Vorlesung 6b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Uniforme Verteilung & Co.

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S = [0, 1]$ heißt

uniform verteilt auf S,

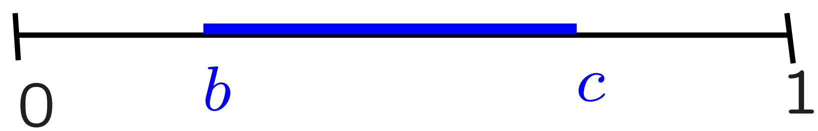
wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $V(A)$

gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = V(A).$$

Beispiel 1:

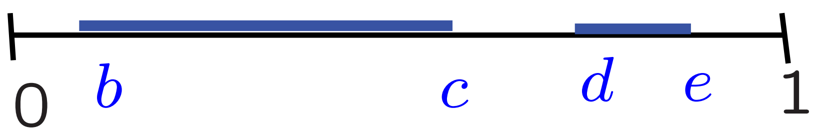
$A := [b, c]$ mit $0 \le b \le c \le 1$



$$\mathbf{P}(X \in A) = c - b.$$

Beispiel 2:

$A := [b, c] \cup [d, e]$ mit $0 \leq b \leq c < d \leq e \leq 1$



$$\mathbf{P}(X \in A) = (c - b) + (e - d).$$

Beispiel 3:

$$A := \{a\} \quad \text{mit } 0 \le a \le 1$$

$$\mathbf{P}(X = a) = a - a = 0.$$

2. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$

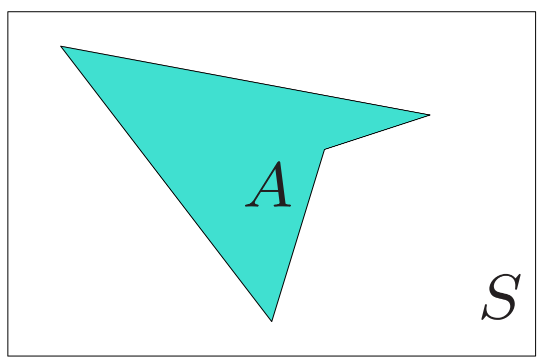
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf* S, wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



3. Uniforme Verteilung auf einer kontinuierlichen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”:

Der zahlenmäßige Anteil von A

an einem endlichen Wertebereich S

wird jetzt ersetzt durch den volumsmäßigen Anteil von A

am kontinuierlichen Wertebereich S.

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\int\limits_{[b,c]} da = \int_b^c 1 \cdot da = b - c = V([b,c])$$

$$\int\limits_{A} da = \int\limits_{A} 1 \cdot da = V(A)$$

$$\int\limits_{A} \mathbf{P}(X \in da) := \mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \int\limits_{A} \frac{da}{V(S)}$$

4. Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur

mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$

ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

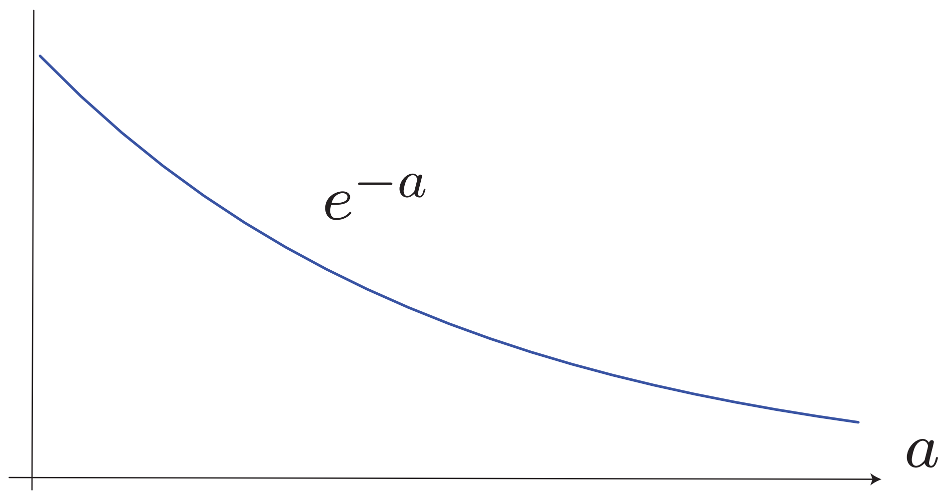
wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

