Vorlesung 3

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

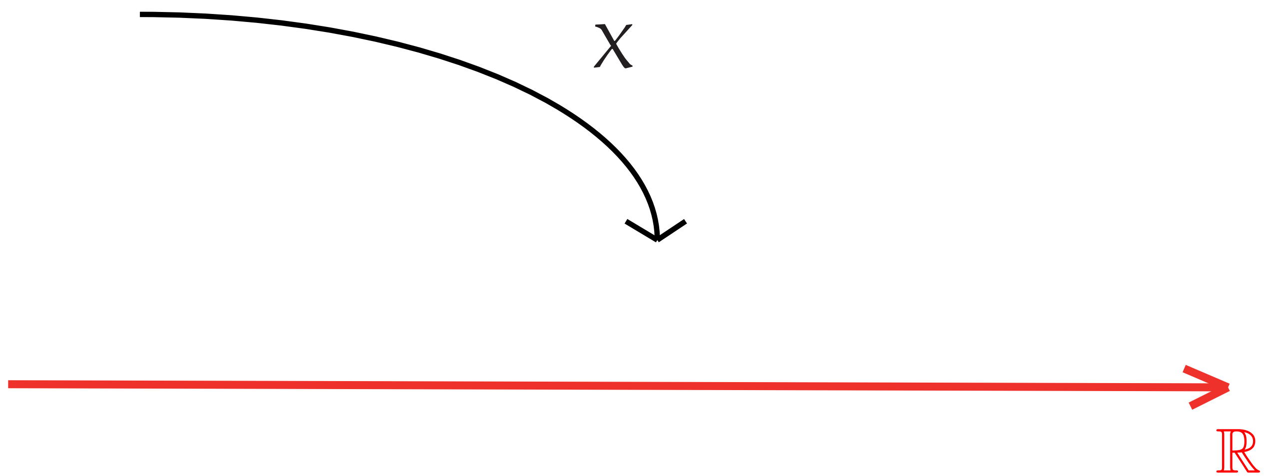
0. Diskrete reellwertige Zufallsvariable

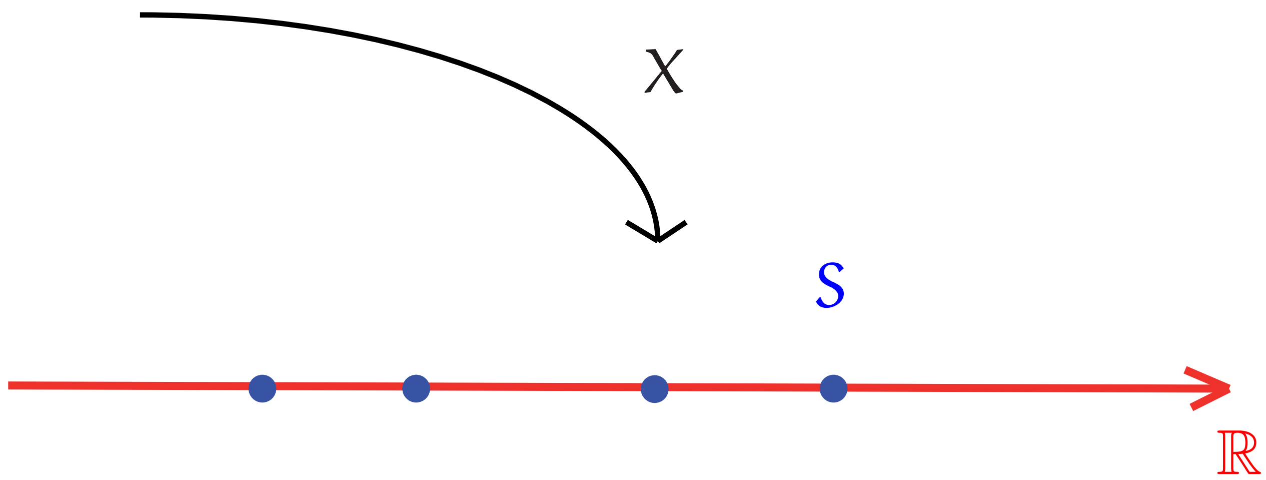
X sei eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$

ist.

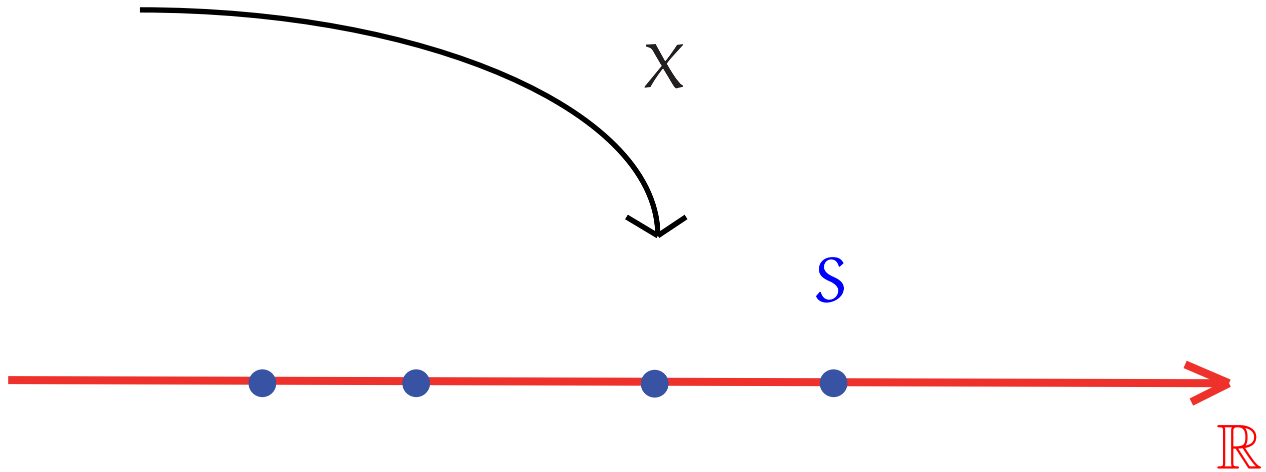




Außerdem existiere eine

endliche oder abzählbar unendliche Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$



Wir sagen dann:

X ist eine diskrete reellwertige Zufallsvariable

1. Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

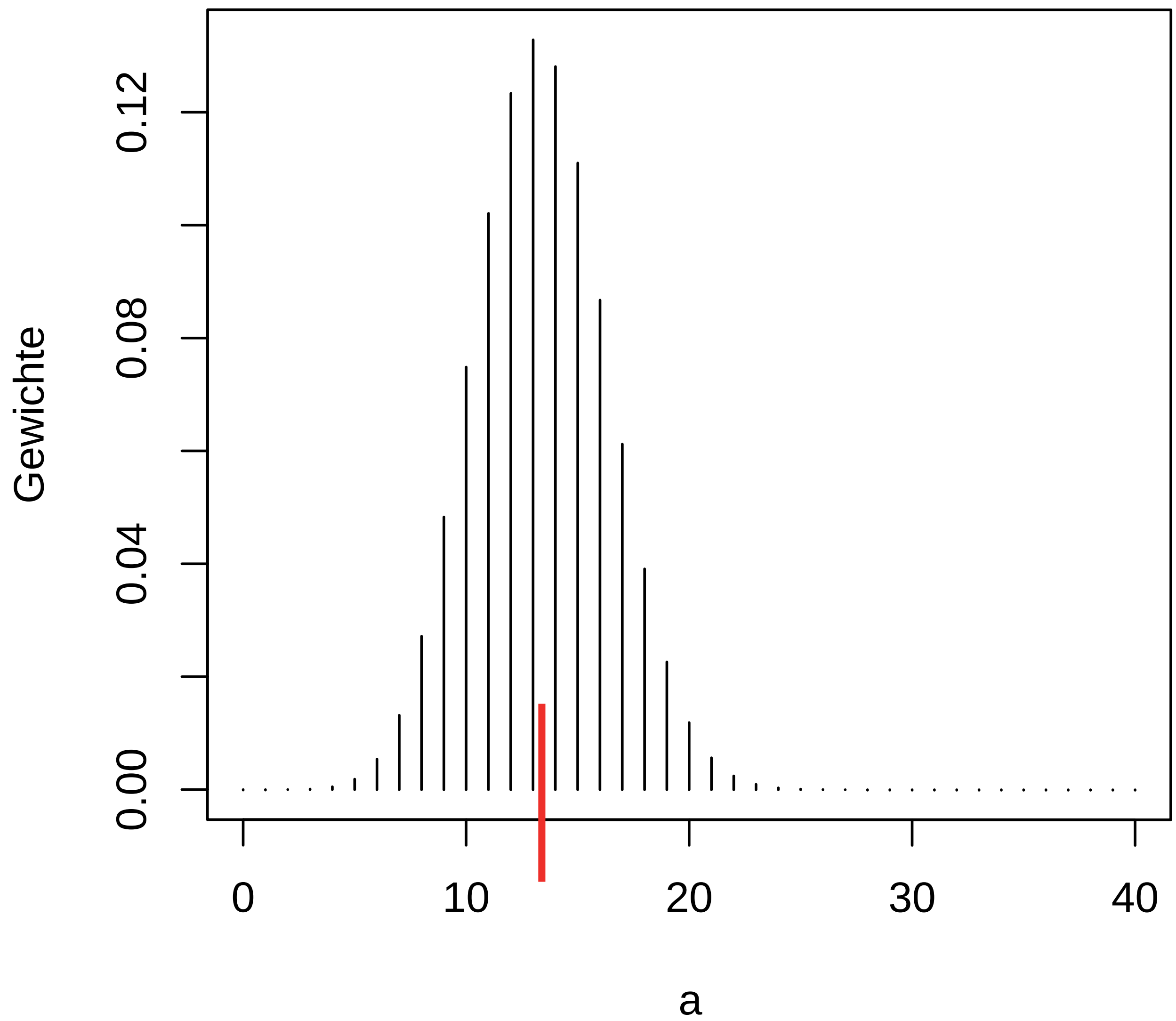
ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel

der möglichen Werte von X:

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}(X = a) \; .$$

Man spricht vom *Erwartungswert* von X.

(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X.)



Gewichte
0.00
0.04
0.08
0.12
0
10
20
30
40
a

Das elementarste Beispiel:

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Man erinnere sich an die Situation der ersten Stunde:

Rein zufällige Wahl eines Punktes aus dem Quadrat,

die Teilmenge A hat den Flächenanteil p;

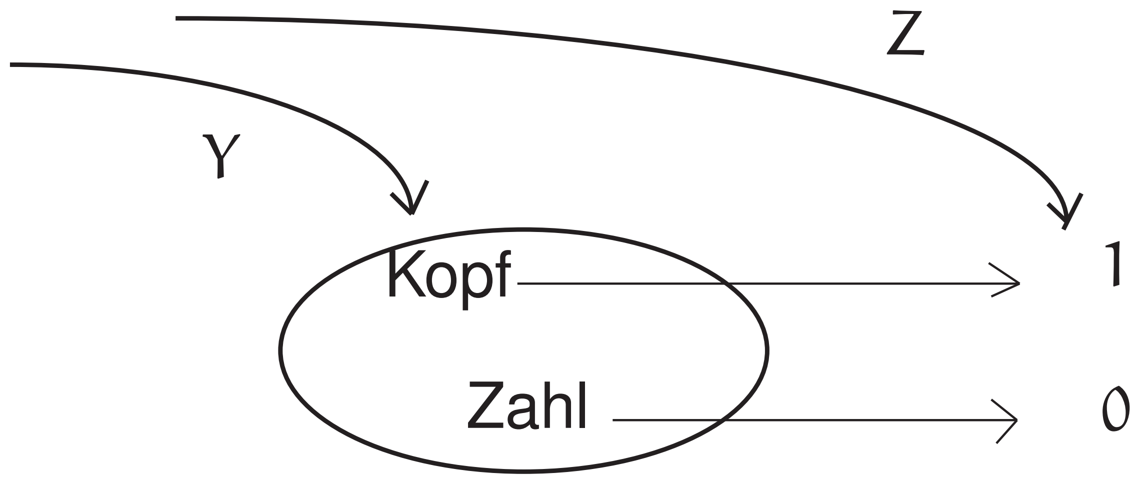
gezählt wird, wenn der Punkt in A fällt.

