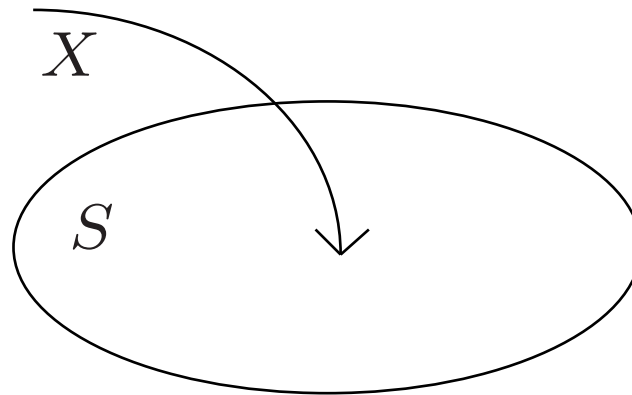


Vorlesung 2a

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

0. Erinnerung und Auftakt



X ... **Zufallsvariable**

mit *Zielbereich (Wertebereich)* S

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,
wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt X eine **rein zufällige Wahl**
aus der Menge S .

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \dots, r\}^n$$

$X :=$ rein zufällige $1, \dots, r$ - Folge der Länge n .

Heute lernen wir drei weitere Beispiele
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige k -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch
einige *Hilfen fürs Abzählen*.

1. Rein zufällige Permutation

Eine *Permutation* von $1, \dots, n$
ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich.

Z. B. mit $n = 7$

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

Wieviele Permutationen von $1, \dots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n - 1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n - 2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

...

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$
ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation
entstanden denken?

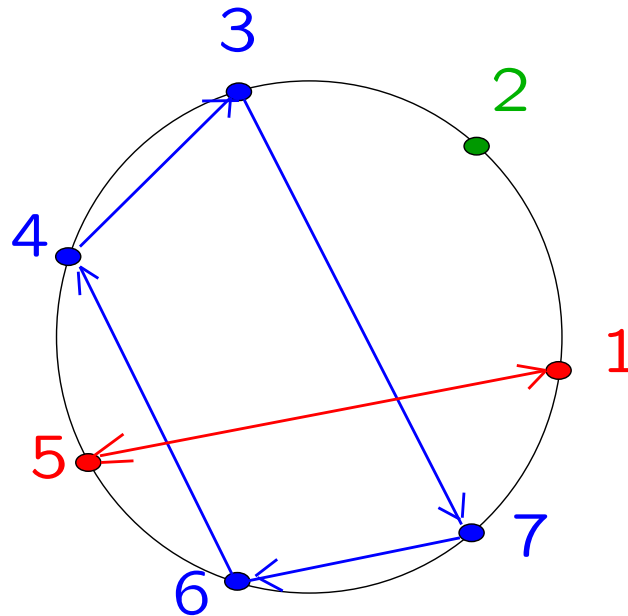
Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern
beim n -maligen rein zufälligen Ziehen *ohne Zurücklegen*
aus $\{1, 2, \dots, n\}$.

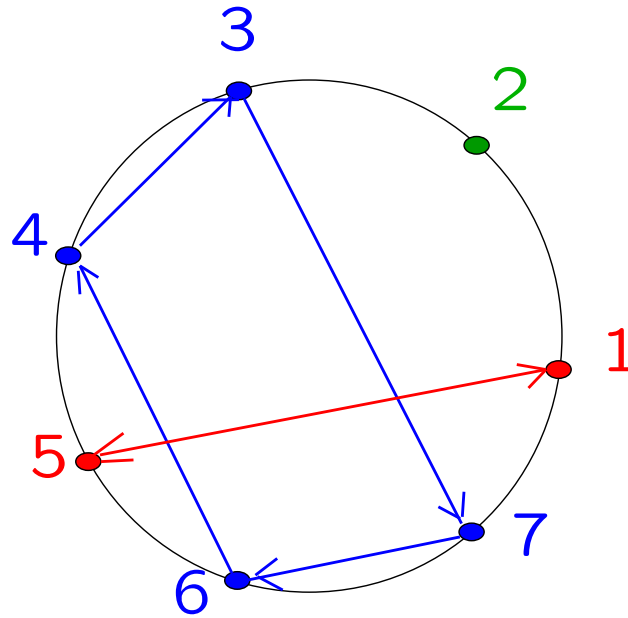
Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne
mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \dots, n$.
Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle n Kugeln,
notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6





Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier
zwei.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, 7$,

Wie wahrscheinlich ist es, dass der die 1 enthaltende Zykel
genau die Länge 2 hat?

