

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 10. November 2017, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

9. 60 Karten, von denen 10 die Farbe blau, 20 die Farbe rot und 30 die Farbe grün haben, werden perfekt gemischt und dann eine nach der anderen aufgeschlagen.

- (i) Wie wahrscheinlich ist es, dass die erste aufgeschlagene Karte blau ist?
- (ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass die achte aufgeschlagene Karte blau ist?
- (iii) Wie wahrscheinlich ist es, dass die achte und die neunte aufgeschlagene Karte nicht dieselbe Farbe haben?

10. S Es sei $S_{10,3}$ die Menge der Besetzungen¹ von 3 Plätzen mit 10 Objekten.

- a) Geben Sie die Anzahl der Elemente von $S_{10,3}$ an, indem Sie
 - (i) die in der Vorlesung diskutierte Bijektion zwischen $S_{10,3}$ und der Menge aller 01-Folgen der Länge 12 mit genau zwei Nullen verwenden
 - (ii) das entsprechende de Finetti-Dreieck entlang seiner Zeilen abzählen.
- b) Warum hat $\{b \in S_{10,3} : b_j \geq 1 \text{ für alle } j\}$ genau so viele Elemente wie $S_{7,3}$? Veranschaulichen Sie diese Tatsache auch am entsprechenden de-Finetti-Dreieck.
- c) 20 Objekte werden gemäß einer uniform verteilten Besetzung auf 5 Plätze gesetzt. Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei kein Platz leer bleibt?

11. Wir betrachten die in Aufgabe 1 beschriebenen Situation. Zur Erinnerung: Der Pixelanteil (“Flächenanteil”) von A im Quadrat war $p = 0.195$. Die Anzahl der rein zufällig (nacheinander) ins Quadrat gesetzten Pixel (“Punkte”) sei $n = 100$.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen die ersten 20 Punkte in die Menge A und die restlichen nicht?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Punkte, die in A fallen, gleich 20? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Monte-Carlo-Ergebnis bei 1000 Wiederholungen (der Wahl von jeweils 100 Punkten).
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen
 - (i) weniger als 10
 - (ii) mehr als 28 Punkte
 in die Menge A ? (Hinweis: Der R-Befehl `sum(dbinom(k1:k2, n, p))` - mit jeweils passender Wahl der Summationsgrenzen k_1 und k_2 - ist hilfreich. Mehr Information bekommen Sie, wenn Sie z.B. den Befehl `?dbinom` in die R-Konsole eingeben.)
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt der erste Treffer von A erst nach dem 15ten, aber noch vor dem 30ten der 100 “Würfe”?

12. S a) In der Situation von Aufgabe 9 betrachten wir jetzt ein rein zufälliges Ziehen mit Zurücklegen.

- i) Wie wahrscheinlich ist es, dass von 10 gezogenen Karten 4 blau, 3 rot und 3 grün sind?
- ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass von 10 gezogenen Karten 4 blau und die anderen 6 rot oder grün sind?

b) $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ sei multinomialverteilt mit Parameter (n, p_1, \dots, p_r) . Wie ist $X = (X_1 + X_2, X_3, \dots, X_r)$ verteilt?

¹Zur Erinnerung: Bei einer *Besetzung* (als Synonym für ein r -Tupel von Besetzungszahlen) unterscheiden wir nicht, mit welchen Objekten der jeweilige Platz besetzt ist.