Das elementarste Beispiel:

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[Z] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

Dieses Beispiel entspricht dem einfachen Münzwurf:



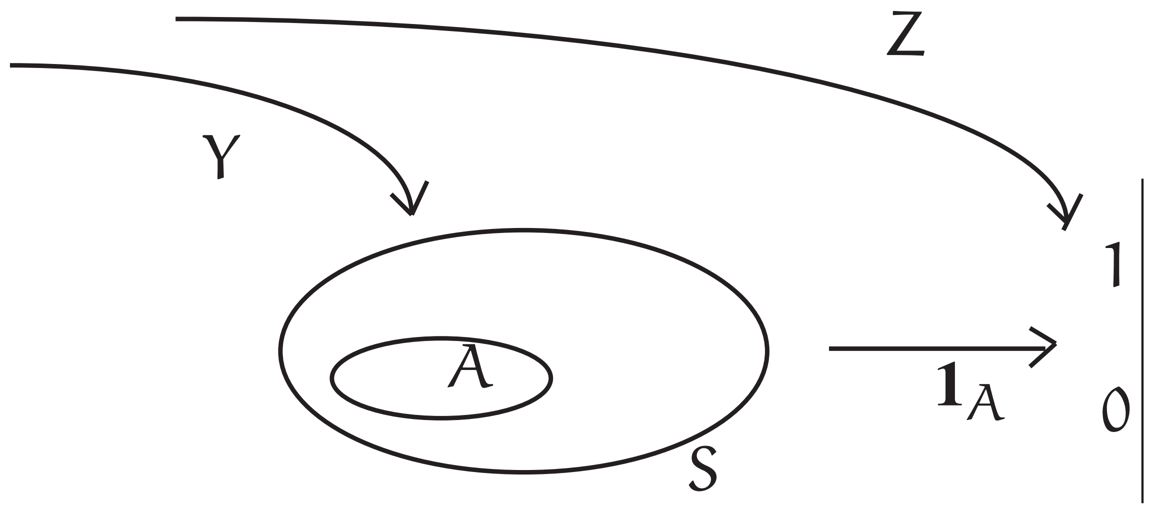
$$\{Y = \text{Kopf}\} = \{Z = 1\}$$

Man sagt auch:

Z ist die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y = \text{Kopf}\}$

$$Z = I_{\{Y=\text{Kopf}\}}, \qquad \mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Y = \text{Kopf}).$$

Oder in unserem Logo der ersten Stunde:



$$\{Y \in A\} = \{Z = 1\}$$

Man sagt auch:

Z ist die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

$$Z = \mathrm{I}_{\{Y \in A\}}, \qquad \mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Für allgemeines diskretes, reellwertiges X hatten wir

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a \, \rho(a)$$

mit $\rho(a)$:= Verteilungsgewichte von X

Wohlgemerkt:

Der Erwartungswert der Zufallvariablen X

hängt nur von deren Verteilung ρ ab.

Synonym sprechen wir daher auch manchmal vom

Erwartungswert der Verteilung ρ .

$$X$$

eine Zufallsgröße;

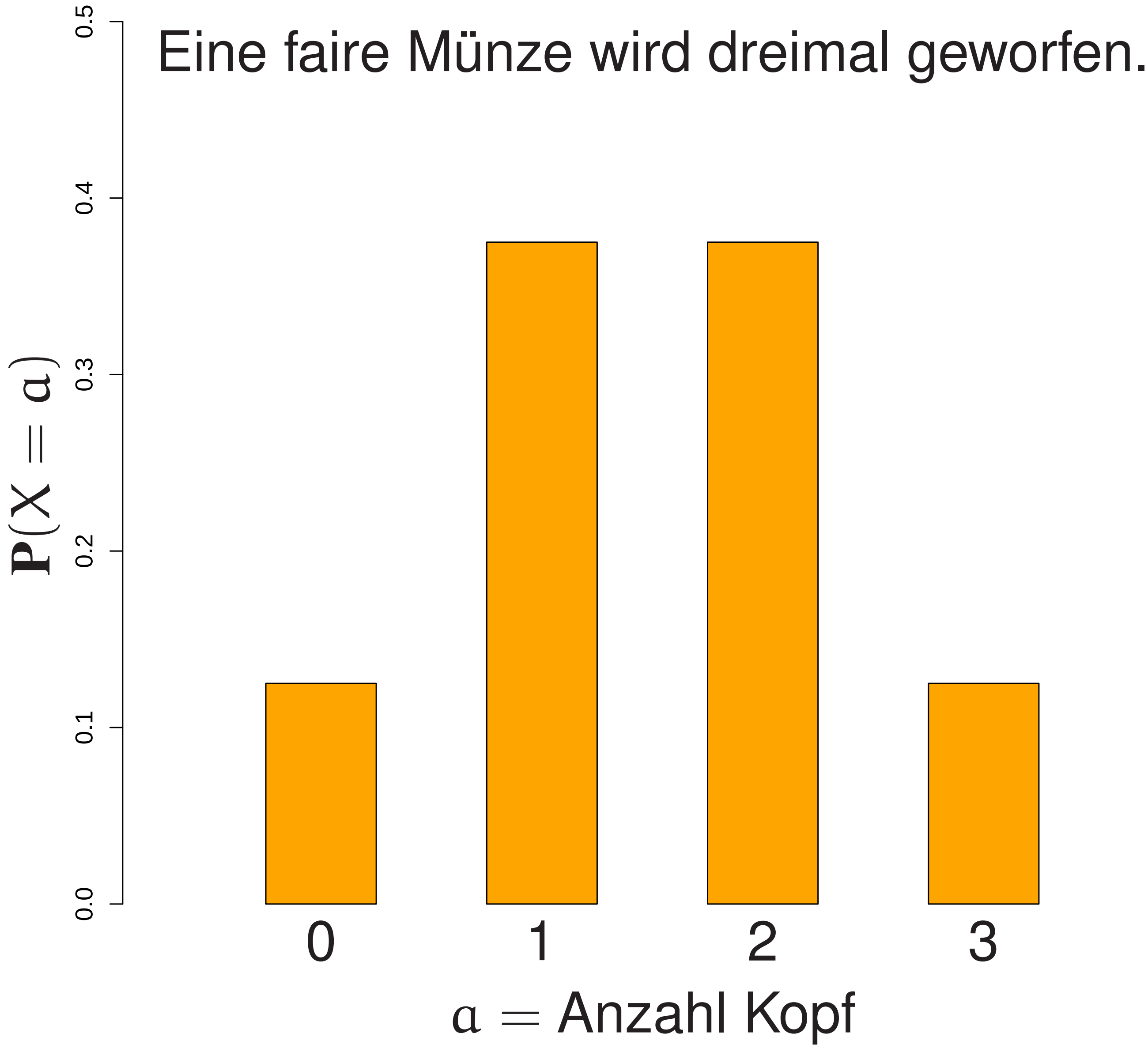
$$\mathbf{E}[X]$$

eine Zahl.

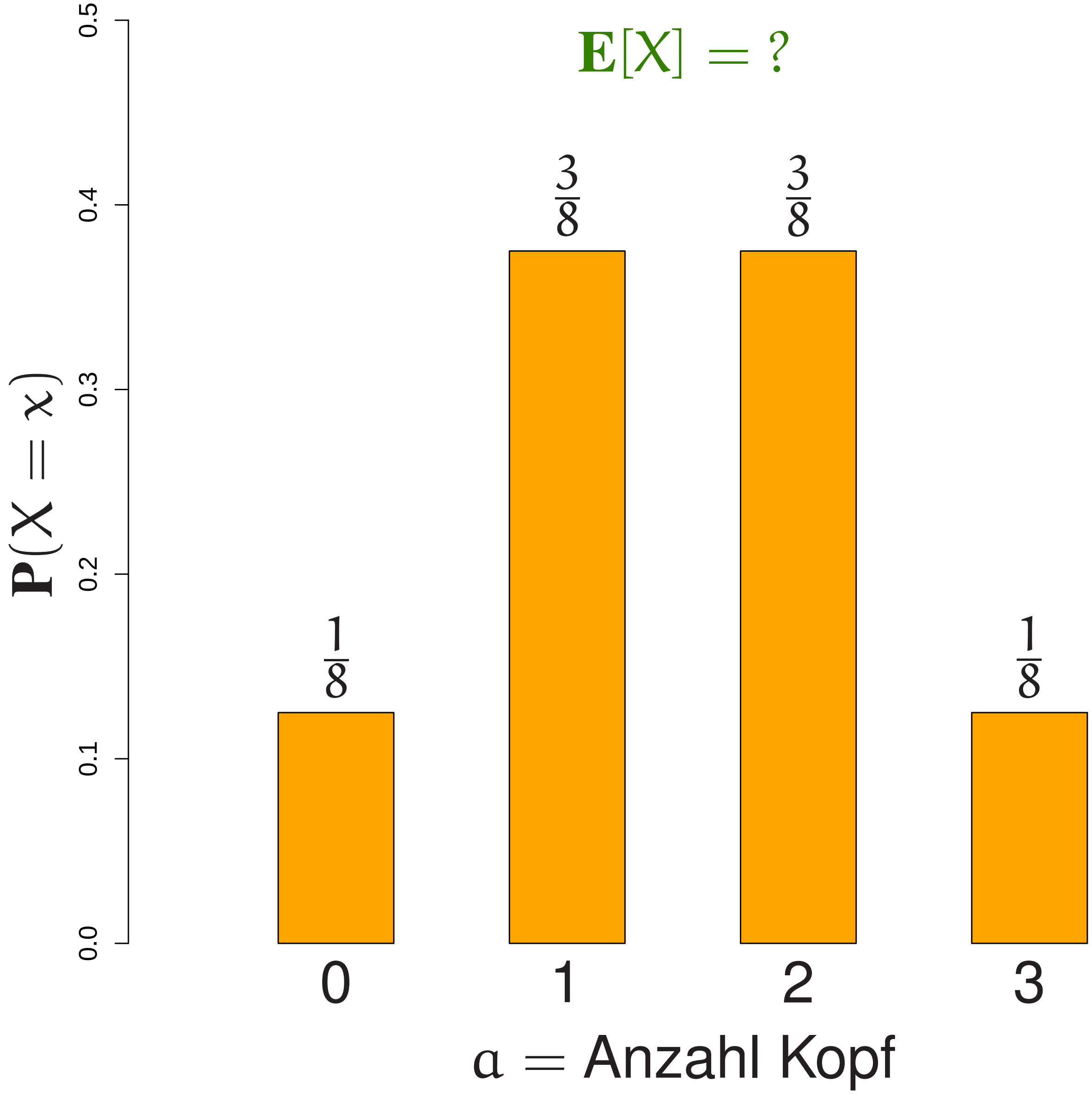
2. Ein Beispiel: Der Erwartungswert der Anzahl der Erfolge beim dreifachen Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

