Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

1. Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *(stochastisch)* *unabhängig*,

wenn für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel für Wahrscheinlichkeiten”)

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Zum Merken in Worten:

Unabhängig vom Ausgang von X_1

führt die Forderung des zusätzlichen Eintretens von

$\{X_2 \in A_2\}$

auf eine Reduktion der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X_1 \in A_1)$

um den Faktor $\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$.

Beispiel: Zweimaliges (gewöhnliches) Würfeln (X_1, X_2):

X_1 und X_2 sind unabhängig. In der Tat:

Seien $A_1, A_2 \subset \{1, \ldots, 6\}$ mit $\# A_1 =: m_1$, $\# A_2 =: m_2$.

Dann ist $\# A_1 \times A_2 = m_1 \cdot m_2$,

also

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \mathbf{P}((X_1, X_2) \in A_1 \times A_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{36} = \frac{m_1}{6} \cdot \frac{m_2}{6}$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\, \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Beispiel: Zweimaliges (gewöhnliches) Würfeln (X_1, X_2):

X_1 und X_2 sind unabhängig. In der Tat:

Seien $A_1, A_2 \subset \{1, \ldots, 6\}$ mit $\#A_1 =: m_1$, $\#A_2 =: m_2$.

Dann ist $\#A_1 \times A_2 = m_1 \cdot m_2$,

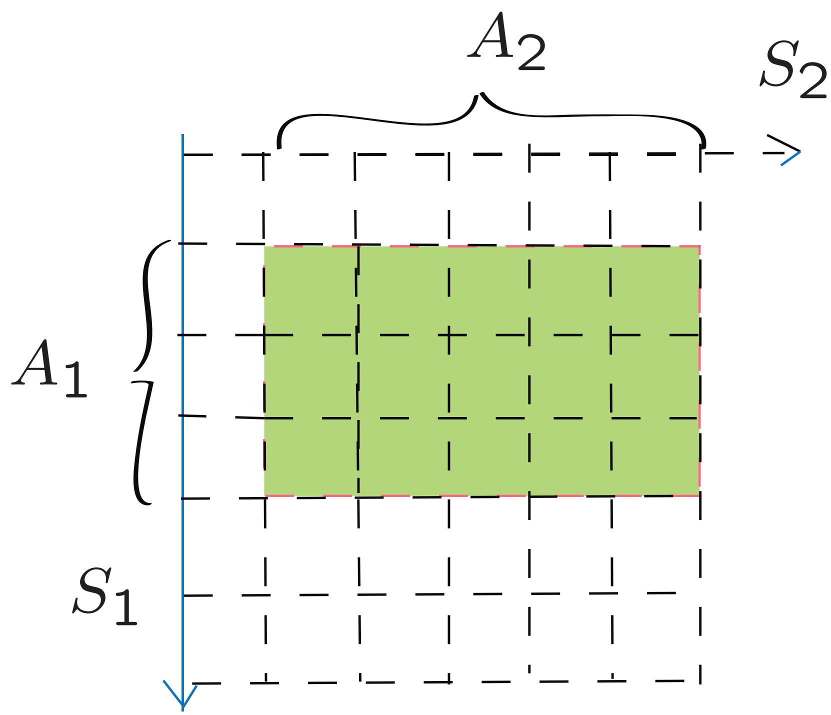
also

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \mathbf{P}((X_1, X_2) \in A_1 \times A_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{36} = \frac{m_1}{6} \cdot \frac{m_2}{6}$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$



$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$

Für diskrete Zufallsvariable gilt: X_1, X_2 sind unabhängig

genau dann,

wenn für alle $a_1 \in S_1$ und $a_2 \in S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