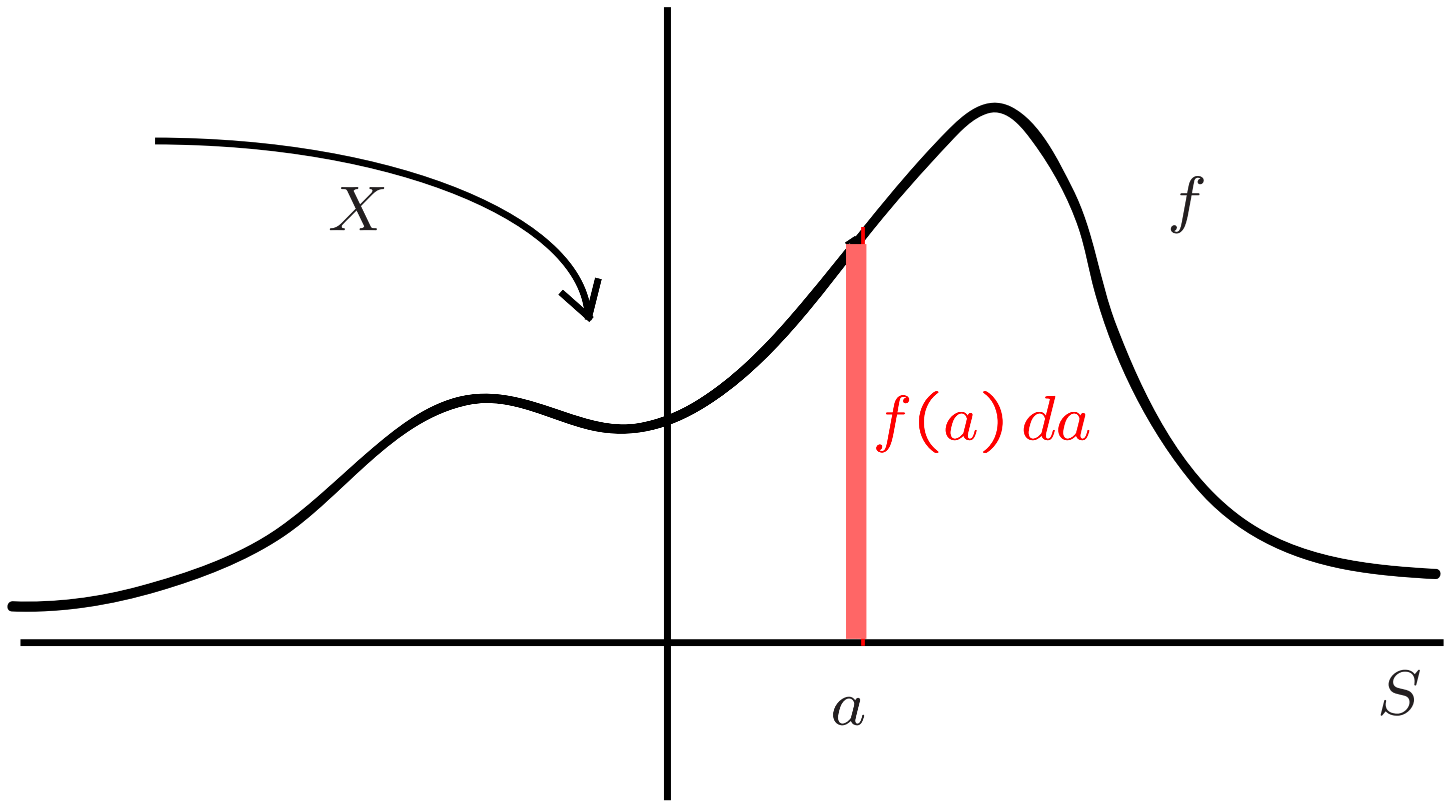
$$\int_S f(a)\,da = 1.$$

Die Bedingung $\int_S f(a)\, da = 1$ kann auch erfüllt sein, wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \;\; f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$





X
f
$f(a)\,da$
a
S

Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f\,:\,S \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a)\,da = 1\ .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [b, c]\big) = \int_b^c f(a)\, da \ ,$$

