Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable

und ihre Verteilungen

1. Die Grundbegriffe

Bisher hatten wir uns (vor allem) mit Zufallsvariablen beschäftigt, deren Wertebereich S endlich war.

Die (schon in Vorlesung 1b formulierten)

zwei Grundregeln

für Wahrscheinlichkeiten lauteten

Normiertheit auf Eins:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 \ .$$

Additivität:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \qquad A \subset S$$

Diese beiden Regeln behalten ihren guten Sinn, wenn der Wertebereich nicht endlich, sondern abzählbar unendlich ist.

Beispiel: $S = \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}, \ldots$$

$$\mathbb{P}(X = n) = 1/2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Auch wenn der Wertebereich von X

eine überabzählbare Menge ist

(wie z.B. $\mathbb{R}$ oder das “Einheitsintervall” $[0, 1]$

oder das “Einheitsquadrat” $[0, 1] \times [0, 1]$),

behalten beide Regeln ihren Sinn, wenn man fordert,

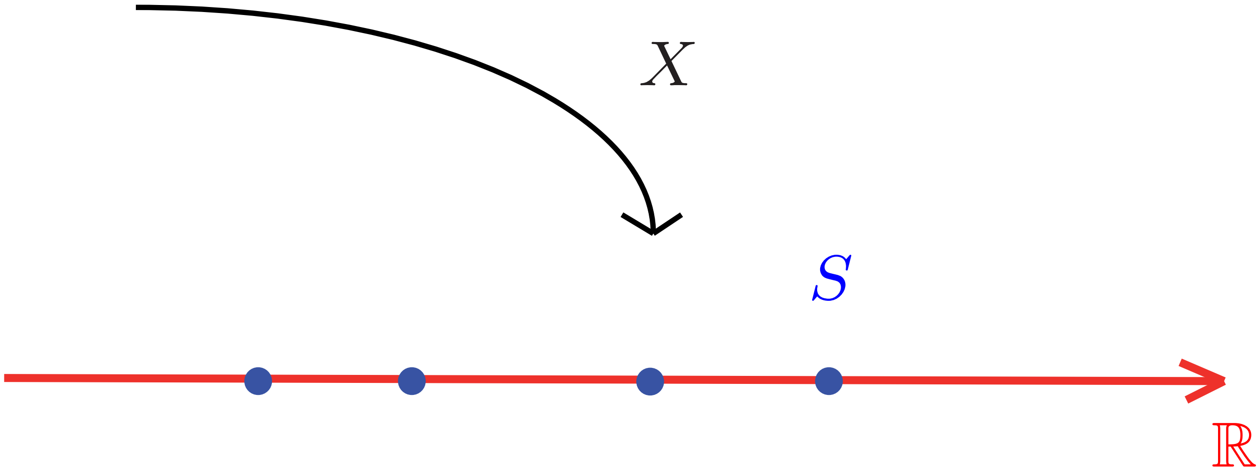
dass der Wertebereich

eine endliche oder abzählbar unendliche Menge S enthält

mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

Beispiel: Wertebereich $\mathbb{R}$



$S \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar unendlich mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

Definition:

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**,

falls ihr Wertebereich

eine diskrete (d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S enthält mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

Für diskrete Zufallsvariable X und

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1$$

mit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge S gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a), \qquad A \subset S$$

(Additivität)

Die Zahlen $\rho(a) := \mathbf{P}(X = a), \qquad a \in S$,

sind die **Verteilungsgewichte**.

Die Abbildung $A \mapsto \rho(A) := \mathbf{P}(X \in A), \qquad A \subset S,$

heißt die **Verteilung** von X.

2. Zufällige Paare und ihre Komponenten

X_1, X_2 seien diskrete ZV'e mit $\mathbf{P}(X_i \in S_i) = 1, i = 1, 2$

(und diskreten Mengen S_1, S_2).

Dann ist auch $X = (X_1, X_2)$ diskret, mit

$$\mathbf{P}(X \in S_1 \times S_2) = 1.$$

Wir nennen X dann auch

ein **zufälliges Paar** mit den Komponenten X_1 und X_2.

Die Verteilungsgewichte von $X = (X_1, X_2)$ schreiben wir als

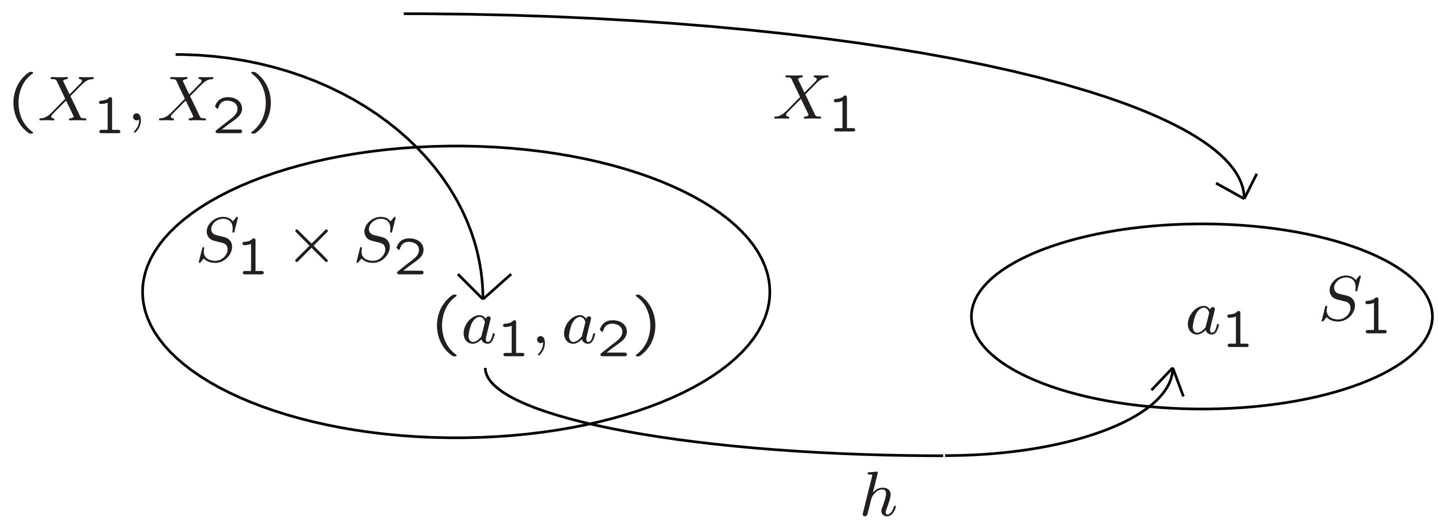
$$\begin{aligned}\rho(a_1, a_2) &= \mathbf{P}\big((X_1, X_2) = (a_1, a_2)\big) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)\ ,\end{aligned}$$