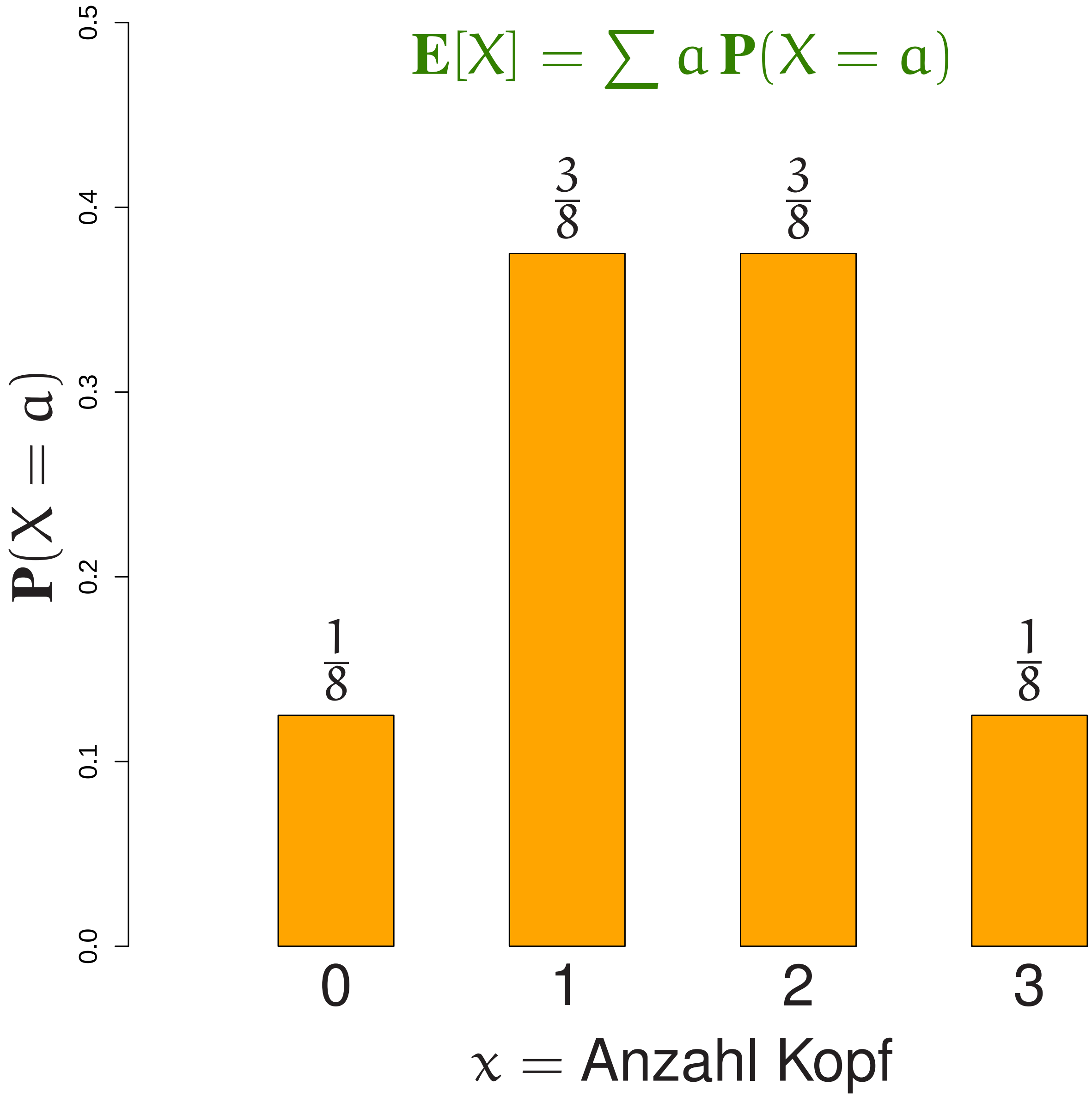
$X :=$ Anzahl der geworfenen Köpfe.

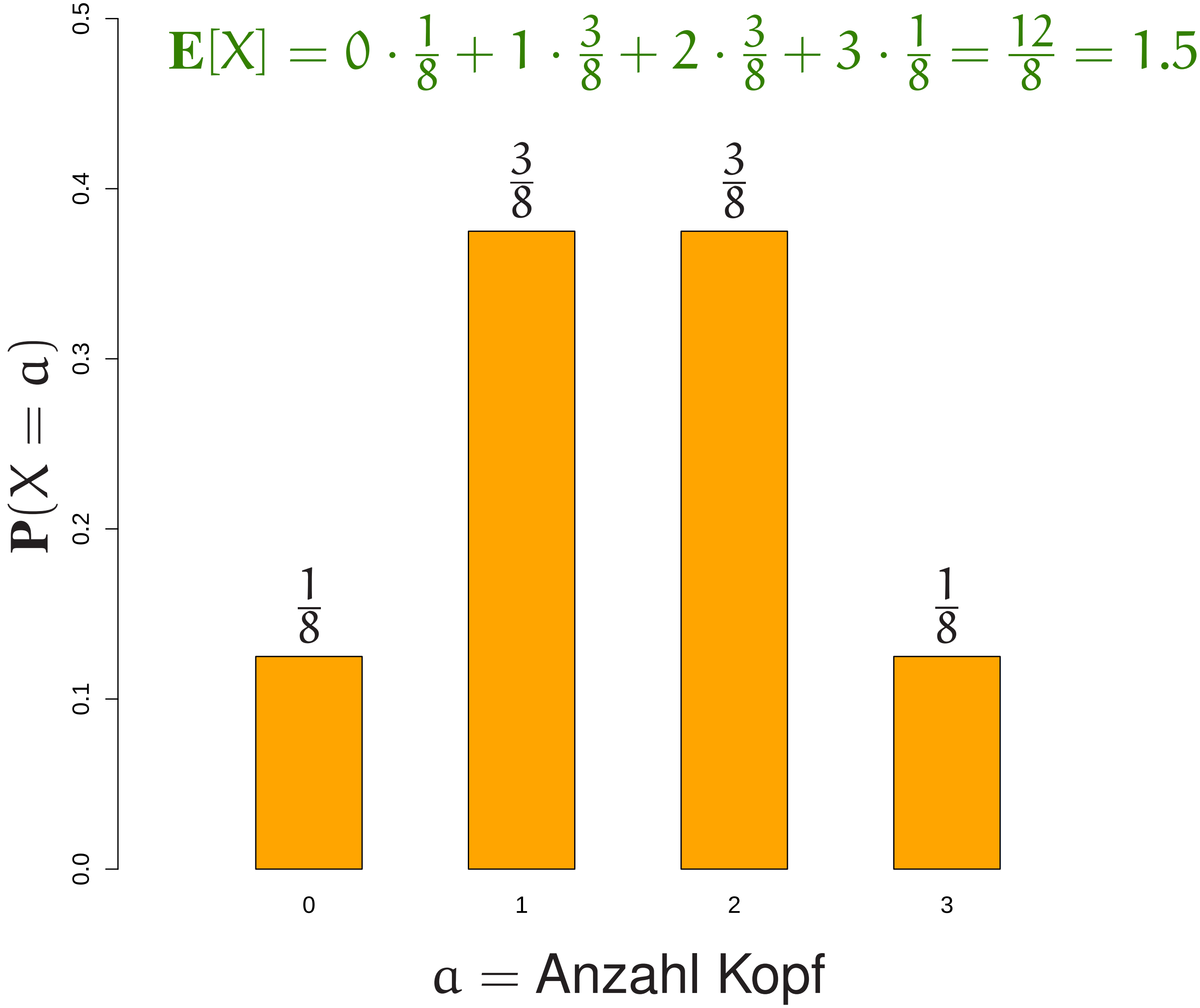


Eine faire Münze wird dreimal geworfen.
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = a)$
0
1
2
3
a = Anzahl Kopf