Wieviele Permutationen von $1, \dots, 7$ mit dieser Eigenschaft
gibt es?

$6 \cdot 5!$ (warum?)

Also ist die gefragte W'keit: $\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$.

Jetzt allgemein:

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

$$h(a)$$

die Länge des Zyklus von a , der die Eins enthält.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $\{1, \dots, n\}$,

also eine rein zufällige Wahl aus S ,

und sei $b \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

$$h(a)$$

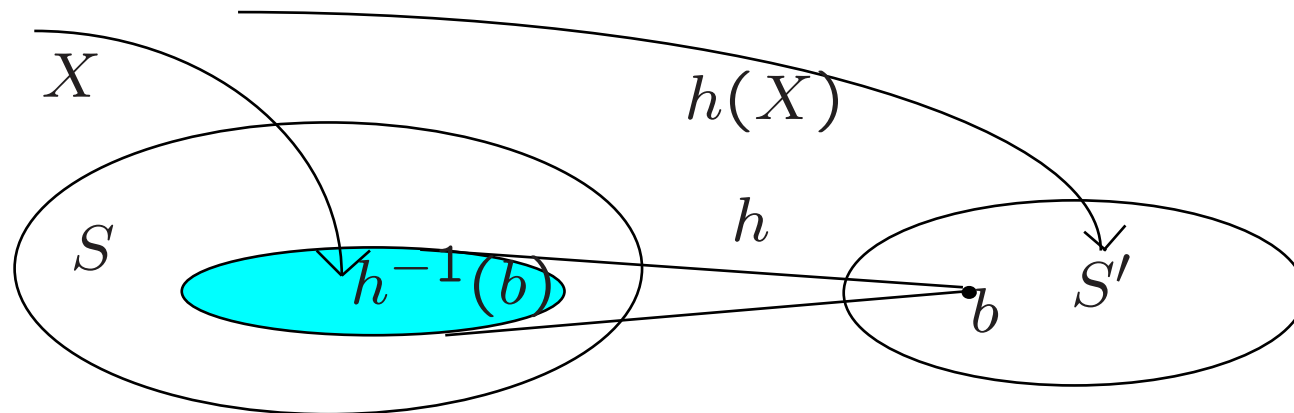
die Länge des Zyklus von a , der die Eins enthält.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $\{1, \dots, n\}$,

also eine rein zufällige Wahl aus S ,

und sei $b \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$



$S' = \{1, \dots, n\}$ Wieviele Permutationen $a \in S$ gibt es mit

$$h(a) = b?$$

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\begin{aligned} \#A &= (n-1)(n-2) \cdots (n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b) \cdots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