Sei ρ_1 die Verteilung von X_1.
Man erhält deren Gewichte als

$$\rho_1(a_1) = \sum_{a_2 \in S_2} \rho(a_1, a_2)\ .$$

Denn: $\rho_1(a_1) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)$

$$= \mathbf{P}((X_1, X_2) \in \{a_1\} \times S_2) = \sum_{a_2 \in S_2} \rho(a_1, a_2).$$



$$h((a_1, a_2)) := a_1$$

ist die

Projektion des Paares (a_1, a_2) auf seine erste Komponente

3. Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen und Transport von Verteilungen

Der Übergang von $X = (X_1, X_2)$

zu einer Komponente X_1

ist ein Beispiel einer

Vergröberung (*Weiterverarbeitung*) einer Zufallsvariablen:

$$X_1 = h(X)$$

mit $h((a_1, a_2)) := a_1$.

Allgemeiner:

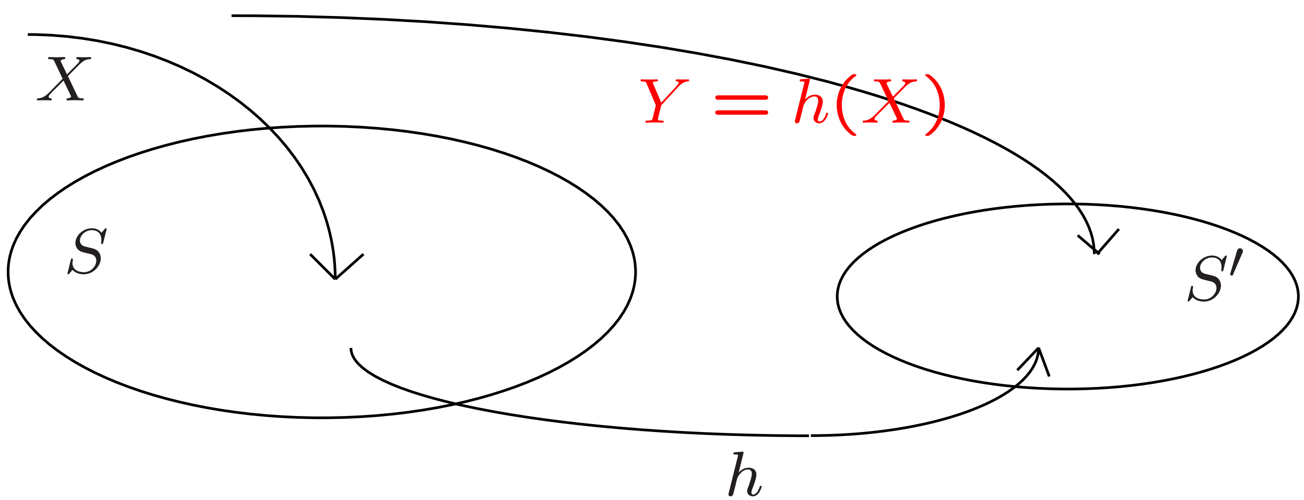
Sind S und S' zwei Mengen,

X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S,

h eine Abbildung von S nach S',

und nimmt man X als zufällige Eingabe von h,

dann bekommt man eine Zufallsvariable Y mit Zielbereich S':

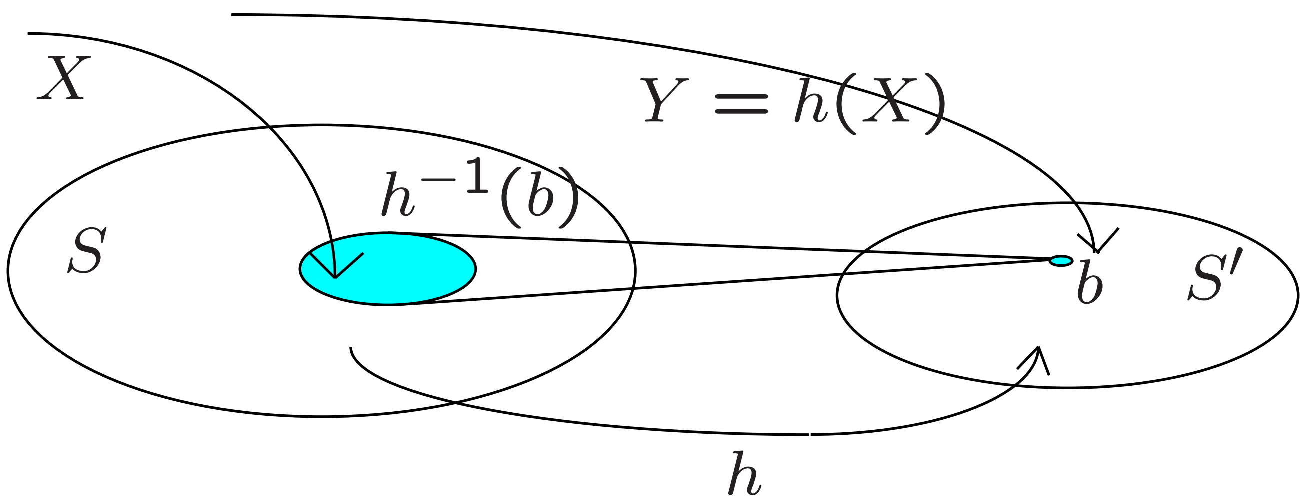


Für jedes $b \in S'$ gilt:

$$\{h(X) = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}$$

Für die Verteilungsgewichte von $Y = h(X)$ ergibt sich:

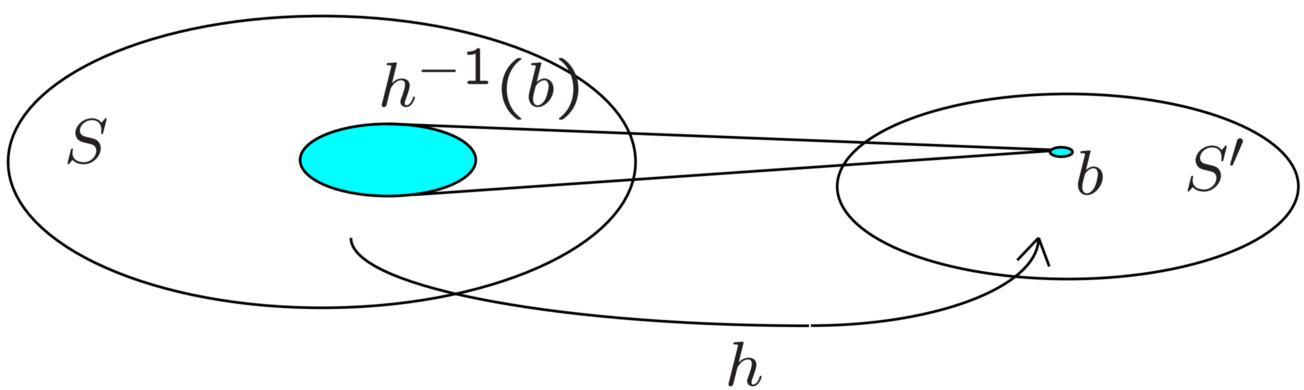
$$\mathbf{P}(Y = b) = \mathbf{P}(X \in h^{-1}(b)) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a).$$



Bezeichnet ρ die Verteilung von X und ρ' die von Y, dann ist

$$\rho'(b) = \sum_{a \in h^{-1}(b)} \rho(a).$$

Man sagt: Die Verteilung ρ wird durch die Abbildung h in die Verteilung ρ' transportiert.



Diese Situation haben wir schon mehrmals angetroffen:

in Vorlesung 1b:

$X :=$ rein zufällige $1, \dots, r$-Folge der Länge n

$T = h(X)$:= Zeitpunkt der ersten Kollision

(mit $T := \infty$ falls keine Kollision eintritt)

in Vorlesung 2a:

$X :=$ rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$

$h(X) :=$ Länge des Zyklus von X, der die Eins enthält.

Heutiges Programm:

Weitere Beispiele für

“Vergröberungen von zufälligen Folgen”

$\rightarrow$ wichtige Beispiele

diskreter Zufallsvariabler und diskreter Verteilungen.

4. Die Anzahl der Erfolge beim fairen Münzwurf

$$S := \{0,1\}^n$$

die Menge der 01-Folgen der Länge n

X sei uniform verteilt auf S,

jeder Ausgang hat somit das Gewicht

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}$$

(Man sagt auch: X ist ein n-facher “fairer Münzwurf”.)

$Y :=$ die Anzahl der Einsen in X.

Wie ist Y verteilt?

Jede einzelne 01-Folge a der Länge n mit genau k Einsen

hat Gewicht

$$\frac{1}{2^n}$$

Wieviele derartige a gibt es?

$$\binom{n}{k}$$

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

5. Die Anzahl der Sechsen beim fairen Würfeln

Beispiel

n-faches Würfeln:

Wie ist die Anzahl der Sechsen verteilt?

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ uniform verteilt auf

$S := \{1, \ldots, 6\}^n$.

$Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$, mit

$Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i)$

Z ist also eine zufällige 01-Folge, mit

$Z_i = 1$ falls der i-te Wurf eine Sechs ergibt

und $Z_i = 0$ sonst.

Wie ist Z verteilt?

$$\mathbf{P}(Z_1 = 1, \ldots, Z_k = 1,\, Z_{k+1} = 0, \ldots, Z_n = 0)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = 6, \ldots, X_k = 6,\, X_{k+1} \neq 6, \ldots, X_n \neq 6)$$

$$= \frac{1^k \cdot 5^{n-k}}{6^n}$$

$$= p^k q^{n-k} \,,$$

mit $p := \frac{1}{6}$ und $q := \frac{5}{6}$.

Auch für jede andere Platzierung von genau k “Sechsen” in den n Würfen ergibt sich diese W’keit.

Verteilung der Anzahl der Sechsen beim n-fachen Würfeln:

$X = (X_1, \dots, X_n)$ uniform verteilt auf

$S := \{1, \dots, 6\}^n$.

$Z := (Z_1, \dots, Z_n), \quad$ mit

$Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i)$

Wie ist $Y := Z_1 + \dots + Z_n$ verteilt?

$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ (warum?)