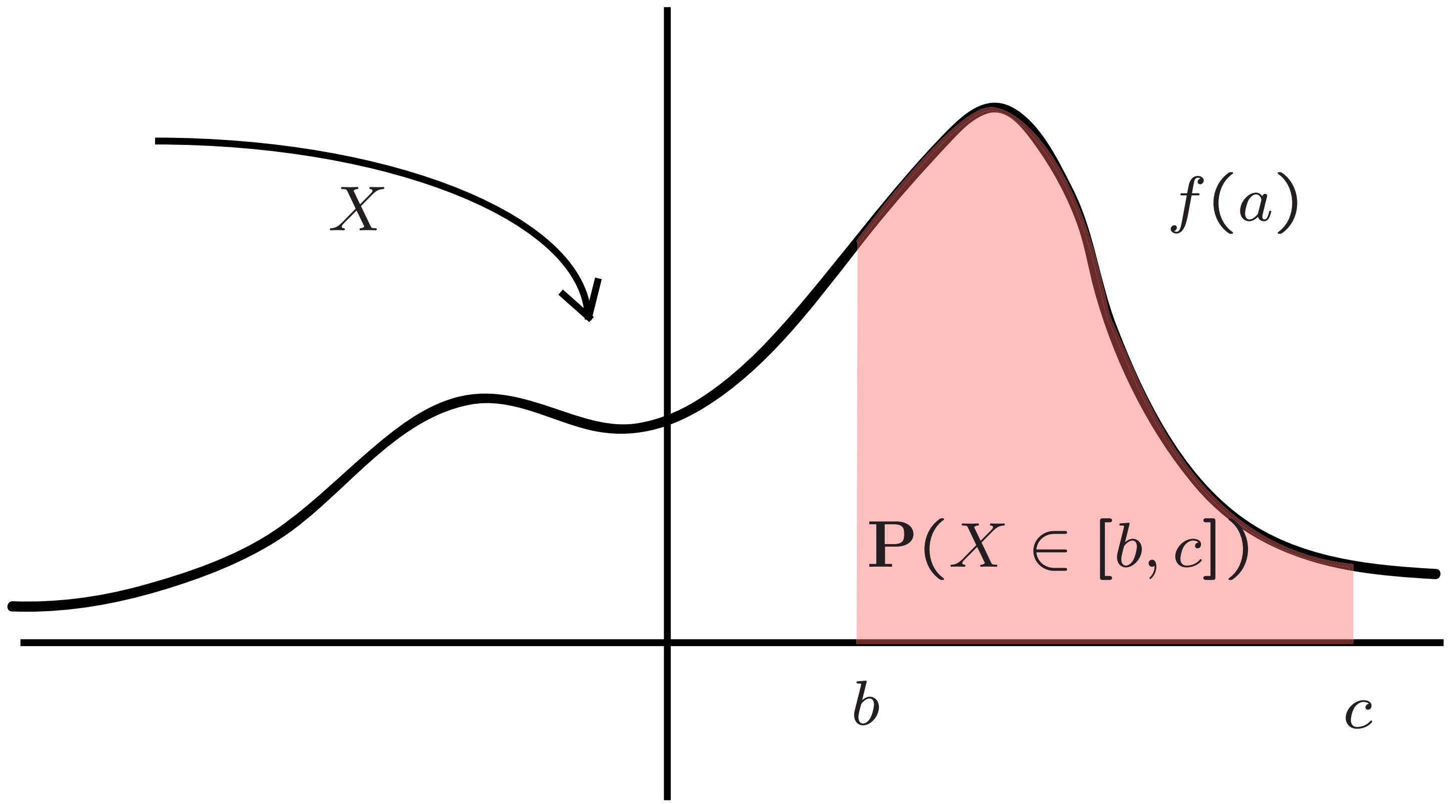
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \ , \quad a \in S \ ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.



X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [b, c])$
b
c

Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a)\,da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $b \le c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(b,c]} f(a)\,da = \int_{[b,c]} f(a)\,da = \int_b^c f(a)\,da.$$

Tatsächlich hat man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int_A f(a)\,da$ nicht nur für Intervalle A, sondern für eine viel größere Klasse von “messbaren Mengen” zur Verfügung.

Außerdem gilt für derartige paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ die “abzählbare Additivität” des Integrals:

$$\int_{\bigcup A_i} f(a)da = \sum_i \int_{A_i} f(a)\,da.$$

Das Stichwort ist das *Lebesgue-Integral*.
Es verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff, sodass Sie “für die Praxis” nicht umdenken müssen.