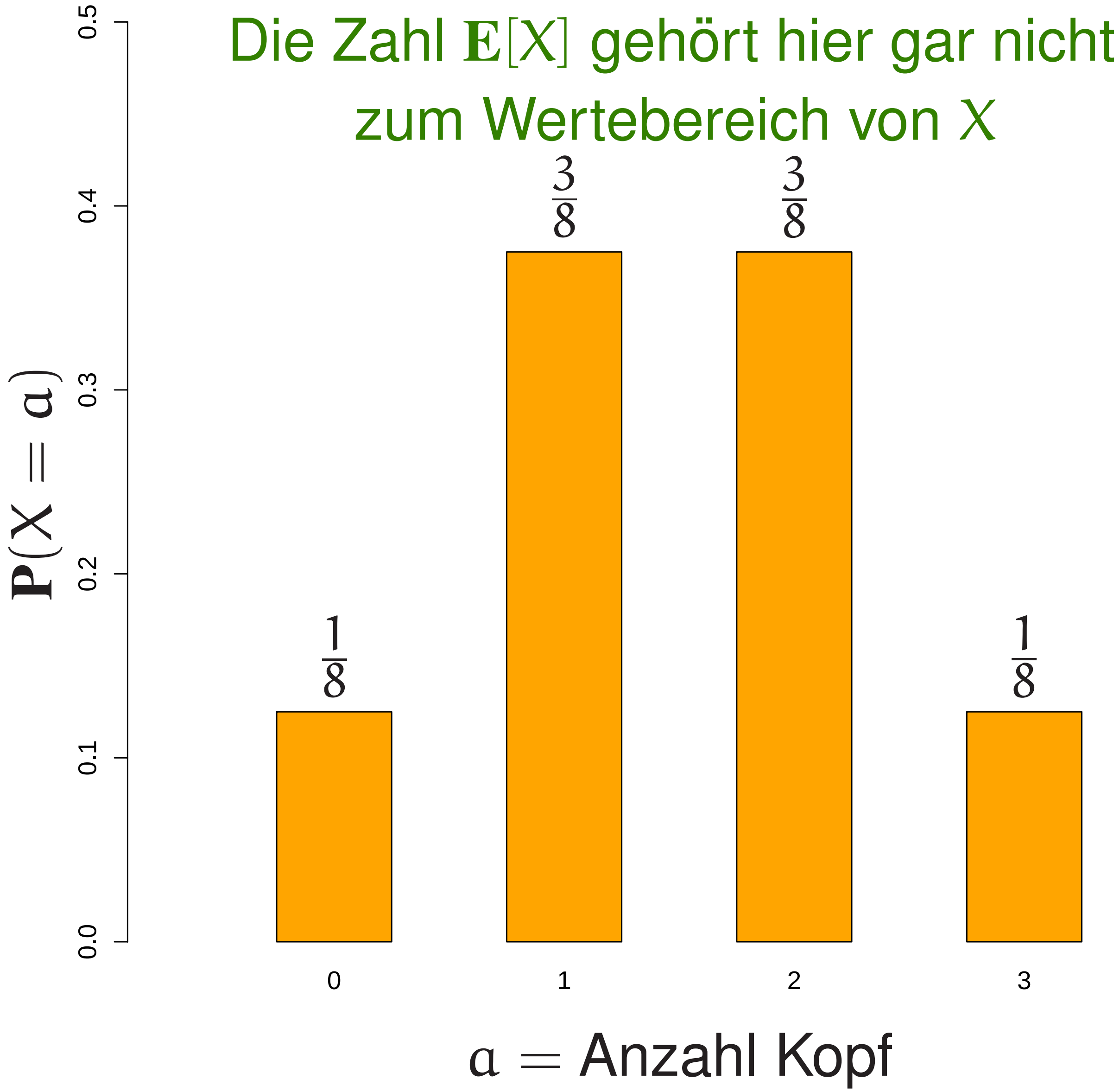


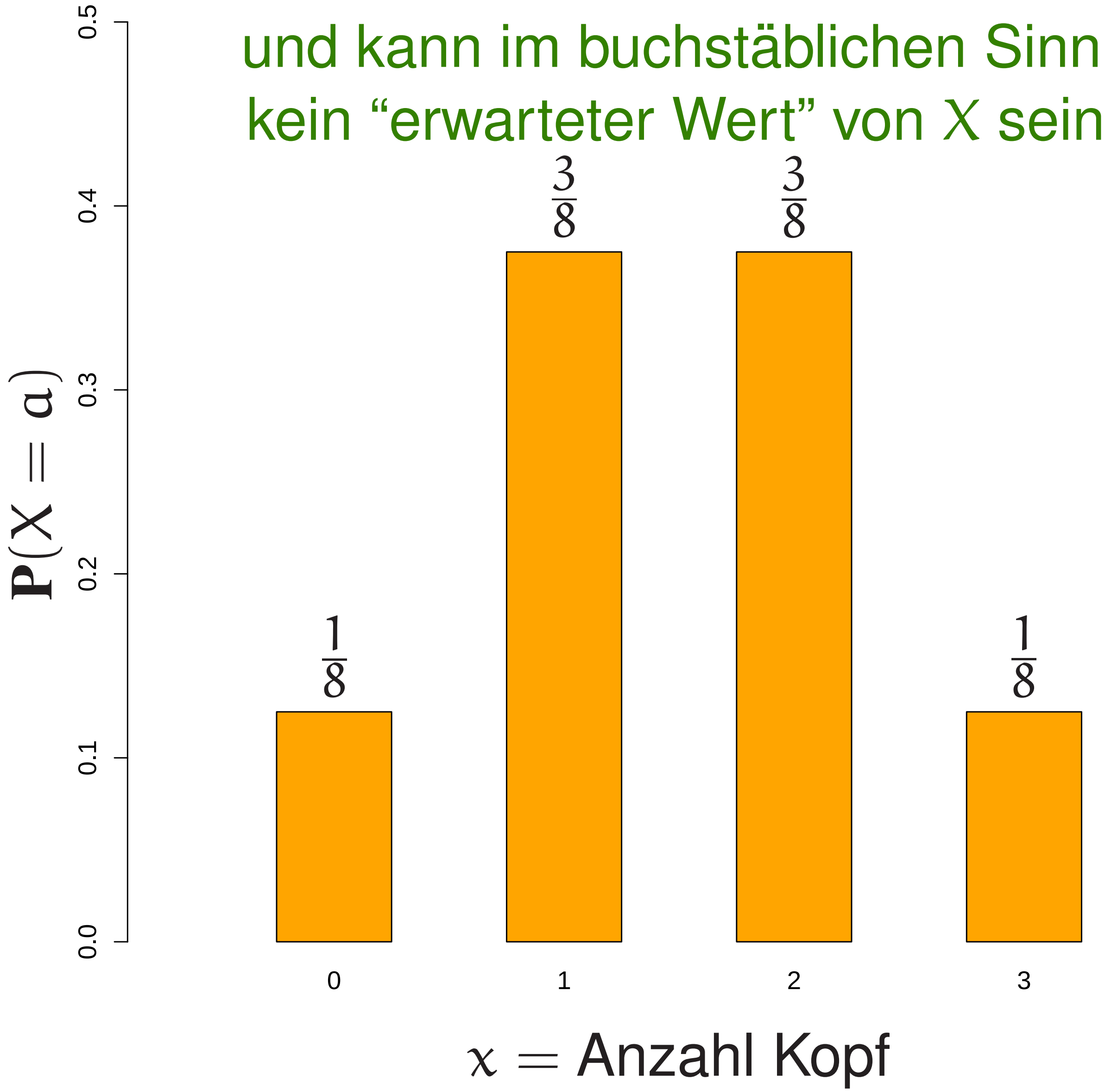
$\mathbf{E}[X] = ?$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
a = Anzahl Kopf


$\mathbf{E}[X] = \sum a\,\mathbf{P}(X = a)$
$\mathbf{P}(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

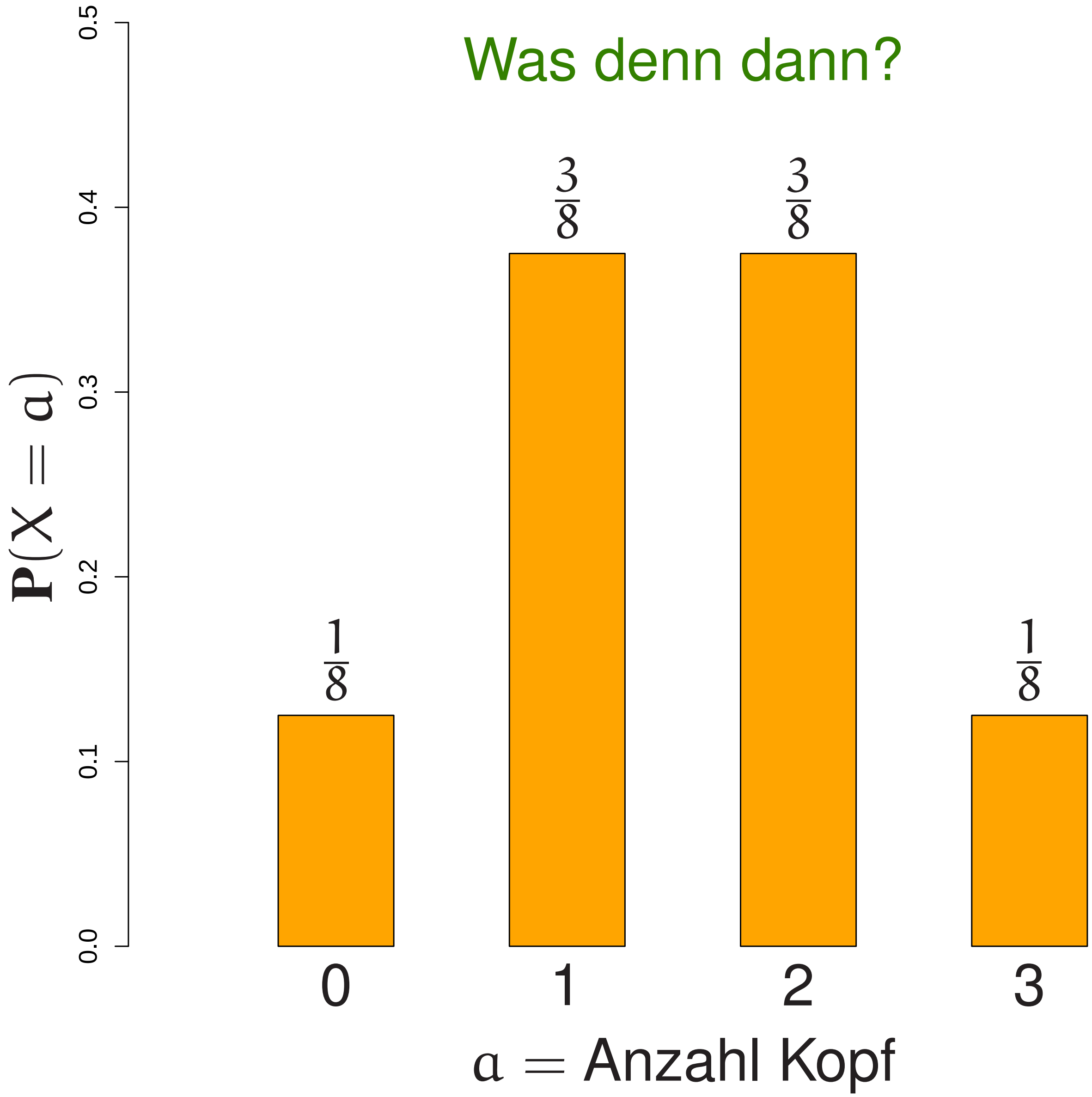


$\mathbf{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
$a =$ Anzahl Kopf


Die Zahl $\mathbf{E}[X]$ gehört hier gar nicht zum Wertebereich von X
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = a)$
0
1
2
3
a = Anzahl Kopf