6. Vom p-Münzwurf zur Binomialverteilung

Definition (p-Münzwurf):

Sei $p \in [0,1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0,1\}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \ : a_i \in \{0,1\}\}$$

heißt n-facher p-Münzwurf,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n-k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

Ein Paradebeispiel für die

Weiterverarbeitung einer Zufallsvariablen ist die

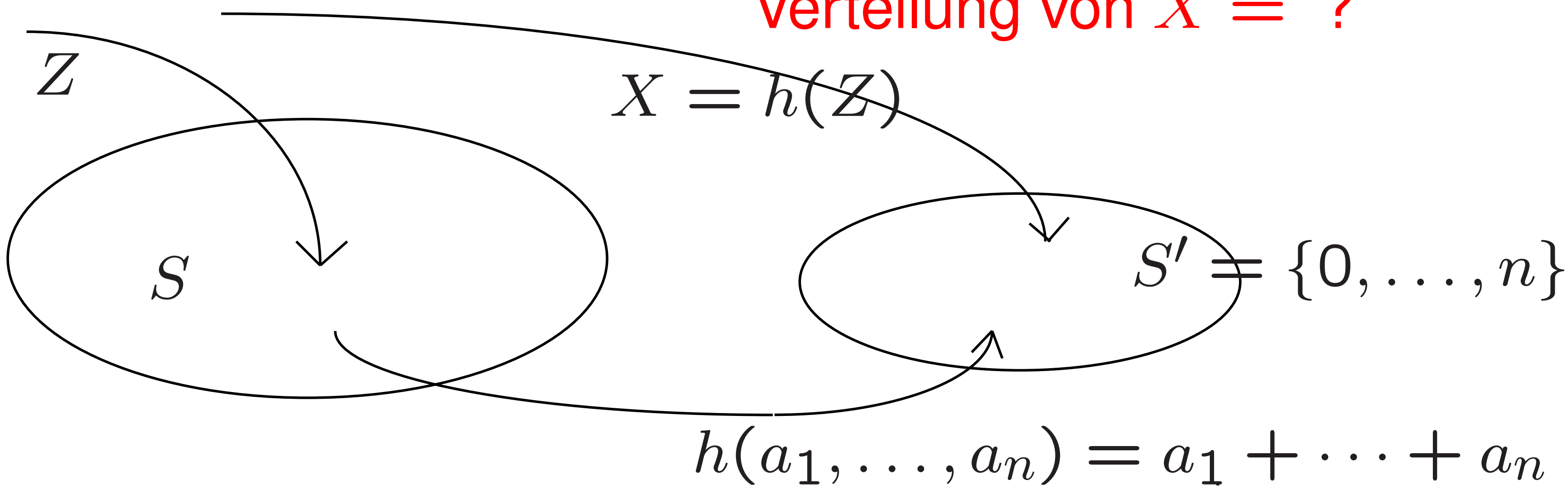
Anzahl der Erfolge beim n-fachen p-Münzwurf:

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf

und $X = Z_1 + \cdots + Z_n$ die *Anzahl der Erfolge*

(die Anzahl der Einsen in der zufälligen 0-1 Folge Z)

Verteilung von $X =$?



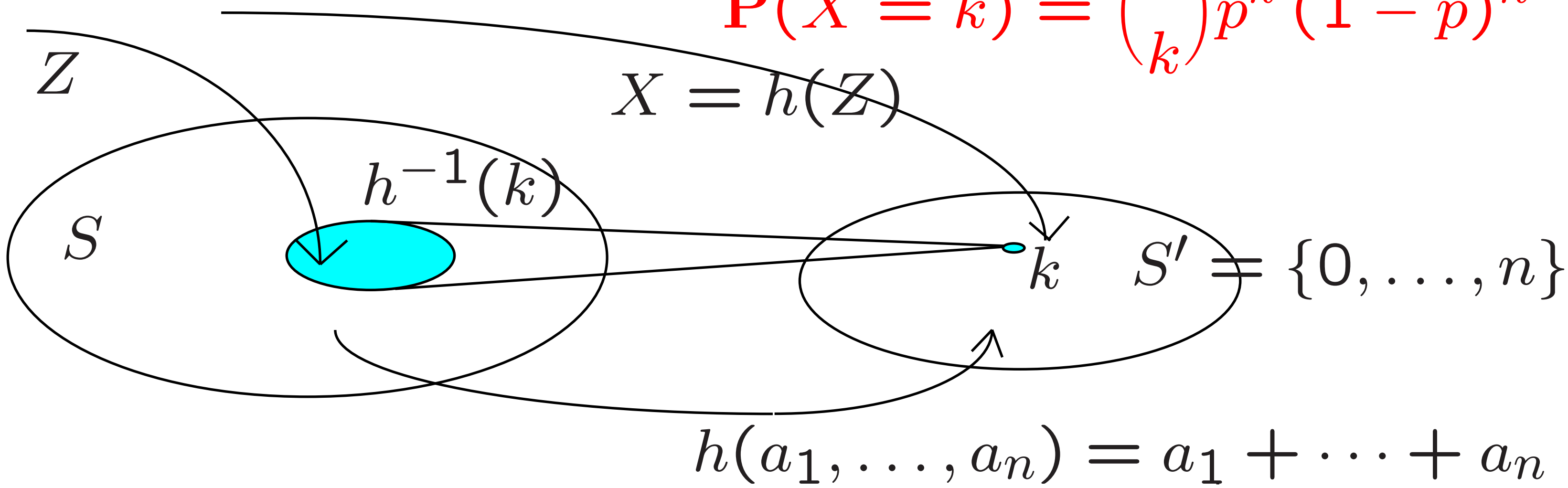
Jedes $a \in S$ mit $h(a) = k$

(d.h. mit k Einsen und $n - k$ Nullen)

hat Gewicht $p^k\,(1 - p)^{n-k}$.

Es gibt $\binom{n}{k}$ solche a.