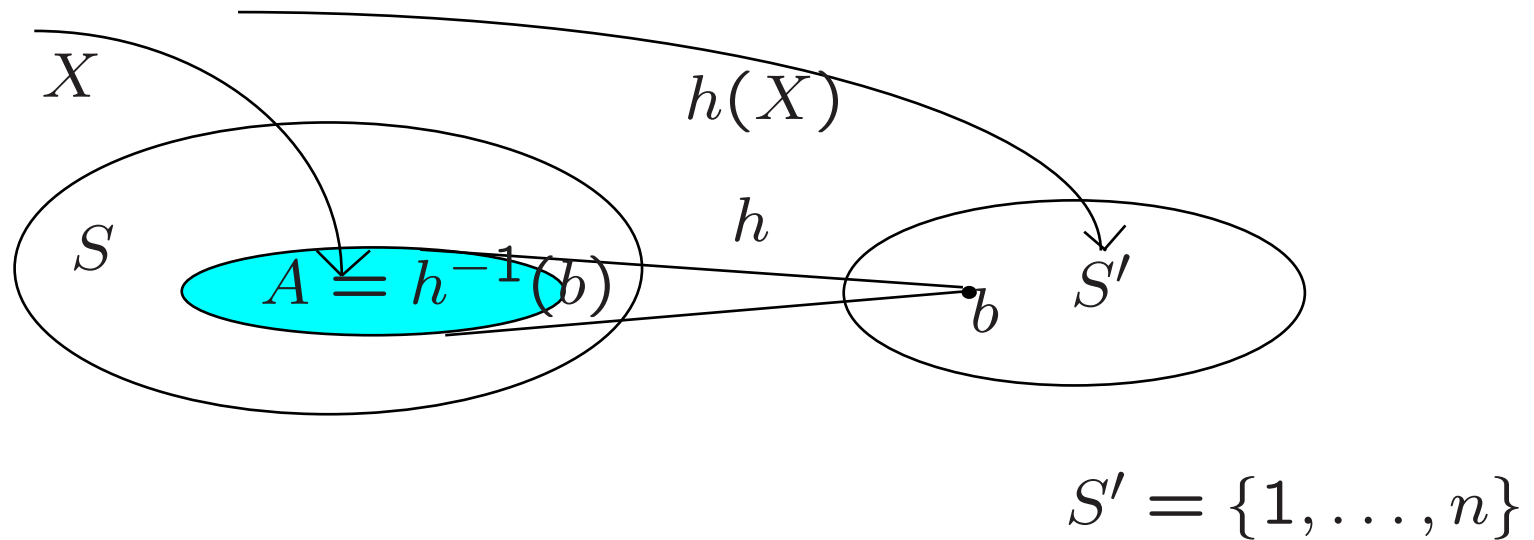
$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$A = \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \dots, n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus
einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$,
der die Eins enthält,
ist uniform verteilt auf $\{1, \dots, n\}$.

2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

2a. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$: der Binomialkoeffizient

Sei $k \leq n$.

Jetzt sei S

die Menge aller k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wieviele k -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gibt es?

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,
somit führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle
auf dieselbe k -elementige Teilmenge.

Also:

$$\#S = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!}.$$

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „n über k“.

$\binom{n}{k}$... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k -elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \dots, n\}$,
 k -köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) = \cdots (x + y) = ?$$

Multipliziert man aus, dann ergeben sich 2^n Summanden

(entsprechend den xy -Folgen der Länge n),

jeder von der Form $x^k y^{n-k}$.

Die Zahl k gibt an, wie oft der Faktor x

im jeweiligen Summanden zum Zug kommt.

Der Summand $x^k y^{n-k}$ kommt $\binom{n}{k}$ mal vor. Also

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Pascal'sches Dreieck

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
					.					
					.					

					1				
					1	1			
				1	2	1			
			1	3	3	1			
		1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1			
				⋮					
				⋮					

Rekursion:
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Man denke an die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $(k+1)$ -köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder **die Frau ist nicht dabei...** oder **sie ist dabei...**

2b. Rein zufällige Teilmengen

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k -elementige Teilmenge
von $\{1, \dots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \dots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\},$$

die Menge der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wir haben gesehen:

$$\#S = \binom{n}{k}$$

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

2d. Ein Zusammenhang mit
rein zufälligen Permutationen

Wie gewinnt man eine rein zufällige k -elementige Teilmenge
aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt (für $k \leq n$):

Ist $X = (X_1, \dots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$,

dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$.

Anders gesagt:

Beim **Ziehen ohne Zurücklegen**
führen die ersten k Züge auf eine
rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen
einer rein zufälligen k -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne
mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die **Nummern X_1, \dots, X_k der Züge**,
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$
eine rein zufällige k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$.

3. Besetzungszahlen

3a. Begriffsbildung

Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ eine $1, \dots, r$ - Folge der Länge n .

Vorstellung: i kommt auf Platz a_i .

Wie oft wird in a der Platz j besetzt?

Anders gesagt: Für wieviele i ist $a_i = j$?

$$b_j(a) := \#\{i : a_i = j, 1 \leq i \leq n\}$$

Das r -tupel der Besetzungszahlen $b_j(a)$ nennen wir kurz
“die (durch a induzierte) Besetzung”.

In der Vorstellung des sukzessiven Setzens
von n Objekten auf r mögliche Plätze
gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen
(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

3b. Besetzungszahlen bei sukzessiver rein zufälliger Platzwahl

Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung, die aus einem auf $\{1, \dots, r\}^n$ uniform verteilten X entsteht.