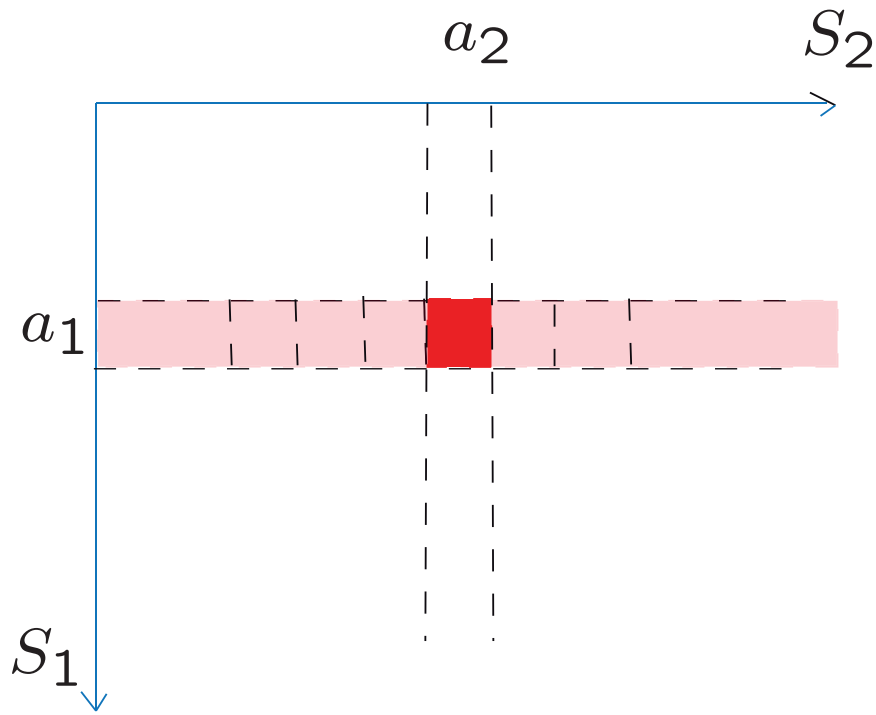
Denn:

"$\Longrightarrow$" ist klar (wähle $A_1 := \{a_1\}$, $A_2 := \{a_2\}$).

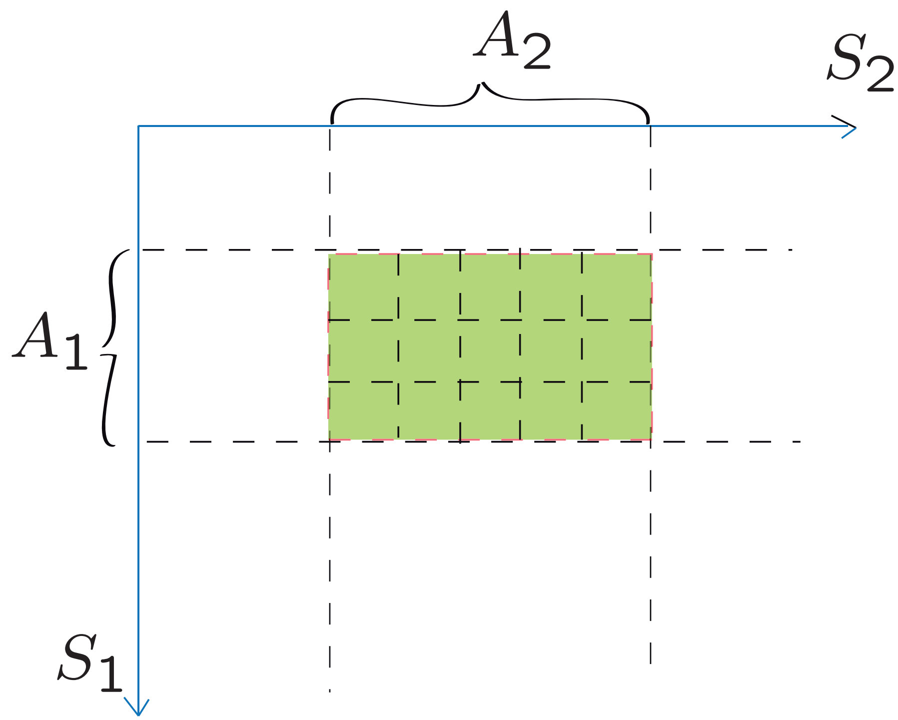
"$\Longleftarrow$": $\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$

$$= \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$



$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$

2. Produktformel für Erwartungswerte

Sind X_1, X_2 unabhängig mit Werten in S_1 bzw. S_2, dann gilt für Mengen $A_1 \subset S_1$, $A_2 \subset S_2$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)\mathbf{1}_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)]\,\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_2}(X_2)]$$

In Worten:

Der Erwartungswert des Produktes von $\mathbf{1}_{A_i}(X_i)$, $i = 1, 2$ ist das Produkt der Erwartungswerte.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,

und h_1, h_2 reellwertige “Verarbeitungen”, dann gilt:

Der Erwartungwert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$

ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2,

h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,

so folgt

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big] = \mathbf{E}\big[h_1(X_1)\big]\,\mathbf{E}\big[h_2(X_2)\big]\ .$$

("Produktformel für Erwartungswerte")

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\mathbf{E}\Big[h_1(X_1)h_2(X_2)\Big]$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)\,h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)\sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}\Big[h_1(X_1)\Big]\,\mathbf{E}\Big[h_2(X_2)\Big] \quad \square$$

3. Unabhängigkeit von mehreren Zufallsvariablen:

Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Zielbereichen $S_1, \ldots, S_n$

heißen

(stochastisch) *unabhängig*, falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$

folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) \ .$$

Unabhängigkeit von abzählbar unendlich vielen Zufallsvariablen:

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariaben.