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1 - p)^{n-k}$$



Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\{0, 1, \ldots, n\}$

heißt *binomialverteilt* mit Parametern n und p,

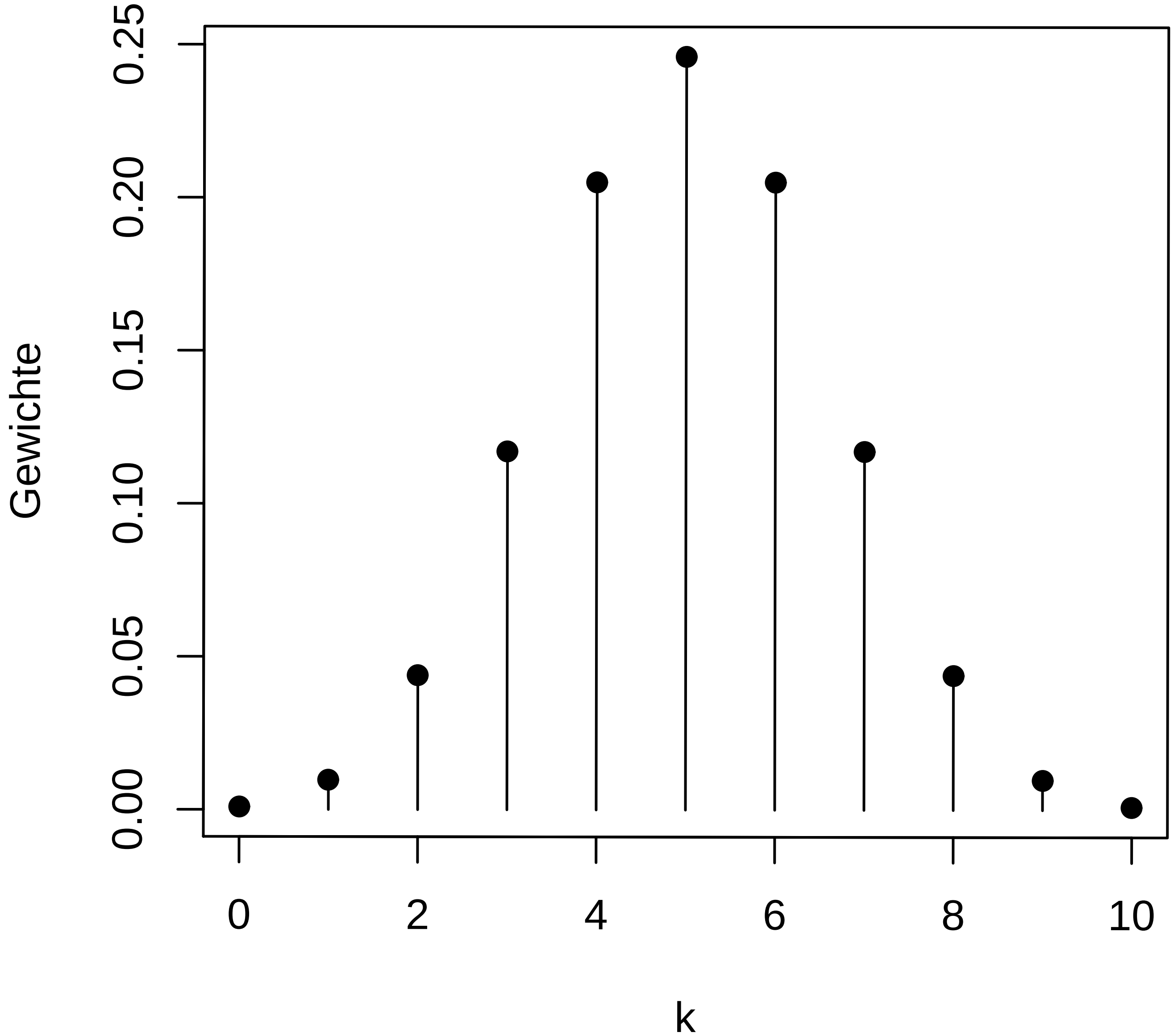
kurz

Bin(n, p)-verteilt,

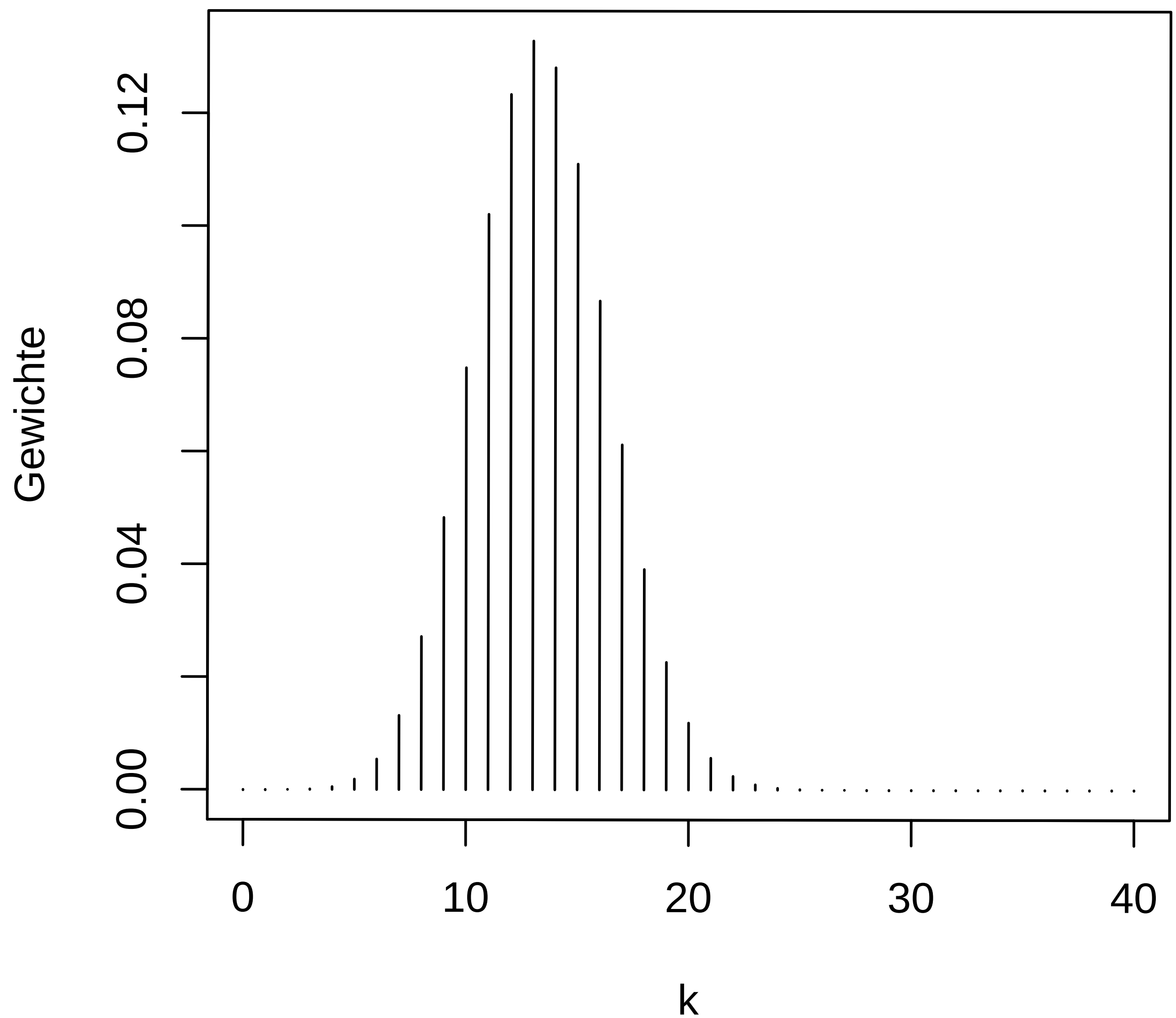
wenn

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n \ ,$$

mit $q = 1 - p$.



Gewichte der Bin(10, 1/2) Verteilung



Gewichte der Bin(40, 1/3) Verteilung

7. Vom Ziehen mit Zurücklegen zum p-Münzwurf

(Einschub)

n-maliges Ziehen *mit Zurücklegen*

aus einer ideal durchmischten Urne.

Ein Anteil p der Kugeln ist rot,

der restliche Anteil $q = 1 - p$ ist blau.

Zufällige 0-1 Folge $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$:

$Z_i = 1$ wenn beim i-ten Zug eine rote Kugel kommt,

und $Z_i = 0$ wenn beim i-ten Zug eine blaue Kugel kommt.

Sei a eine vorgegebene 0-1 Folge der Länge n mit k Einsen,

$$\text{z. B.:} \quad a := (\underbrace{1,\ldots,1}_{k\text{-mal}},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-k)\text{-mal}}\ )$$

$$\mathbf{P}(Z = a) = \,?$$

Sei g die Gesamtanzahl der Kugeln in der Urne.

$$\mathbf{P}(Z = a) = \frac{(pg)^k (qg)^{n-k}}{g^n} = p^k q^{n-k}$$

Das ist so für jede 0-1 Folge a mit k Einsen und $n-k$ Nullen.

Zur Wiederholung:

Definition (p-Münzwurf):