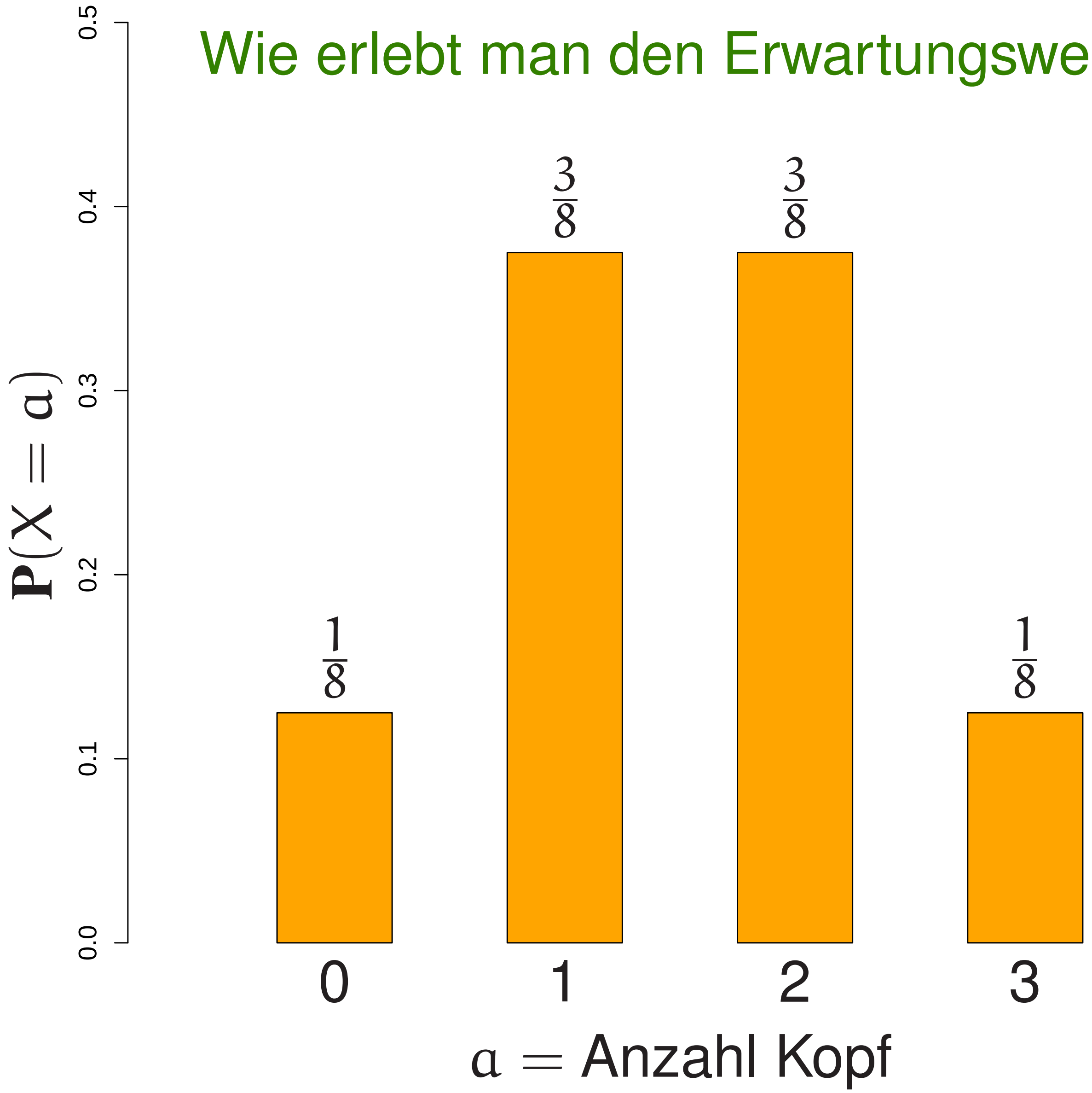


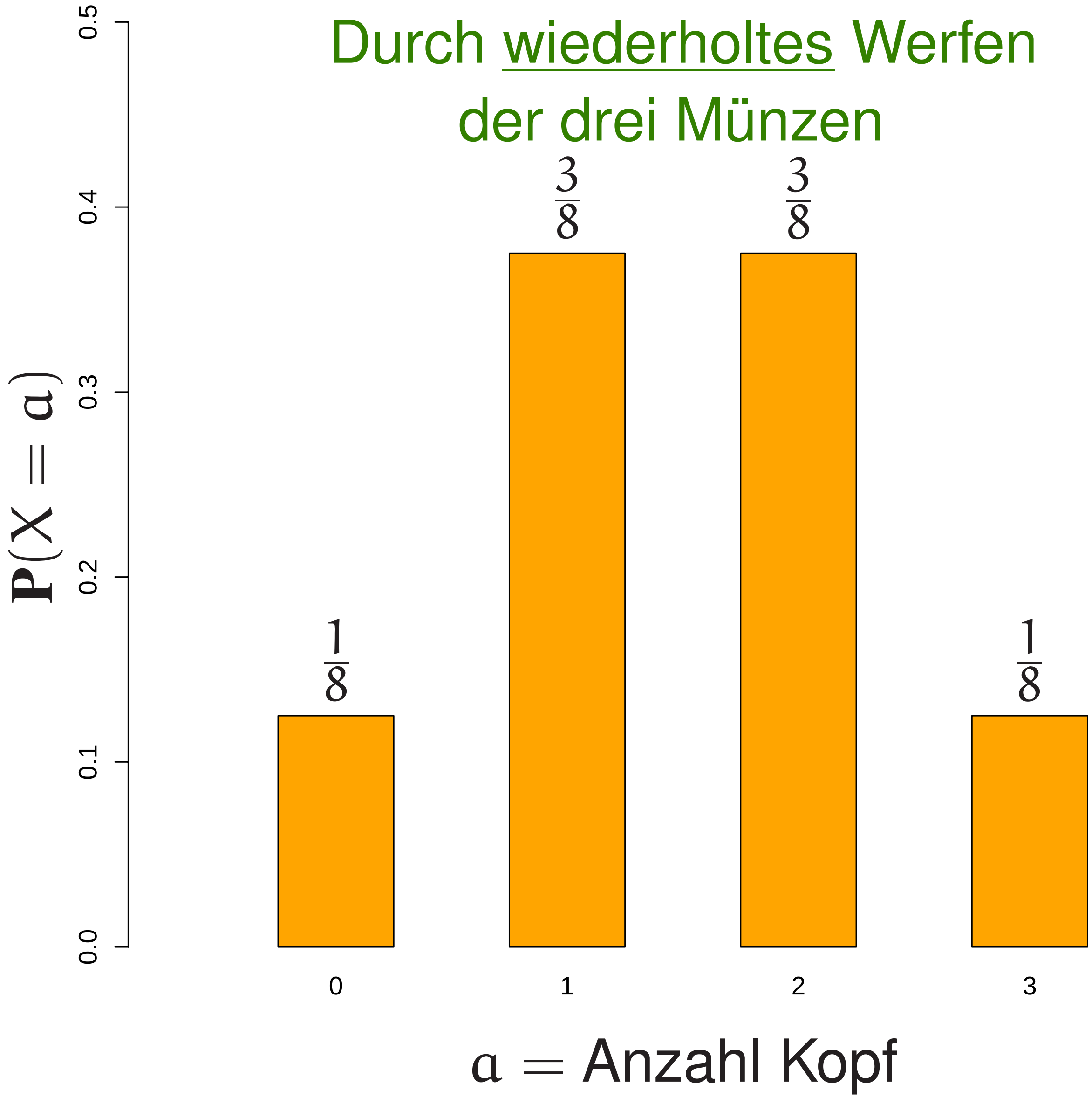
und kann im buchstäblichen Sinn
kein “erwarteter Wert” von X sein
$P(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf



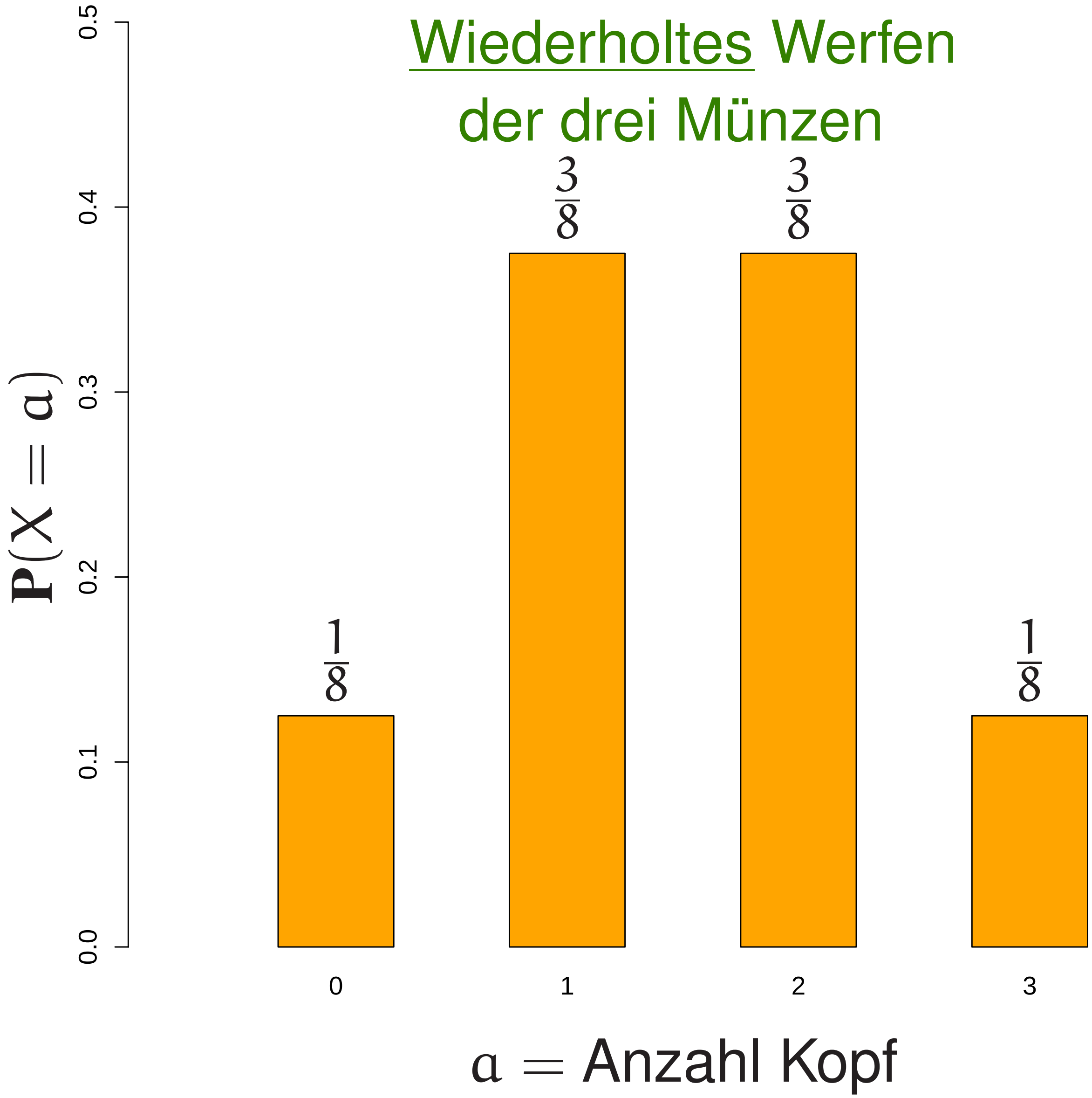
Was denn dann?
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = a)$
0
1
2
3
a = Anzahl Kopf

Wie erlebt man den Erwartungswert?

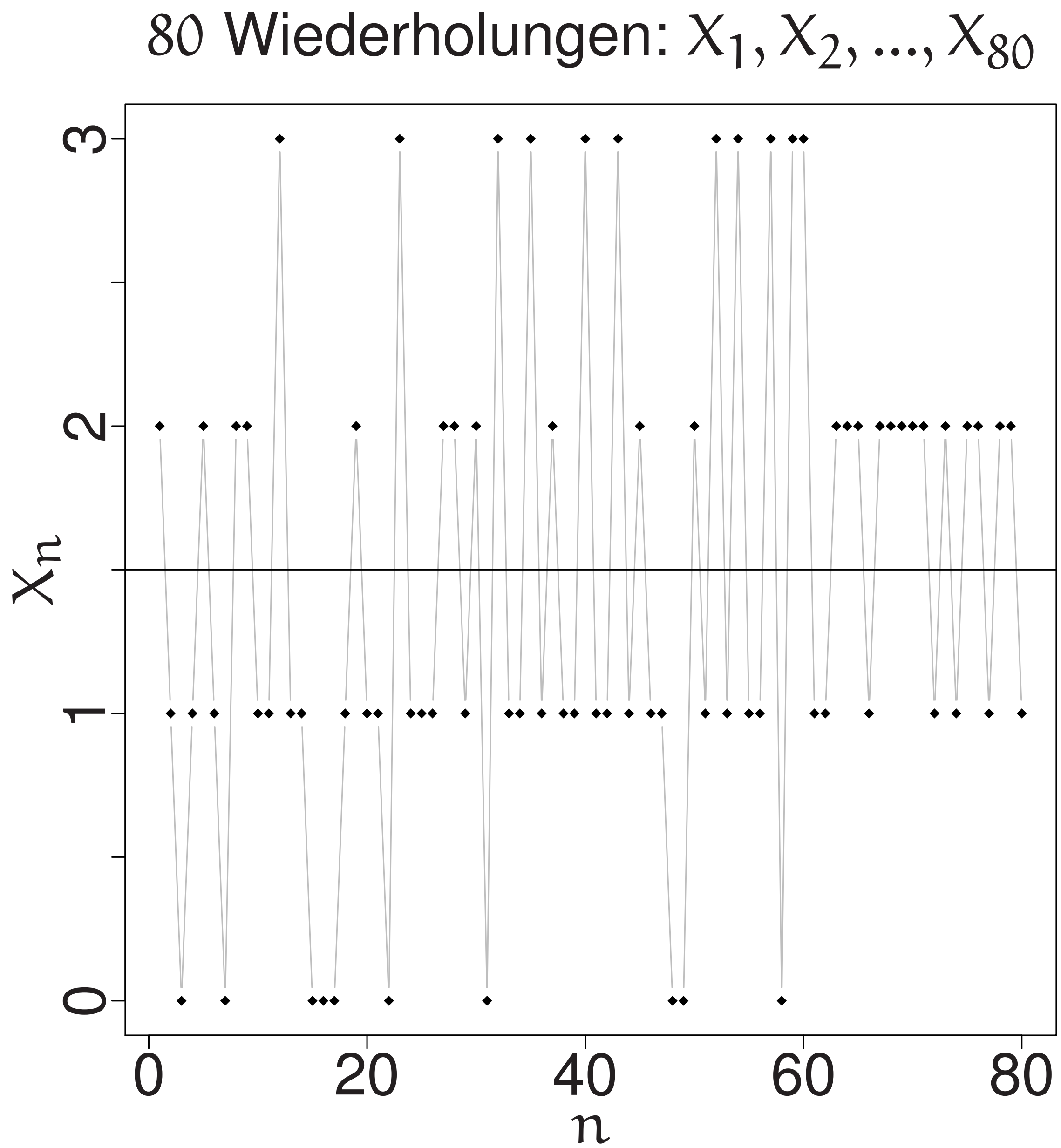



Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = a)$
0
1
2
3
a = Anzahl Kopf

