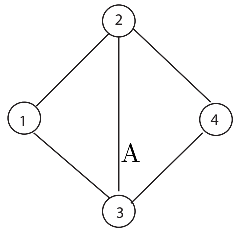
Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

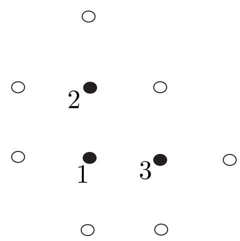
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 19. Januar 2018, vor der Vorlesung (12:10-12:15 im Magnus HS)

41. (Eine Modifikation von Aufgabe 3.15 aus L. Dümbgen, Stochastik für Informatiker, Springer 2003). Jede der 5 Kanten im skizzierten Netwerk sei (unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit p intakt. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine Verbindung ("fließt Strom") vom Knoten 1 zum Knoten 4,
(i) gegeben die Kante A (zwischen Knoten 2 und Knoten 3) ist intakt
(ii) gegeben die Kante A ist defekt (d.h. nicht intakt)?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine Verbindung ("fließt Strom") zwischen Knoten 1 und Knoten 4?
c) Es sei $p = 0.1$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kante A defekt, gegeben es fließt Strom zwischen Knoten 1 und Knoten 4?

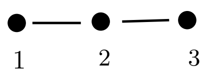


42. Für $n \geq 0$ sei $S_n := \{a_0 a_1 \dots a_n : a_i \in \{0, \dots, n\}$ paarweise verschieden$\}$ und X_n eine Zufallsvariable mit Wertebereich S_n, wobei die Folge $(X_0, X_1, \dots)$ so aufgebaut wird:
Gegeben $X_n = a_0 a_1 \dots a_n$ entsteht X_{n+1} so, dass $n+1$ rein zufällig in einen der insgesamt $n+2$ möglichen Slots "links von a_0, zwischen a_0 und a_1, …, rechts von a_n" platziert wird.
a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: X_n ist uniform verteilt auf S_n.
b) Für $a = a_0 a_1 \dots a_n \in S_n$ sei $L(a)$ die Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$, für die j links von 0 steht, und $R(a)$ die Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$, für die j rechts von 0 steht (z. B. ist $L(350142) = 2$).
Begründen Sie: Gegeben $\{L(X_1) = k_1, \dots, L(X_n) = k_n\}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{L(X_{n+1}) = k_n + 1\}$ gleich $\frac{k_n+1}{n+2}$.
c) Folgern Sie aus b): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $((L(X_n), R(X_n))_{n=1,\dots,m}$ so verteilt wie die Farbanzahlen der ersten m Zugänge in einer Pólya-Urne (mit anfänglich einer weißen und einer blauen Kugel in der Urne).

43. S Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt in $\mathbb{Z}^2$: von jedem Punkt geht man jedesmal einen Schritt der Größe 1, unabhängig von der Vorgeschichte mit W'kt 1/4 nach Osten, Norden, Westen oder Süden.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ausgehend von dem in der nebenstehenden Skizze mit 3 bezeichneten Punkt die Menge $\{1, 2, 3\}$ nach Norden oder Osten verlässt.
b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Schritte bis zum erstmaligen Verlassen der Menge $\{1, 2, 3\}$ bei Start in 1.

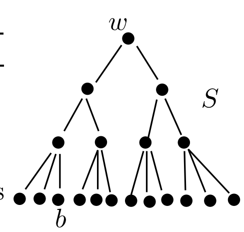


44. S a) Es sei $X_0, X_1, \dots$ eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem nebenstehend skizzierten Graphen mit den Knoten 1,2,3, und $Y_n := \mathbf{1}_{\{1,2\}}(X_n)$.



Berechnen Sie (i) $\mathbf{P}(Y_3 = 0 \,|\, Y_0 = 0, Y_1 = 1, Y_2 = 1)$ (ii) $\mathbf{P}(Y_3 = 0 \,|\, Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 1)$
Ist (Y_n) eine Markovkette?

b) Wieder sei $X_0, X_1, \dots$ eine gewöhnliche Irrfahrt, diesmal auf dem nebenstehend skizzierten Baum mit der Knotenmenge S. Für jeden Knoten k sei $h(k)$ die *Tiefe* von k (also z.B. $h(w) = 0$, $h(b) = 3$).



i) Ist $Y_n := h(X_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ eine Markovkette?

ii) Wieviele Schritte benötigt die Irrfahrt bei Start in b in Erwartung bis zum ersten Treffen von w?