Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 3. November 2017, vor der Vorlesung (12:25-12:30 im Magnus HS)

5. n Individuen werden rein zufällig auf $r = 10^6$ Plätze gesetzt.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $w_r(n)$ für Kollisionsfreiheit für
(i) $n = 100$ (ii) $n = 1000$ (iii) $n = 10000$.
Sie können dabei die folgende kleine R-Schleife verwenden:

```
r<-10^6
n<-100
w<-function(r,n){
  v<-1
  if (n>1){
    for (i in 1:(n-1)){
      v<-v*(1-i/r)
    }
  }
  return(v)
}
w(r,n)
```

b) Berechnen Sie in a) jeweils den absoluten und den relativen Fehler der Stirling- und der Stirling+Taylor Näherung. (Für eine Näherung u des wahren Wertes w ist dabei $|u - w|$ der absolute und $|(u - w)/w|$ der relative Fehler.)

6. S Es sei S die Menge der 01-Folgen der Länge r. Für $i = 1, \dots, r$ setzen wir $p_i := \frac{i-1}{r}$ und $q_i := 1 - p_i$. Wir betrachten eine Zufallsvariable $Z = (Z_1, \dots, Z_r)$ mit Wertebereich S und

$$\mathbf{P}(Z = (a_1, \dots, a_r)) = \prod_{i \le r: a_i = 1} p_i \prod_{i \le r: a_i = 0} q_i, \quad a = (a_1, \dots, a_r) \in S.$$

a) Zeigen Sie rekursiv für $n \le r$, beginnend mit $n = r - 1$:

$$\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) = \prod_{i \le n: a_i = 1} p_i \prod_{i \le n: a_i = 0} q_i.$$

b) Für $a \in S$ sei $t(a) := \min\{i \in \{1, \dots, n\} : a_i = 1\}$ der *Zeitpunkt der ersten Eins* (oder “Zeitpunkt des ersten Erfolges”), mit $t((0, \dots, 0)) := \infty$. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(t(Z) > n)$ für $n \le r$.

7. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ sei $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ ein rein zufälliger Standardpfad der Länge n (vgl. dazu Aufgabe 3 auf Blatt 1). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X$ erreicht zu keinem Zeitpunkt den Wert $1\}$
a) exakt b) näherungsweise mit der Stirlingformel.

8. S Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die schon an einem Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der in der Vorlesung betrachteten Permutation 5 , 2, 7, 3, 1, 4, 6 von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\,5)(2)(3\,7\,6\,4)$.
Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n + 1$ aus einer Permutation von $1, \dots, n$, ausgehend von deren Zyklendarstellung: *Das Element $n + 1$ wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ auf einen der n Plätze rechts neben $1, 2, \dots, n$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ wird das Elemet in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.*
a) Zeichnen Sie (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend vom trivialen Zyklus (1), zu den 6 Permutationen von 1, 2, 3 führen.
b) Begründen Sie induktiv, dass zu jeder der $n!$ Permutationen von $1, 2, \dots, n$ genau ein Pfad (im Sinn von a)) führt.
c) Warum liefert der Algorithmus für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rein zufällige Permutation von $\{1, \dots, n\}$?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $\{1, \dots, 1000\}$
(i) 1, 2, 3, 4 (ii) 700, 800, 900 und 1000
im selben Zyklus?