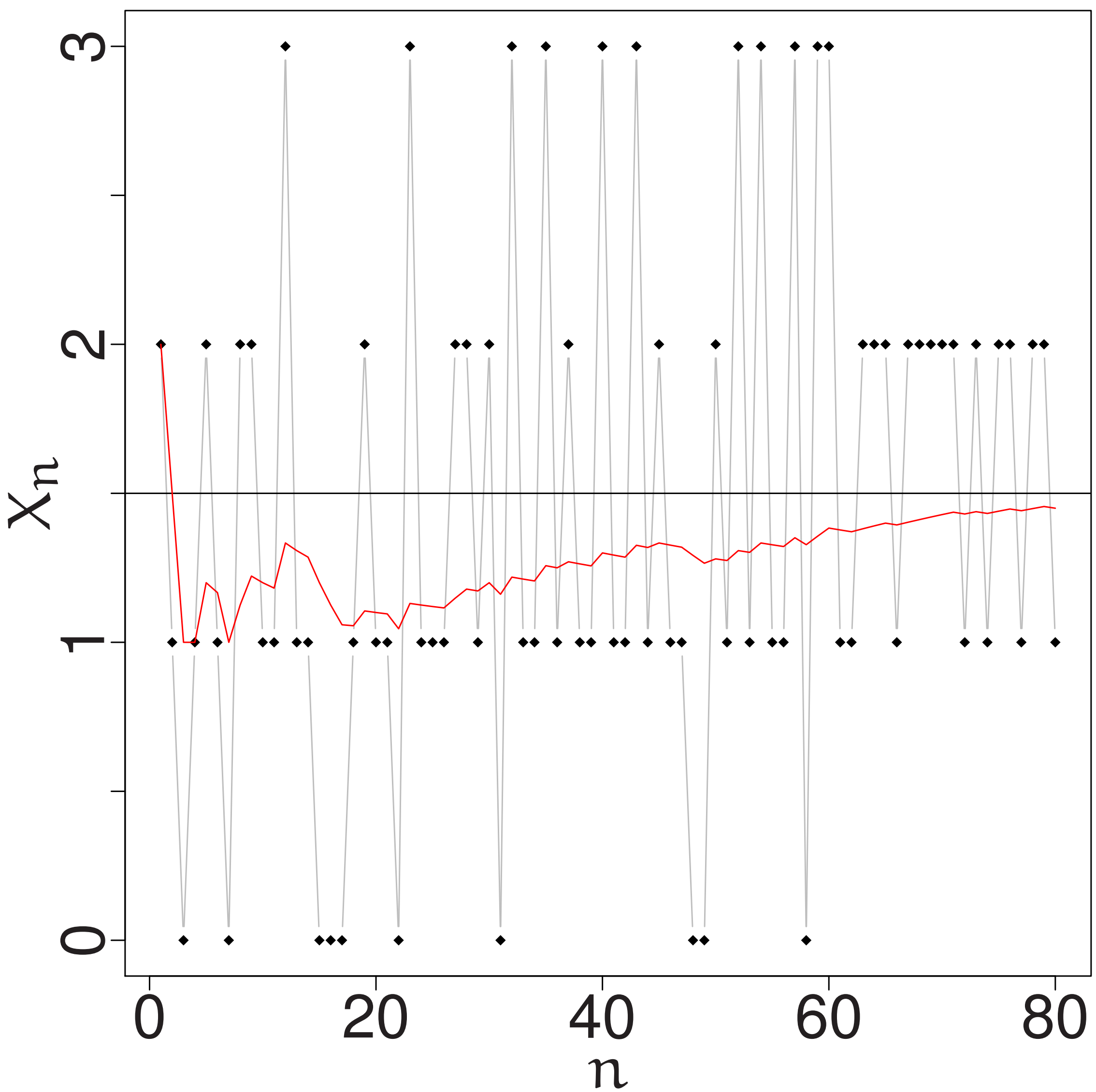
3. Der Erwartungswert als Langzeitmittel

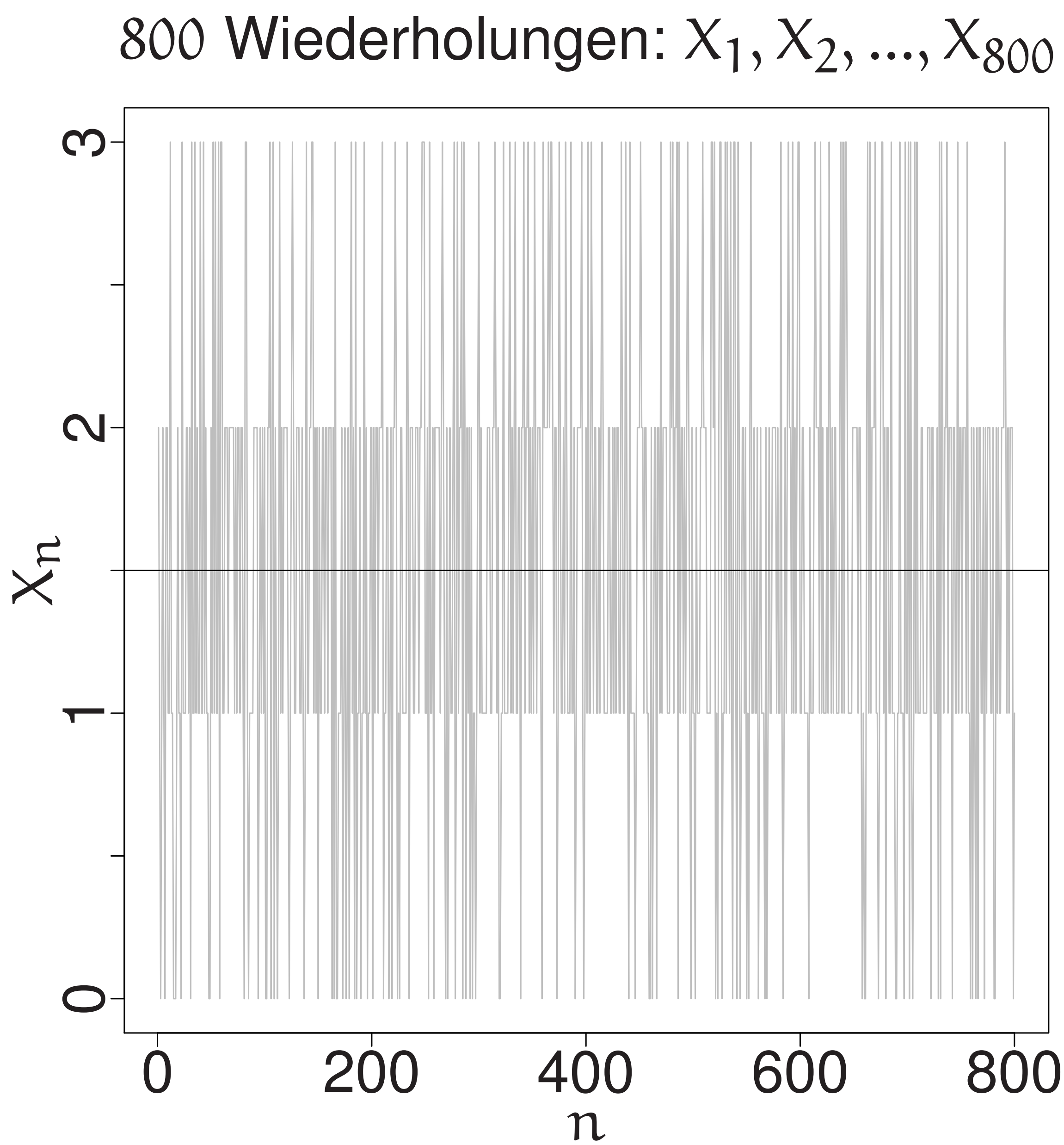


Wiederholtes Werfen der drei Münzen
P(X = a)
a = Anzahl Kopf
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
1/8
3/8
3/8
1/8


80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$
X_n
0
1
2
3
0
20
40
60
80
n

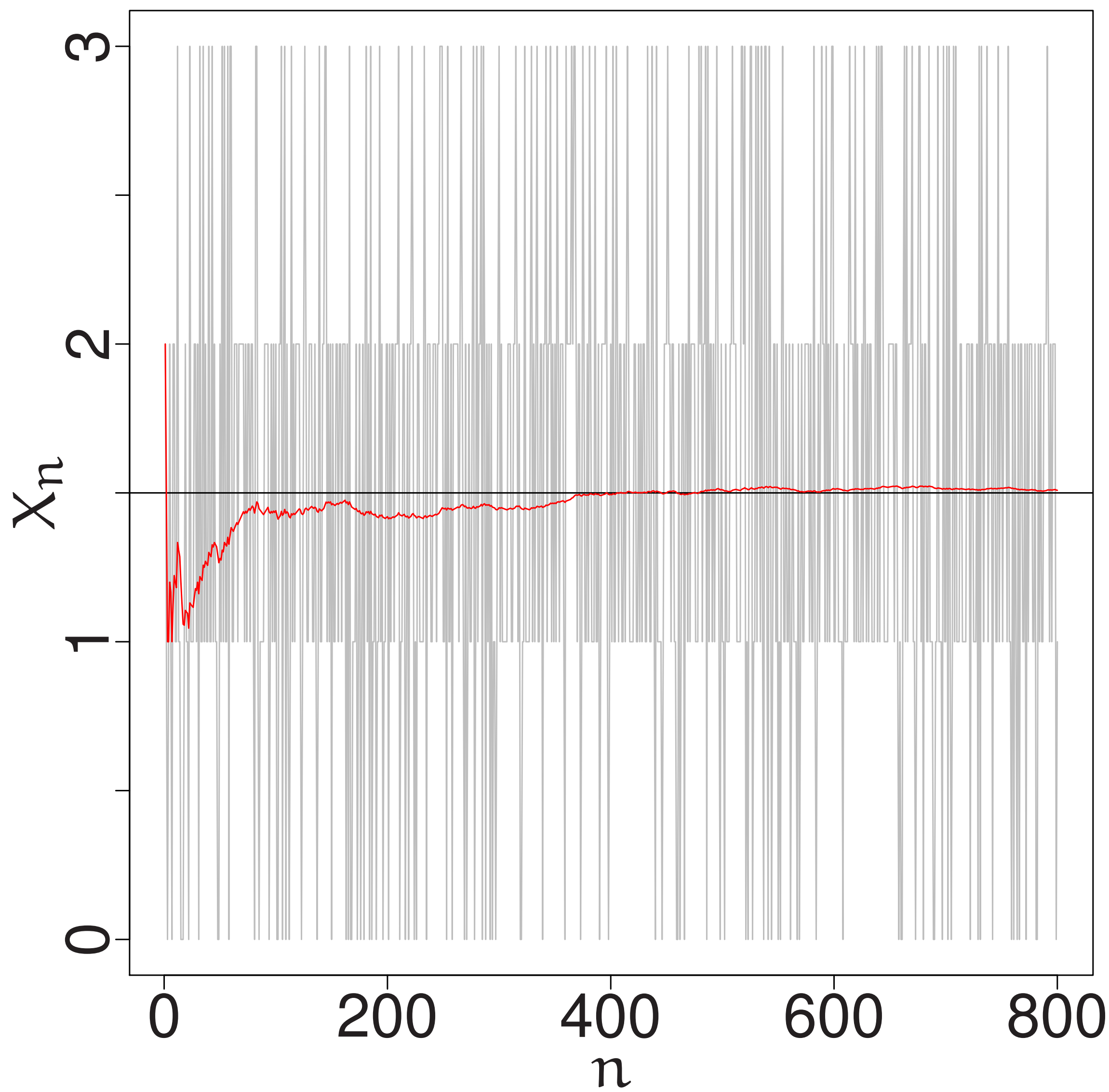
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$