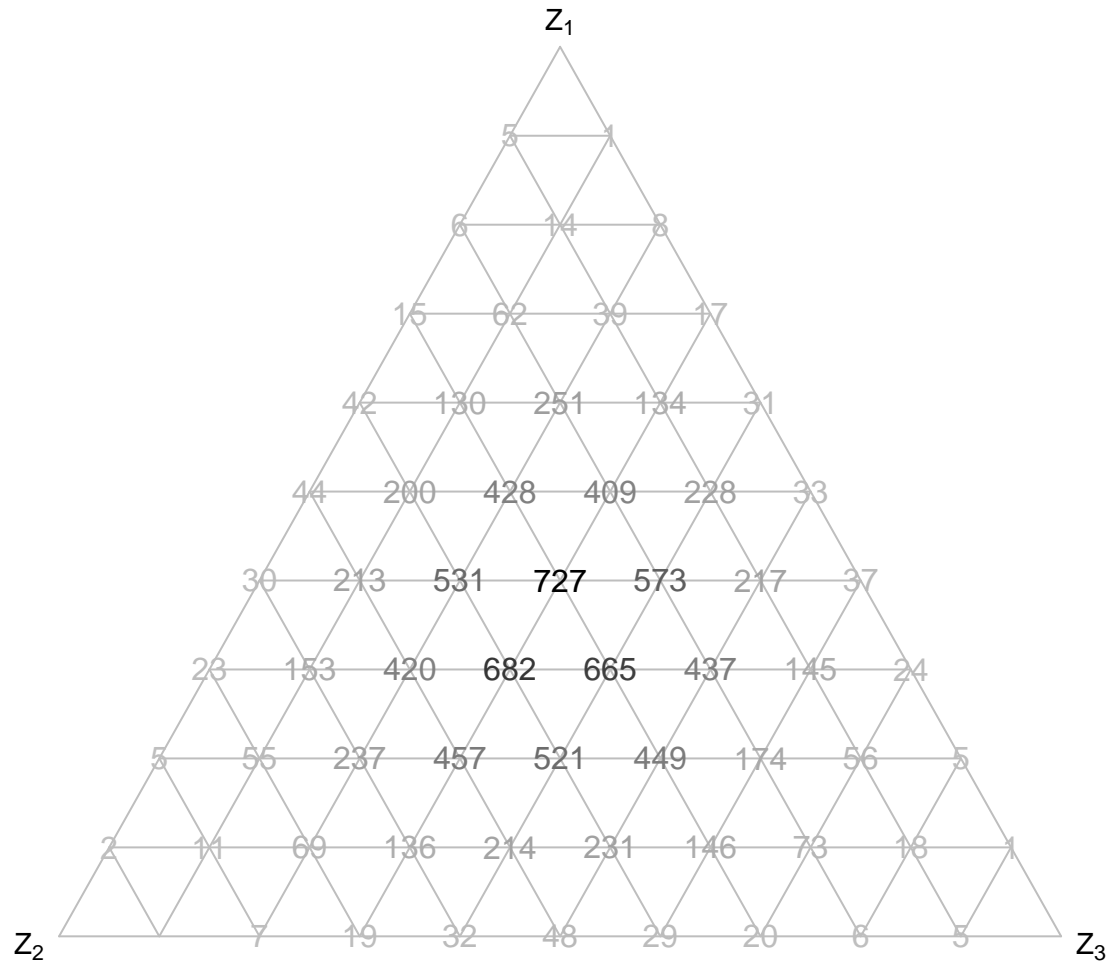
Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:
 n Individuen werden rein zufällig (und “unabhängig”)
auf r mögliche Plätze gesetzt.

Es folgt das Ergebnis einer Simulation für $n = 10$ und $r = 3$.

Die Ecken des *de Finetti-Dreiecks* auf der nächsten Folie entsprechen den Besetzungen

$(10, 0, 0)$ (oben), $(0, 10, 0)$ (links) und $(0, 0, 10)$ (rechts).

Häufigkeiten der Besetzungen bei 10000 Wiederholungen



Wir sehen aus der Simulation:

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist
(bei weitem) nicht uniform.

