengen A, B, C von $\{1, \dots, 20\}$ mit 5, 6 und 9 Elementen, und $(X_1, \dots, X_{20})$ sei eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, 20$.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen X_3 und X_4 in verschiedene Partitionselemente, d.h. nicht gemeinsam in eine der Mengen A, B oder C ?

(ii) 20 Städte, von denen 5 im Land A , 6 im Land B und 9 im Land C liegen, werden in rein zufälliger Reihenfolge besucht. Jeder Grenzübergang kostet k Euro. Berechnen Sie den Erwartungswert der gesamten Grenzübertrittskosten.

14. S a) $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ sei ein n -facher p -Münzwurf. Wie wahrscheinlich ist (für $n \geq 5$) das Ereignis $\{Z_3 = 1, Z_5 = 1\}$?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Quadrats einer Binom(n, p)-verteilten Zufallsvariablen X , indem Sie X als Summe von Zählvariablen schreiben.

c) Folgern Sie aus b) mit der Linearität des Erwartungswertes, dass für ein Binom(n, p)-verteiltes X gilt:

$$\mathbf{E}[(X - np)^2] = npq \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\left[\left(\frac{X}{n} - p\right)^2\right] = \frac{pq}{n}.$$

15. S Aus einer Population bestehend aus 40 Hessen und 60 Bayern wurde eine Stichprobe vom Umfang 20 (d.h. ein 20-elementige Teilmenge der Population) herausgegriffen. In dieser befanden sich 5 Hessen und 15 Bayern.

a) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Hessen in einer *rein zufälligen* Stichprobe vom Umfang 20?

b) Wie wahrscheinlich ist in einer rein zufällig gezogenen Stichprobe eine Anzahl von Hessen, die vom (in a) berechneten) Erwartungswert mindestens so weit abweicht wie die beobachtete Anzahl 5?

Hinweis: Ganz ähnlich wie in Aufgabe 11 ist hier der R-Befehl $\text{sum(dhyper(k1:k2, r, b, n))}$ hilfreich. Finden Sie heraus, was diese Gewichte mit der Aufgabenstellung zu tun haben, und was die Summationsgrenzen sind.

16. Für natürliche Zahlen r und n sei $(X_1, \dots, X_n)$ uniform verteilt auf $\{1, \dots, r\}^n$.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass (für $n \geq 5$) die beiden Komponenten X_3 und X_5 gleich ausfallen?

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Kollisionen, d.h. den Erwartungswert der Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$, für die X_i und X_j gleich ausfallen.

c) Es sei λ_n der in b) berechnete Wert. Vergleichen Sie $e^{-\lambda_n}$ mit der ersten in Vorlesung 1b hergeleiteten Näherung für die “Wahrscheinlichkeit von null Kollisionen”.