

Vorlesung 4a

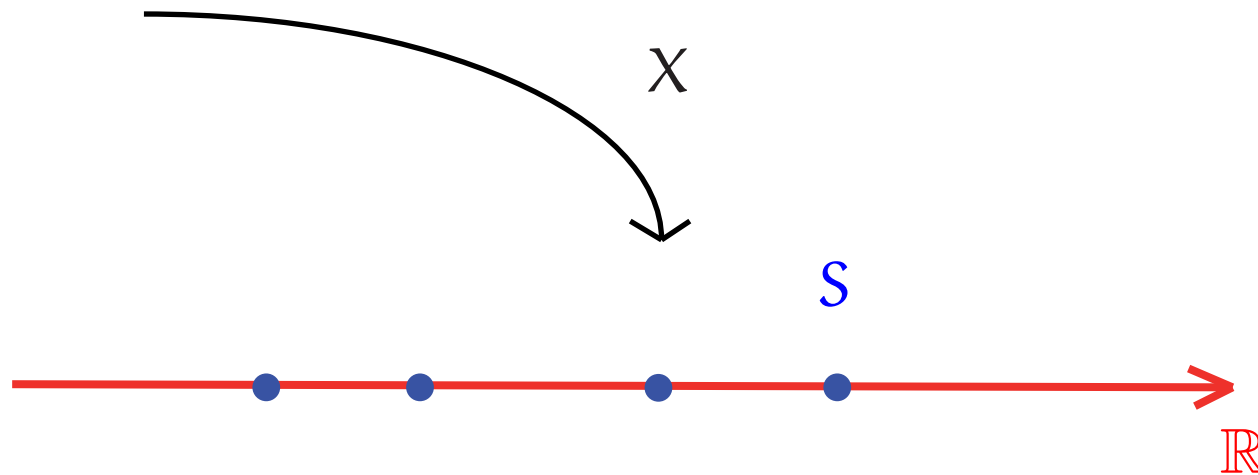
Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 2

0. Wiederholung

X sei eine **diskrete reellwertige** Zufallsvariable



$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) .$$

heißt *Erwartungswert* von X .

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

Additivität

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Wir werden sie in Kürze herleiten;

erst erinnern wir uns an die Anwendungsbeispiele aus VL 3a:

Ein prominenter Fall für die Anwendung ist

$$X = Z_1 + \cdots + Z_n,$$

wobei die Z_1, \dots, Z_n nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[Z_i] = \mathbf{P}(Z_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(Z_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(Z_n = 1) .$$

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei $\text{Bin}(n, p)$ verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = np$$

BEISPIEL 2

Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

X sei $\text{Hyp}(n, g, w)$ verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = n \frac{w}{g}$$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = p \quad \mathbf{P}(Z_i = 0) = q := 1 - p$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),
der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$$00000000 \quad R = 1$$

$$11100011 \quad R = 3$$

$$10101010 \quad R = 8$$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,
wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = qp + pq \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \dots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = 1 + 2pq(n - 1)$$

Gerade haben wir die Linearität des Erwartungswertes schon in Beispielen angewendet.

Wir werden sie gleich aus der Definition

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a)$$

herleiten.

Hilfreich dabei ist

eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 23).

1. Transformationsformel für den Erwartungswert

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$
und h eine Abbildung von S nach \mathbb{R}
(so dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen $h(X)$
wohldefiniert ist). Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) .$$

Die Idee ist einfach: anstatt
mit den Gewichten der Werte $b = h(a)$, $a \in S$ zu mitteln,
zerlegt man nach den Elementen $a \in h^{-1}(b)$
und mittelt mit deren Gewichten.

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in h(S)} b \mathbf{P}(h(X) = b) \\ &= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a) \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) . \quad \square \end{aligned}$$

2. Die Linearität des Erwartungswertes

- Beweis

Wir betrachten

zwei diskrete reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2 ,
die gemeinsam in einem Zufallsexperiment auftreten
und sich damit zu einem zufälligen Paar (X_1, X_2)
zusammenfassen lassen.

Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist dann auch

$$c_1X_1 + c_2X_2$$

eine diskrete reellwertige Zufallsvariable.

Satz [Linearität des Erwartungswertes]

(Buch S. 52)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1\mathbf{E}[X_1] + c_2\mathbf{E}[X_2], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Den Beweis führen wir hier nur für *diskrete* Zufallsvariable,
und zwar über die Transformationsformel mit $h(a_1, a_2) := c_1a_1 + c_2a_2$.

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$$h(a_1, a_2) := c_1 a_1 + c_2 a_2:$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (c_1a_1 + c_2a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (c_1 a_1 + c_2 a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (c_1a_1 + c_2a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (c_1a_1 + c_2a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ c_2 \mathbf{E}[X_2]$$

□

3. Zwei weitere fundamentale Eigenschaften
des Erwartungswerts:
Positivität und Monotonie:

(vgl. Buch S. 55)

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend damit, dass der

Wertebereich von X eine Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ ist.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert eine abzählbare Teilmenge S des Wertebereichs mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

$$(i) \mathbf{E}[X] \geq 0,$$

$$(ii) \mathbf{E}[X] = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

Für diese Menge S gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) = 0 + \sum_{a \in S: a > 0} a \mathbf{P}(X = a),$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

$$(i) \mathbf{E}[X] \geq 0,$$

$$(ii) \mathbf{E}[X] = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

Für diese Menge S gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S: a > 0} a \mathbf{P}(X = a),$$

woraus sich beide Aussagen ergeben. \square

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

$$\text{folgt } \mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0. \quad \square$$

4. Die Ungleichung von Markov

X reellwertige Zufallsvariable mit $X \geq 0$, $c > 0$.

Dann gilt $c\mathbf{1}_{[c, \infty)}(a) \leq a$, $a \geq 0$, und daher

$$cI_{\{X \geq c\}} \leq X.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{X \geq c\}}] \leq \mathbf{E}[X]$$

$$\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[X]$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov**.

5. Zur Wohldefiniertheit des Erwartungswertes

Wie kann es sein, dass für eine
diskrete reellwertige Zufallsvariable X
mit $\mathbf{P}(X \in S)$, S abzählbar,
die Summe $\sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a)$ nicht wohldefiniert ist?

Ein Beispiel: $\mathbf{P}(X = (-2)^n) := 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$

Dann ist
$$\sum_{n \in \{1, 3, \dots\}} -2^n \mathbf{P}(X = -2^n) = -\infty$$

und
$$\sum_{n \in \{2, 4, \dots\}} 2^n \mathbf{P}(X = 2^n) = +\infty.$$

Aber die Summe von $-\infty$ und $+\infty$ gibt keinen Sinn!

Wenn wir sagen

*Die diskrete reellwertige Zufallsvariable X
hat einen wohldefinierten Erwartungswert*

meinen wir, dass nicht zugleich

$$\sum_{a \in S, a > 0} a \mathbf{P}(X = a) \text{ und } \sum_{a \in S, a < 0} |a| \mathbf{P}(X = a)$$

Unendlich sein dürfen.

6. Zusammenfassung des Wichtigsten

A.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum a \mathbf{P}(X = a)$$

und

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” X_1, X_2, \dots

B.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

C.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$