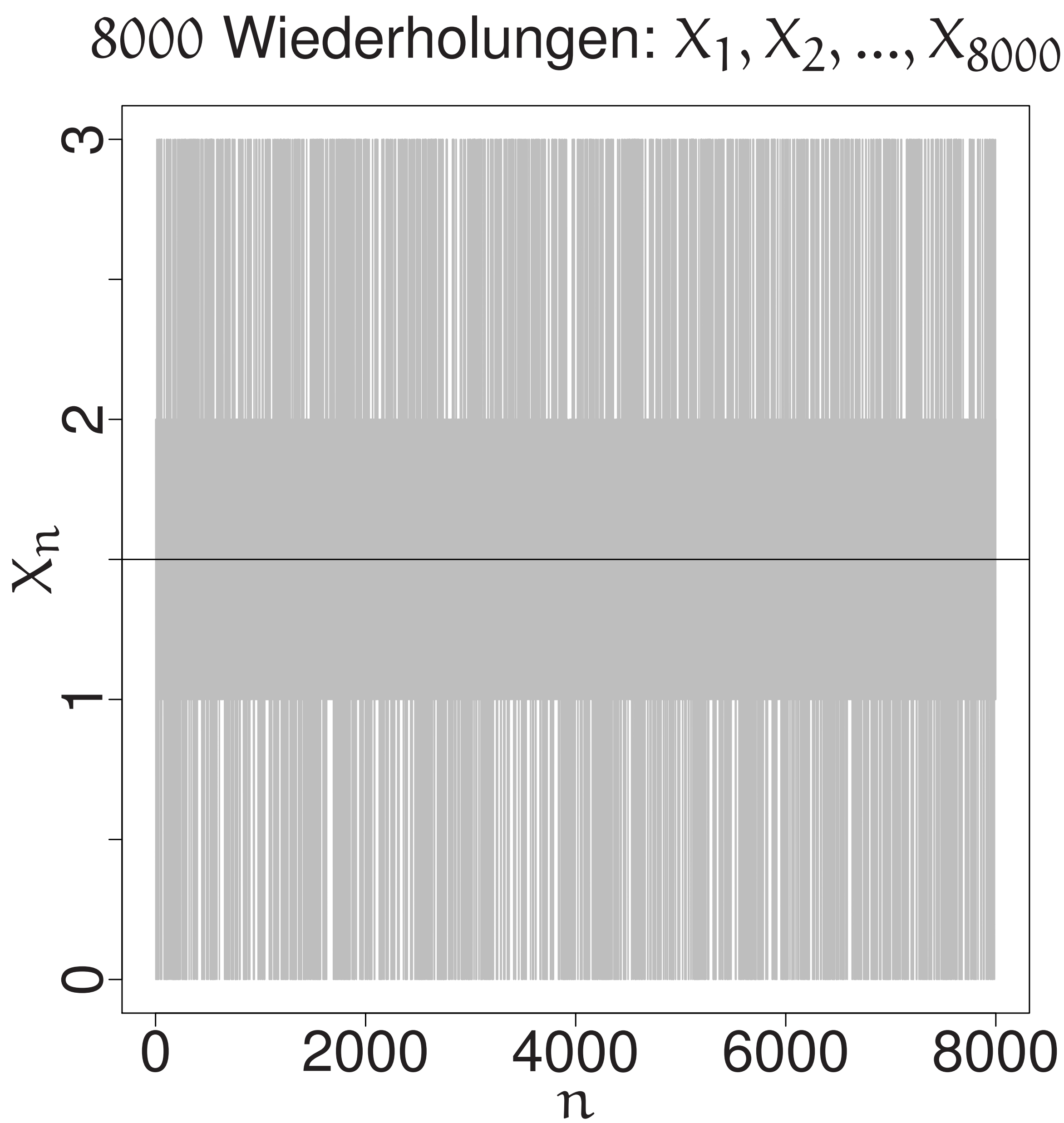


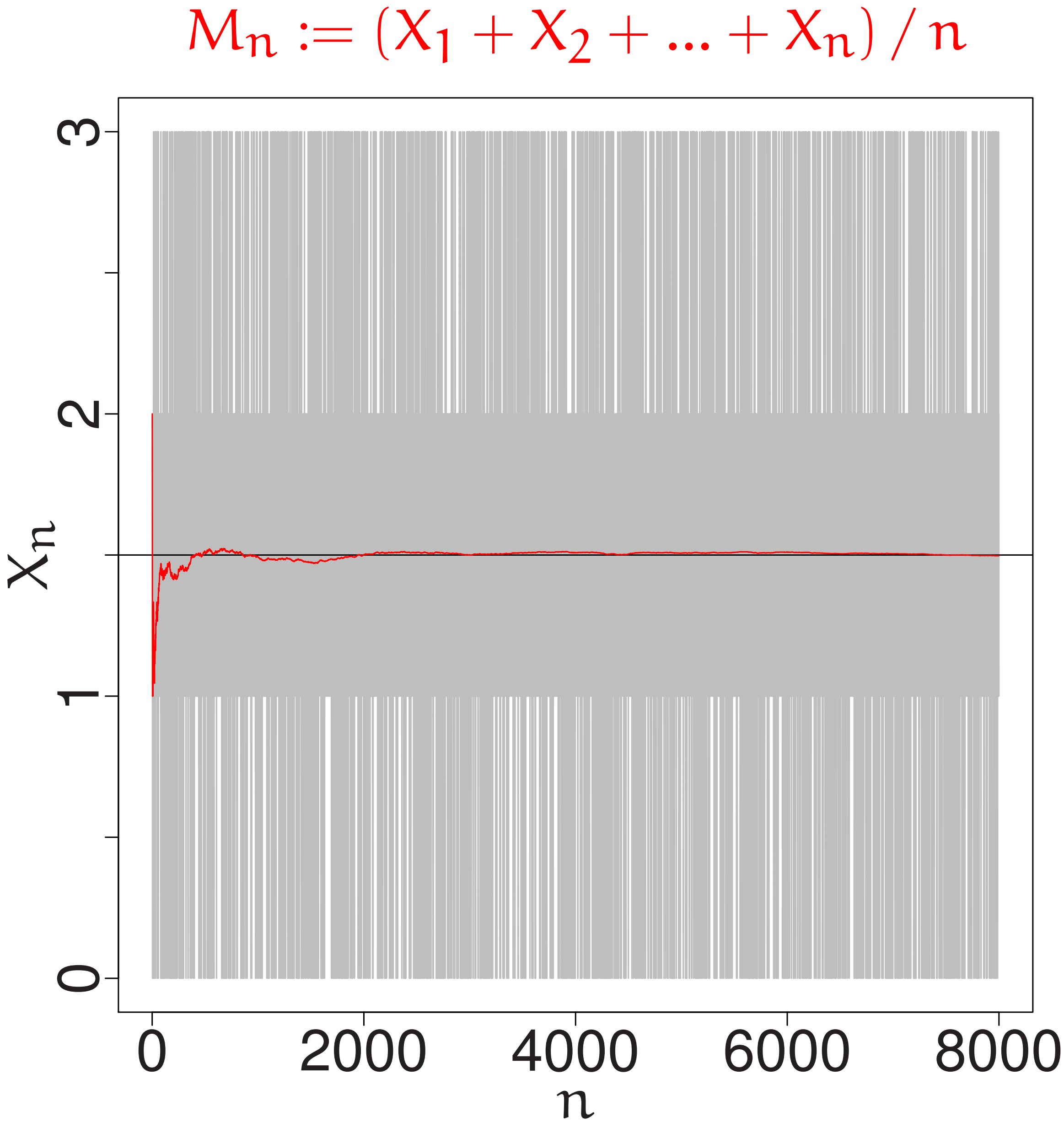


800 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{800}$
3
2
1
0
X_n
0
200
400
600
800
n

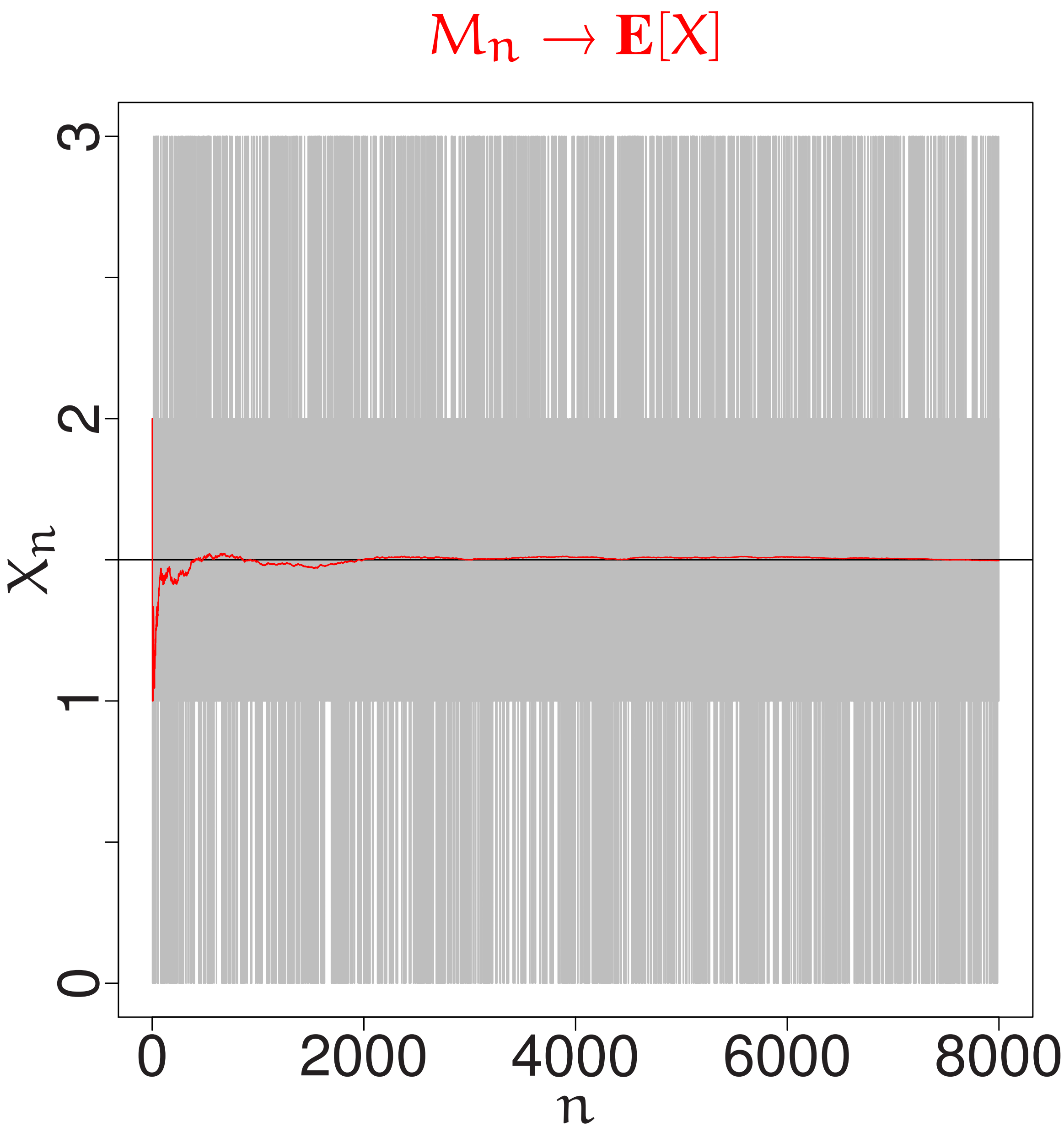
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$