5. Verteilungsfunktionen

Wieder sei X eine S-wertige ZV'e mit S Intervall in $\mathbb{R}$.

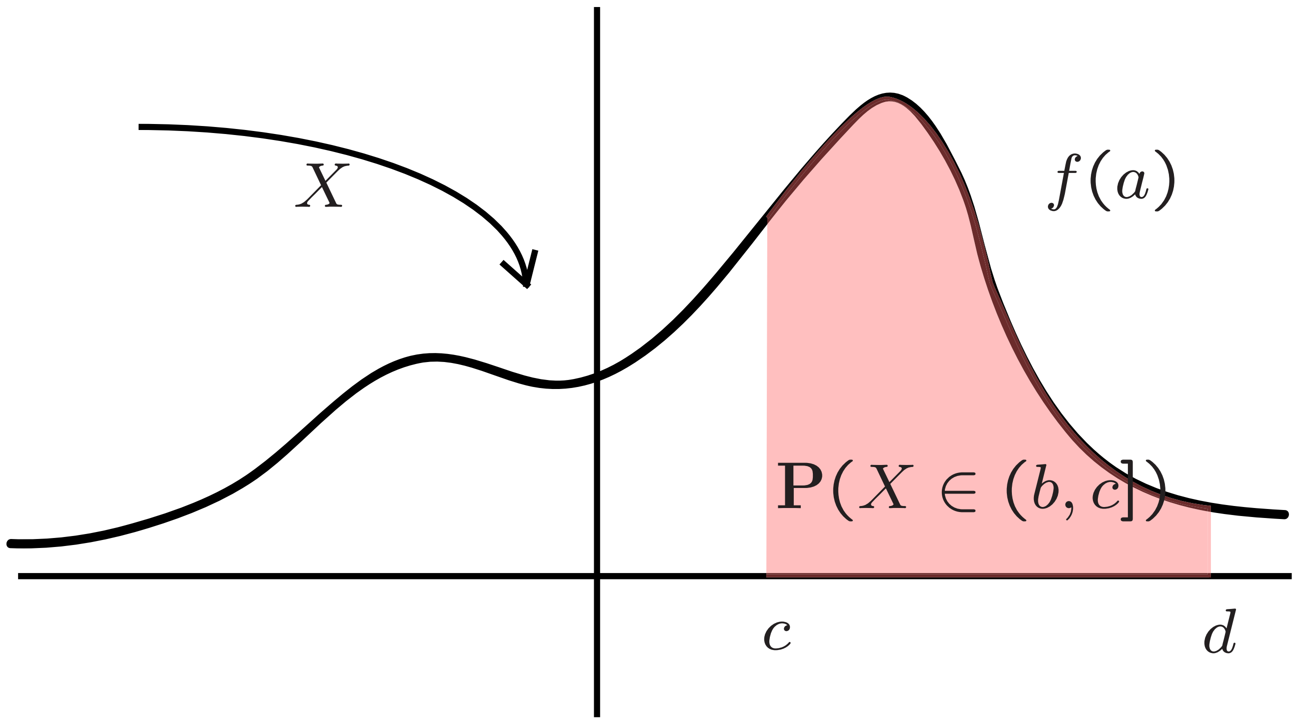
Die Funktion

$$F(b) := \mathbf{P}(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(a)\, da\ , \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Ist f stetig in a, dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$\mathbf{P}(X \leq c) - \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(b < X \leq c)$$
$$F(c) - F(b) = \int_b^c f(a)da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

6. Beispiele

A. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\quad \frac{1}{2}\, da, \;\; 0 \le a \le 2$.

B. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\dfrac{1}{r-l}\, da$, $\quad a \in S$.

C. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{b})$$

$$= \sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\, da, \quad 0 \le b \le 1.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & 0 < b \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

D. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{b})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\,da, \quad 0 < b \le 4.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \le b \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

E. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(-\ln U \le b)$$

$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-b}) = 1 - e^{-b} \overset{!}{=} \int_0^b f(a)\,da, \quad b \ge 0.$$

$$f(b) = \begin{cases} e^{-b}, & b \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

7. Die Standard-Exponentialverteilung:

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X \geq t) = e^{-t}, \;\; t \geq 0$$

Äquivalent dazu sind:

(i) X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a}\,da, \quad a \geq 0$

(ii) X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0 \end{cases}$$