Definition:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig

$:\Longleftrightarrow$ für jedes n sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Für diskrete Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$

ist die Unabhängigkeit geichbedeutend mit der

Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) \;=\; \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i.

4. Unabhängigkeit von Ereignissen

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow I_{E_1}, \ldots, I_{E_n}$ sind unabhängig.

Satz:

Dafür reicht aus, dass

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für alle $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.

Einen eleganten Beweis führt man über eine Rechnung mit Indikatorvariablen (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel), vgl. Buch Seite 67.

Korollar zum vorigen Satz:

Die Unahängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2

ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\,\mathbf{P}(E_2)$$

Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist

äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

a) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$

$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

b) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

(Z_1, Z_2) sei ein zweifacher $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$$E_1 := \{Z_1 = 1\},\ E_2 := \{Z_2 = 1\},$$
$$E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig,

aber nicht unabhängig.

In den Übungen werden wir ein Beispiel von drei Ereignissen E_1, E_2, E_3 sehen, die nicht unabhängig sind, aber für die

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

gilt.

5. Unabhängigkeit von Teilbeobachtungen

Sind X und Y unabhängig,

dann auch $g(X)$ und $h(Y)$.

Denn:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) \\ &= \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1), Y \in h^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(X \in g^{-1}(B_1))\mathbf{P}(Y \in h^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(g(X) \in B_1)\mathbf{P}(h(Y) \in B_2) \end{aligned}$$

Durch den Übergang zu “Teilbeobachtungen” $g(X)$ und $h(Y)$ können aber auch aus abhängigen Zufallsvariablen X, Y voneinander unabhängige Zufallsvariable $g(X)$, $h(Y)$ entstehen:

Gewisse Teilaspekte von abhängigen Zufallsvariablen

können unabhängig sein:

Beispiel: (X, Y) sei ein rein zufälliges Paar

verschiedener Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Offenbar sind X und Y nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X \in \{1, 6\}\}, \quad E_2 := \{1 \le Y \le 5\}.$$

sind unabhängig.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \tfrac{1}{5}\,, \mathbf{P}(E_2) = \tfrac{1}{2}\,, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \tfrac{4+5}{10\cdot 9} = \tfrac{1}{10}.$$

6. Positiv korrelierte Ereignisse

Was bedeutet die Beziehung

$$(*) \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2) \text{ ?}$$

Offenbar sind dann E_1 und E_2 nicht unabhängig.

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1$, $\mathbf{P}(E_2) =: p_2$. Dann ist

$$(*) \iff \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 p_2] > 0$$

$$\iff \mathbf{E}[I_{E_1} I_{E_2} - p_1 I_{E_2} - p_2 I_{E_1} + p_1 p_2] > 0$$

$$\iff \mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0.$$

E_1 und E_2 haben dann also die Tendenz,

gemeinsam einzutreten oder gemeinsam nicht einzutreten.

Man nennt solche Ereignisse E_1 und E_2 positiv korreliert.

7. Indirekte Abhängigkeiten

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.9$, und eine faire Münze (mit $\mathbf{P}(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen; die Ausgänge sind G, H für die gezinkten und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt, etwas für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

Vielleicht doch, denn:

Wenn F wie G ausfällt, fällt F eher als Kopf aus, und dann fällt wohl H auch eher so aus wie F ....

Hier ist eine mathematische Analyse:

(G,H) sei ein p-Münzwurf, F sei uniform verteilt auf $\{0,1\}$,

G,H,F seien unabhängig. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(G=F) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog:} \;\; \mathbf{P}(H=F) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(G=F, H=F) = (p^2+q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2+q^2 = \tfrac{1}{2}\big((p+q)^2 + (p-q)^2\big) = \tfrac{1}{2}(1+(p-q)^2) \geq \tfrac{1}{2},$$

mit “=” genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $\{G=F\}$ und $\{Y=F\}$ positiv korreliert!