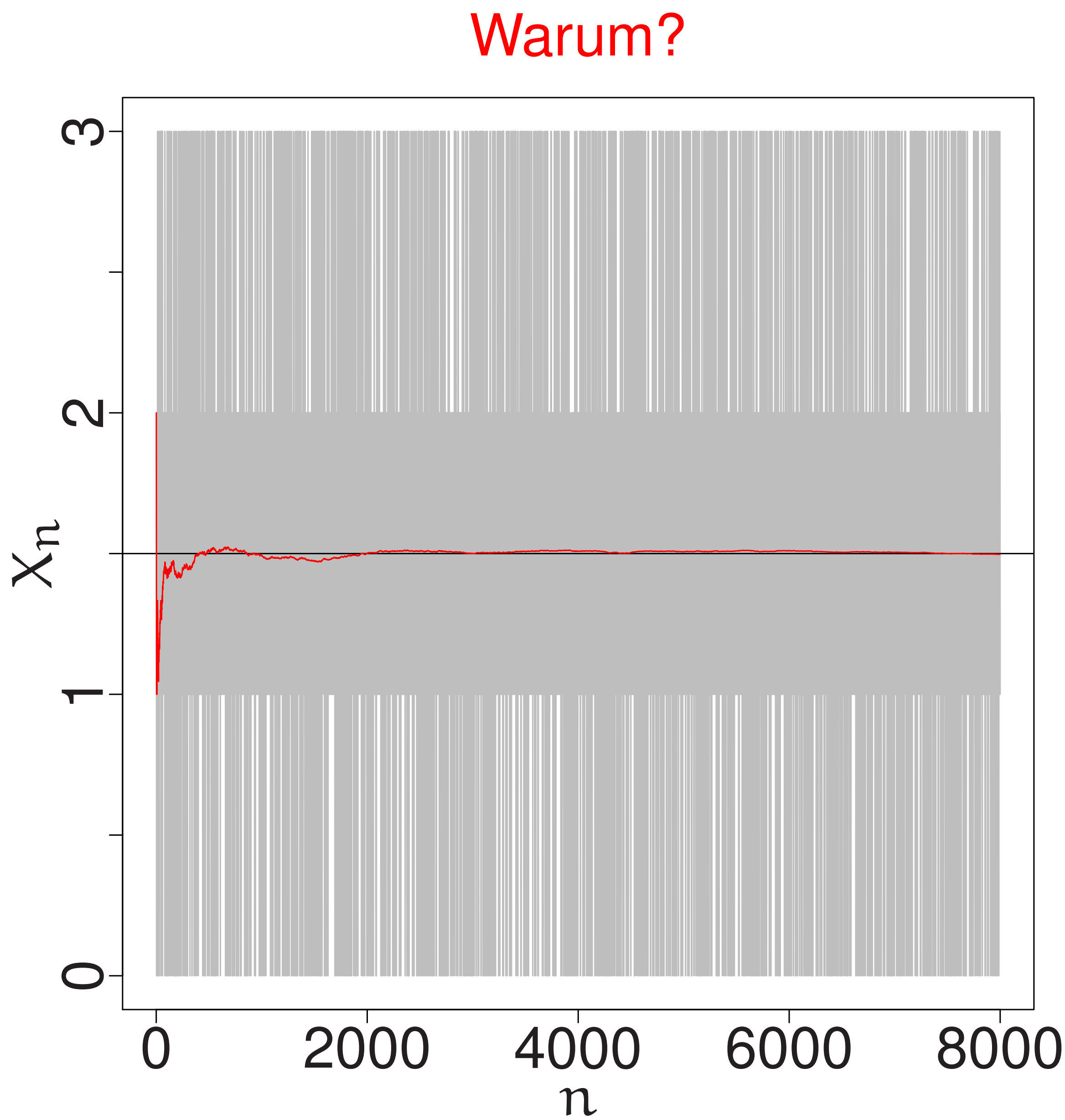



8000 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{8000}$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n



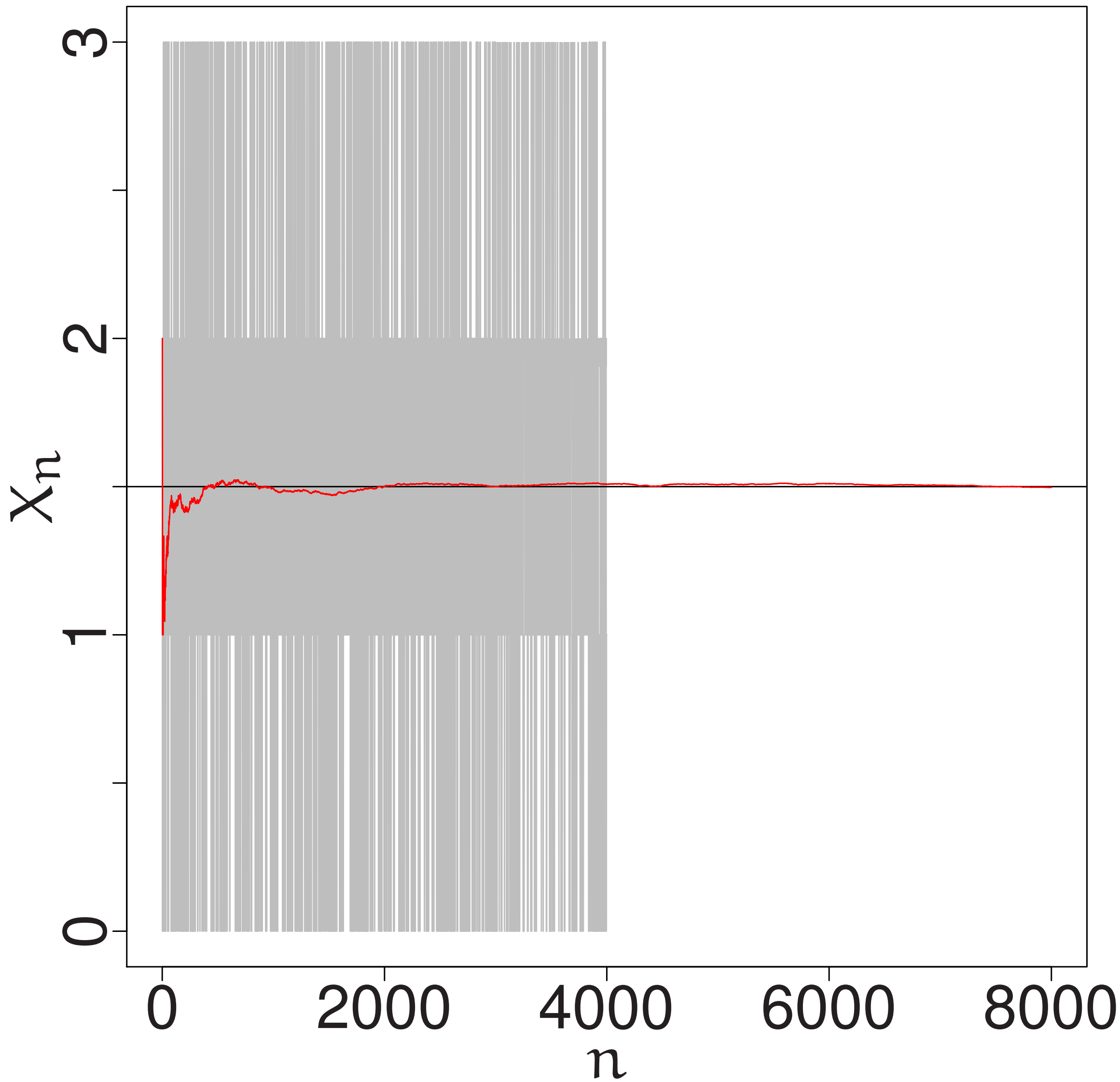
$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) / n$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n


$M_n \to \mathbf{E}[X]$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n



Warum?
0
1
2
3
0
2000
4000
6000
8000
n
X_n

$$M_n = \sum a \; \#\{\text{Würfe mit Ergebis } a\}/n$$
$$\to \sum a \; \mathbf{P}(X = a)$$



Dazu später mehr.

Für den Moment nur als kurzer Ausblick:

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „ unabhängig “?
2. Was heißt „ $\to$ “?

Diese Klärung wird in der Vorlesung

in wenigen Wochen erfolgen.

Jetzt halten wir erst einmal fest:

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum a \, \mathbf{P}(X = a)$$

2. Langzeitmittelwert

bei unabhängigen Wiederholungen:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

4. Die Additivität des Erwartungswertes

- anschaulich

und als Werkzeug

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

<u>Additivität</u>

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Die Additivität des Erwartungswerts wird

intuitiv sofort klar aus der Vorstellung als Langzeitmittelwert

bei “unabhängigen Wiederholungen”:

$$\frac{1}{n}((X_1 + Y_1) + ... + (X_n + Y_n))$$

$$= \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) + \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$$

$$\to \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Ein prominenter Fall ist

$$X = Z_1 + \cdots + Z_n,$$

wobei die $Z_1, \ldots, Z_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[Z_i] = \mathbf{P}(Z_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(Z_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(Z_n = 1)\ .$$

5. Der Erwartungswert der Binomialverteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der Erfolge

beim n-fachen p-Münzwurf)

X sei Bin(n, p) verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \ \ldots$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

Aber es geht auch einfacher (vgl. Buch S. 49):

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer Bin(n, p) verteilten ZV ist

np.

6. Der Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der “Erfolge”

beim n-fachen Ziehen ohne Zurücklegen)

BEISPIEL

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\quad n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Verteilung von R ?

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten $(k = 0, \ldots, n)$

heißt

hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $(n,\ r+b,\ r)$.

(vg. Buch Seite 28)

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n} = \ldots.$$

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 32)

Aber es geht auch einfacher (vgl. Buch S. 50/51):

$$R = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = ?$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden

als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden

als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \tfrac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = n\frac{r}{r+b}}$$

7. Der Erwartungswert einer Anzahl von Runs

BEISPIEL

Runs beim fairen Münzwurf:

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher fairer Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),

der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

$11100011 \qquad R = 3$

$10101010 \qquad R = 8$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,

wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = \frac{1}{2} \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \ldots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = 1 + \frac{1}{2}(n-1)}$$