Sei $p \in [0,1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0,1\}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \ : a_i \in \{0,1\}\}$$

heißt n-facher p-Münzwurf,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n-k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

8. Vom p-Münzwurf zum $(p_1, \ldots, p_r)$-Würfeln

Oder: Was 2 recht ist, soll r billig sein!

Definition ("n-faches $(p_1, \ldots, p_r)$-Würfeln"):

Seien $r \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_r \geq 0$ mit $p_1 + \ldots + p_r = 1$.

Wir definieren Gewichte auf

$$S := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in \{1, \ldots, r\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \ldots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Eine Zufallsvariable Z mit diesem Zielbereich S

und diesen Verteilungsgewichten ρ nennen wir

n-faches $(p_1, \ldots, p_r)$-Würfeln.

Für jedes $a \in S$ mit

k_1 Komponenten gleich 1,

k_2 Komponenten gleich 2,

...

k_r Komponenten gleich r

ist dann

$$\mathbf{P}(Z = a) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

9. Vom $(p_1, \ldots, p_r)$-Würfeln zur Multinomialverteilung

Beispiel: Besetzung der Ergebnisse beim “Würfeln”:

$Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ sei ein n-faches $(p_1, \ldots, p_r)$-Würfeln

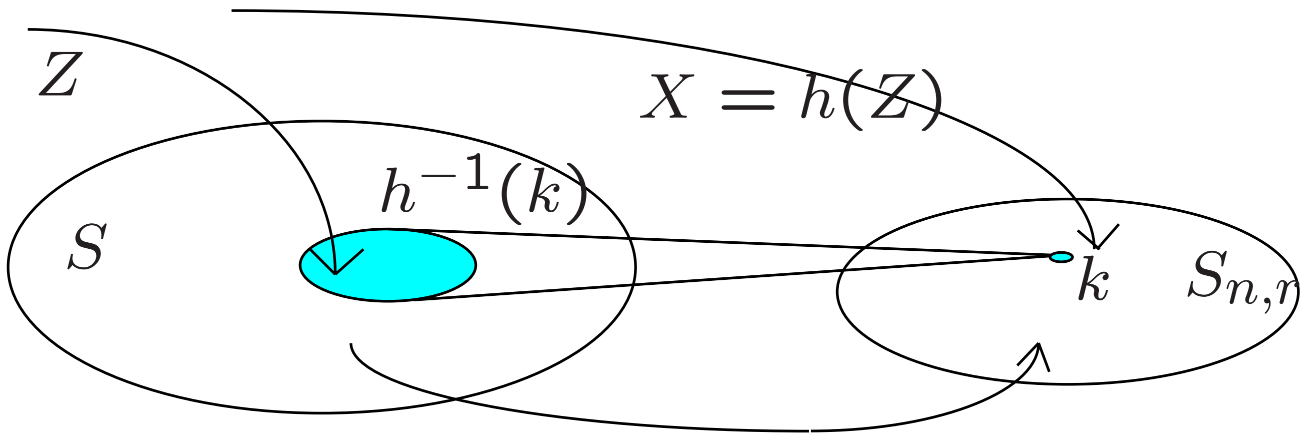
$$X_j := \#\{i \ : \ Z_i = j\}$$

(die Anzahl der Würfe mit Ergebnis j).

