Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

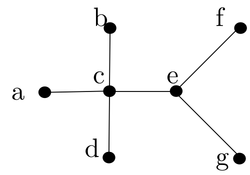
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 26. Januar 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

45. S a) Auf $S = \{1, 2, 3, 4\}$ betrachten wir die Markovkette mit der durch

$$P(1,2) = 1,\ P(2,1) = P(2,3) = 1/2, P(3,2) = 1/3, P(3,4) = 2/3, P(4,3) = 1$$

gegebenen Übergangsmatrix. Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung. (*Hinweis: Suchen Sie nach einem reversiblen Gleichgewicht.*)

b) Wir betrachten eine Markovkette auf dem skizzierten Graphen mit den folgenden Übergangsgewichten:
$P(a,c) = P(b,c) = P(d,c) = P(f,e) = P(g,e) = 1$, $P(c,e) = 1/2$,
$P(c,a) = P(c,b) = P(c,d) = 1/6$, $P(e,c) = P(e,f) = P(e,g) = 1/3$.
Bestimmen Sie die Gewichte der Gleichgewichtsverteilung. (*Hinweis: Machen Sie sich Symmetrien zunutze und verwenden Sie a).*)



c) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix und die Gleichgewichtsverteilung der gewöhnlichen Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen.

46. S In zwei großen Populationen ist der Mittelwert der Größe der Individuen jeweils μ_1 bzw. μ_2. Aus den beiden Populationen wurden Stichproben der Größe 100 bzw 200 erhoben. Die Stichprobenmittelwerte waren 8.0 und 8.1 und die Stichprobenstandardabweichungen waren 1.1 und 1.0.
a) Finden Sie die Realisierung eines approximativen (i) 95%- (ii) 99%-Konfidenzintervalls für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$. (Hinweis: Der R-Befehl `qnorm(p)` liefert $\Phi^{-1}(p)$.)
b) Wie wahrscheinlich ist eine betragsmäßig mindestens so große Differenz der Stichprobenmittelwerte wie die beobachtete, wenn die beiden Populationsmittelwerte gleich sind? Verwenden Sie die approximative Normalverteiltheit der Differenz der Stichprobenmittelwerte.[1] (Hinweis: Der R-Befehl `pnorm(b)` liefert $\Phi(b)$.)

47. In einer großen Population gibt es einen Anteil p von Typ A-Individuen. In einer Stichprobe der Größe 60 waren 9 Typ A-Individuen.
a) Bestimmen Sie ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.
b) Wie wahrscheinlich ist eine betragsmäßig so große Abweichung des Anteils in der Stichprobe vom Anteil in der Population, wenn p in Wahrheit 0.2 ist? Rechnen Sie mit approximativer Normalität.[2]

48. a) 6 Objekte werden (ohne Mehrfachbelegungen) auf die Plätze $\{1, \dots, 18\}$ gesetzt.
(i) Was ist unter der Hypothese der reinen Zufälligkeit der Erwartungswert μ der Anzahl X der Objekte, die auf der Platzmenge $\{1, \dots, 10\}$ landen?
(ii) Es ist nur eines der sechs Objekte auf $\{1, \dots, 10\}$ gelandet. Welche Ausgänge von X sind mindestens so “extrem”, d.h. mindestens so weit entfernt von μ wie der beobachtete Ausgang 1? Wie wahrscheinlich ist es unter der Hypothese der reinen Zufälligkeit, einen mindestens so extremen Ausgang wie den beobachteten zu bekommen?[3]

b) (i) Für wieviele dreielementige Mengen aus $\{1, 2, \dots, 30\}$ ist die Summe ihrer Elemente ≤ 10?
(ii) 3 Objekte wurden (ohne Mehrfachbelegungen) auf die Plätze $\{1, \dots, 30\}$ gesetzt, sie fielen auf die Plätze $7, 2$ und 1. Wie wahrscheinlich ist unter der Hypothese der reinen Zufälligkeit ein Ausgang der “Rangsumme”, der mindestens so nahe zu einem der beiden extremen Ausgänge $1 + 2 + 3$ bzw. $28 + 29 + 30$ liegt wie die beobachtete Stichprobensumme $7 + 2 + 1$?[4]

---

[1] Im Jargon der Statistik: *Zu welchem p-Wert lässt sich die Hypothese “$\mu_1 = \mu_2$” aufgrund des z-Tests ablehnen?*

[2] Anders gesagt: *Zu welchem p-Wert lässt sich die Hypothese “$p = 0.2$” aufgrund des z-Tests ablehnen?*

[3] Anders gesagt: *Zu welchem p-Wert können Sie unter Verwendung von Fishers exaktem Test die Hypothese der reinen Zufälligkeit verwerfen?*

[4] Anders gesagt: *Zu welchem p-Wert können Sie unter Verwendung des Wilcoxon-Rangsummentests die Hypothese der reinen Zufälligkeit (zugunsten einer “Tendenz hin zum Rand”, d.h. zu den Plätzen mit den kleinen bzw zu den Plätzen mit den großen Rängen) verwerfen?*