$X := (X_1, \ldots, X_r)$ hat dann den Zielbereich

$S_{n,r} = \{(k_1, \ldots, k_r) \ : k_1 + \ldots + k_r = n\}$.

Verteilung von X = ?



$$h(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_r) =: k$$

mit $k_j := \#\{i : a_i = j\}), \; j = 1, \ldots, r$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (k_1, \ldots, k_r)$

hat Gewicht $p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$

Wieviele solche a gibt es?

Dazu überlegen wir:

Auf wieviele Arten kann man

n Objekte so auf r Fächer verteilen,

dass das j-te Fach genau k_j Objekte enthält?

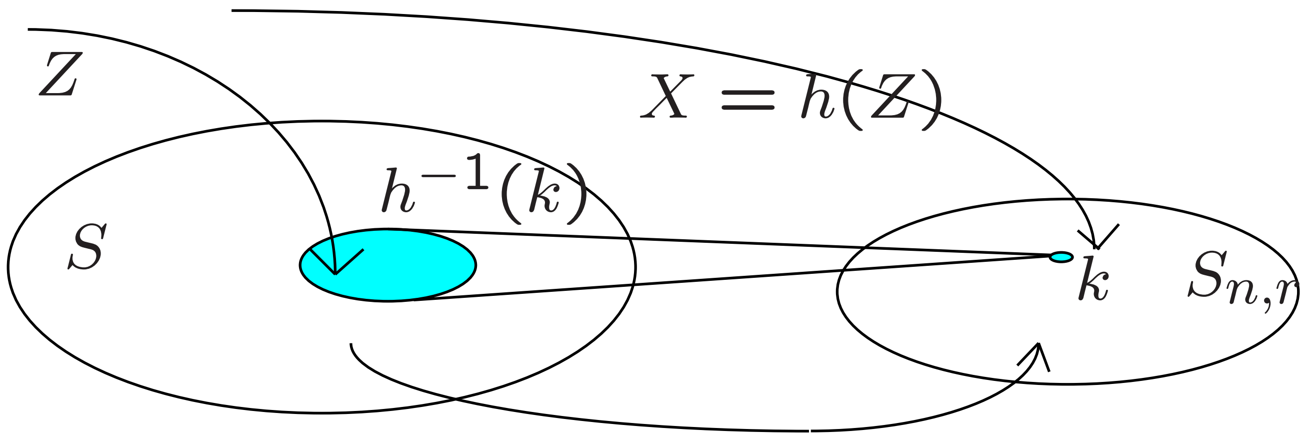
Dabei ist $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Die Antwort ist:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!} =: \binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$$

Multinomialkoeffizient, lies: n über $k_1, \ldots, k_r$

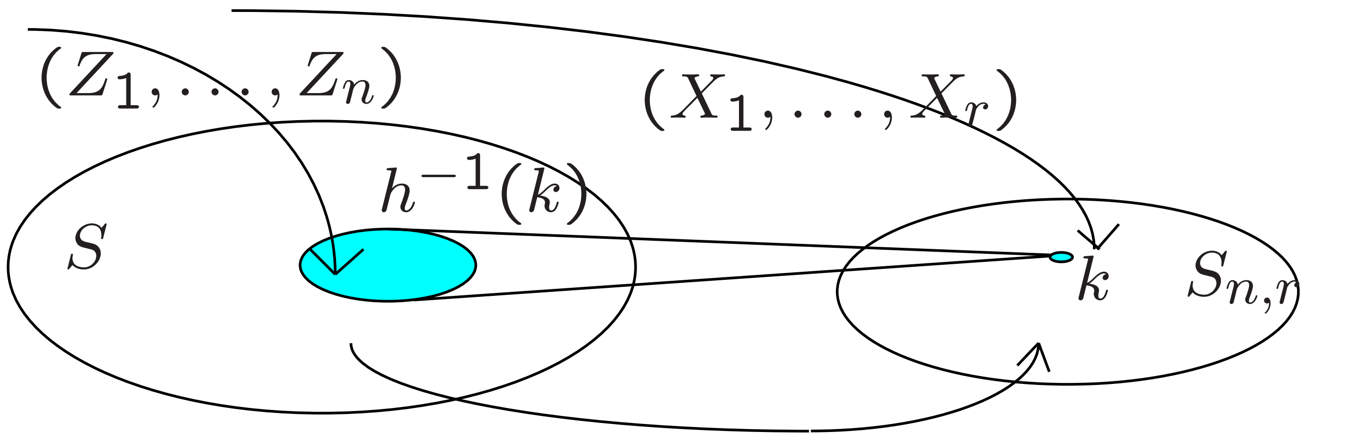


$$h(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_r) = k$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (k_1, \ldots, k_r)$

hat Gewicht $p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$

Wieviele solche a gibt es?



$$h(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_r)$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (k_1, \ldots, k_r)$

hat Gewicht $p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$

Es gibt $\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$ solche a.

$$\mathbf{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$$

Definition:

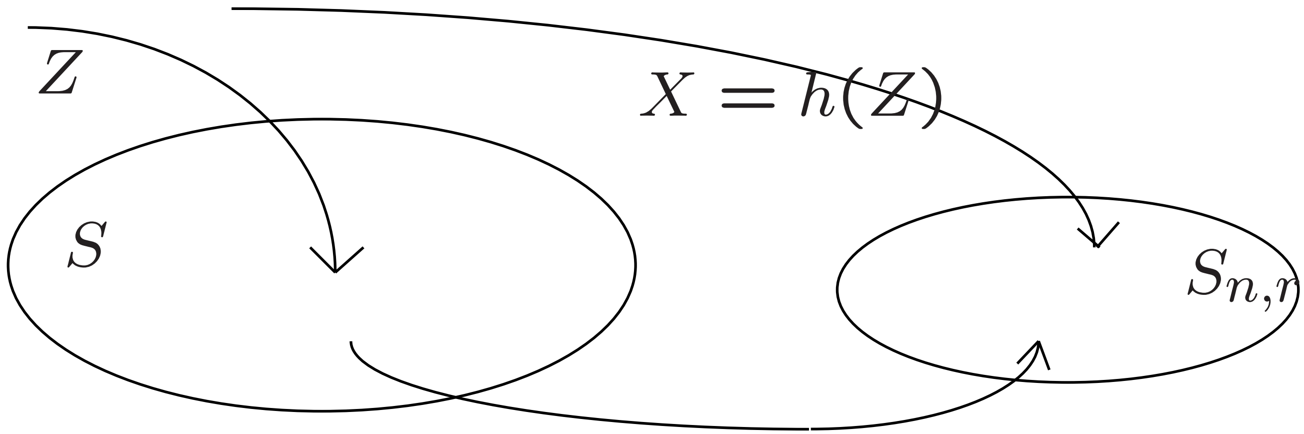
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S_{n,r}$

heißt *multinomialverteilt* mit Parametern $n; p_1, \ldots, p_r$,

wenn

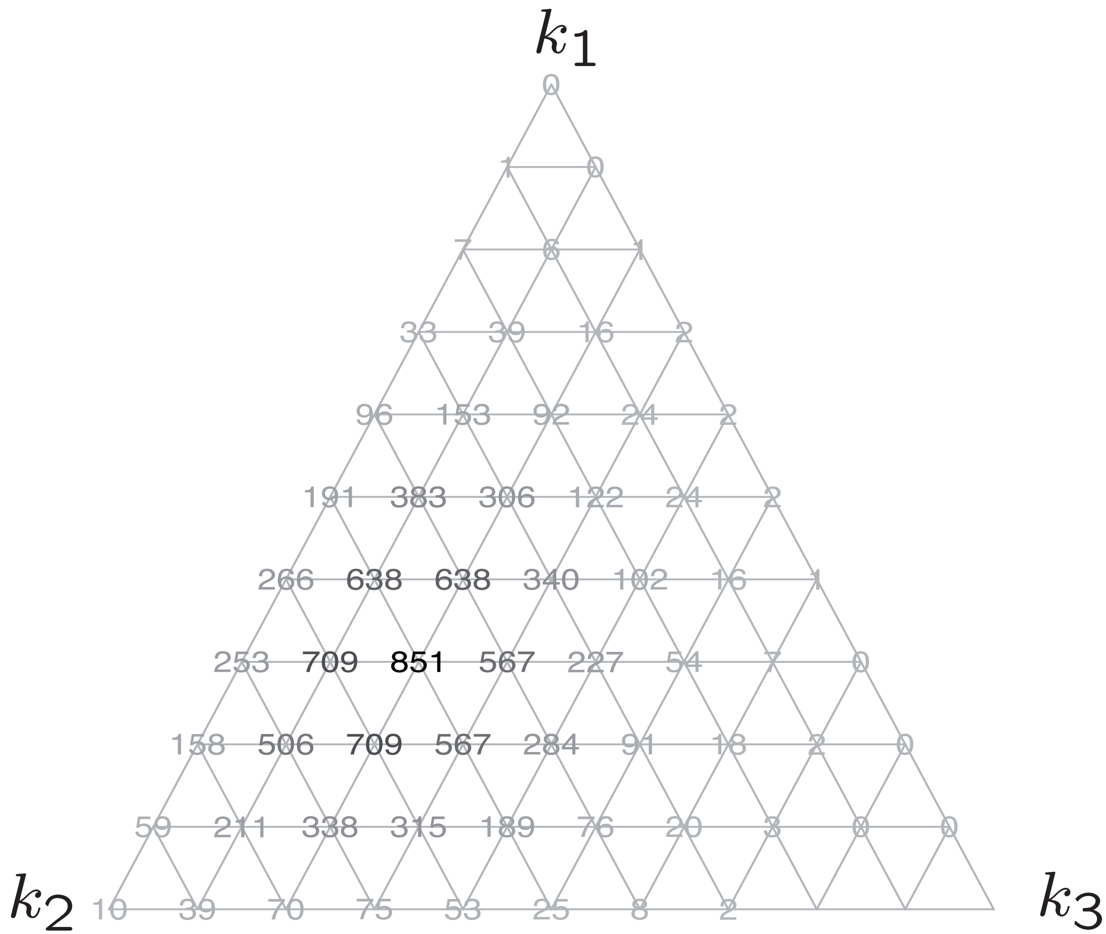
$$\mathbf{P}(X = (k_1, \ldots, k_r)) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r},$$

$$(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r} \,.$$



$$h(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_r) =: k$$

mit $k_j := \#\{i : a_i = j\},\ j = 1, \ldots, r$



Gewichte der Multinomialverteilung, notiert in $\frac{1}{10000}$

für $n = 10$, $r = 3$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$