Wir kommen auf diese Verteilung
in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

3c. Uniform verteilte Besetzung von r Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

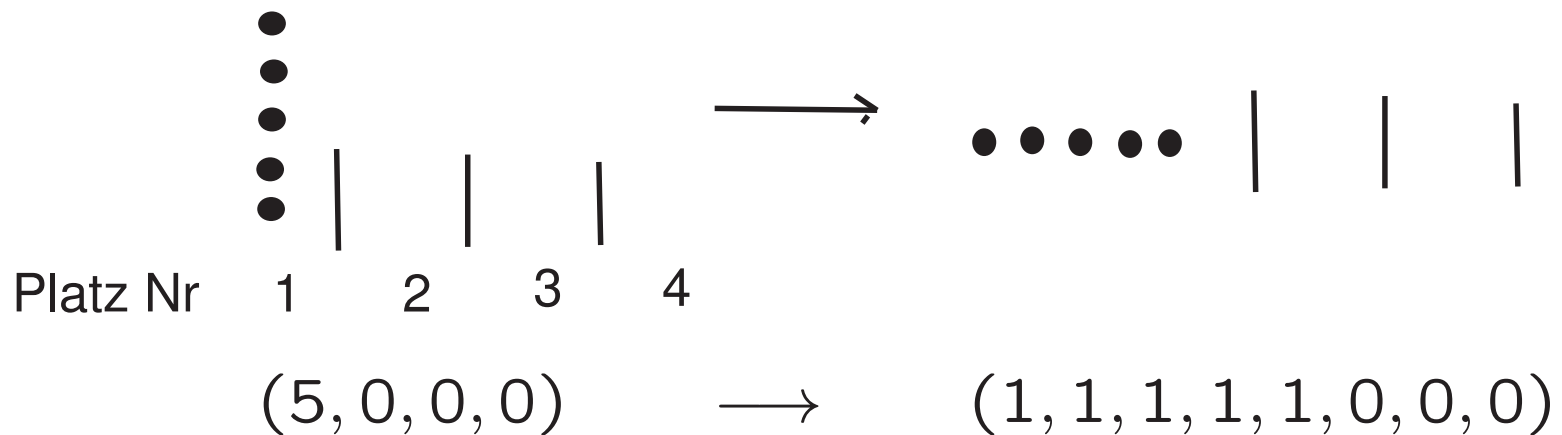
k ist ein r -tupel von Besetzungszahlen, kurz: eine Besetzung.

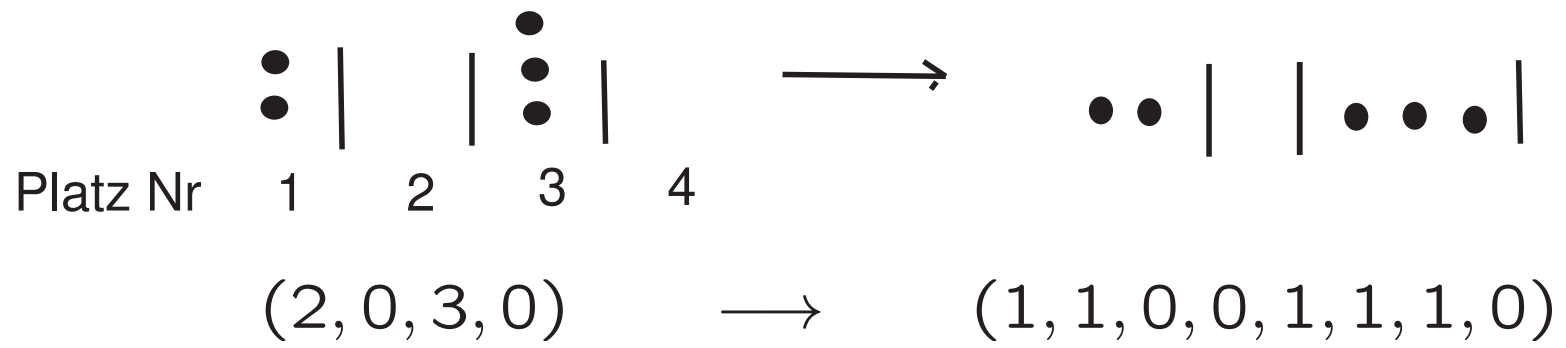
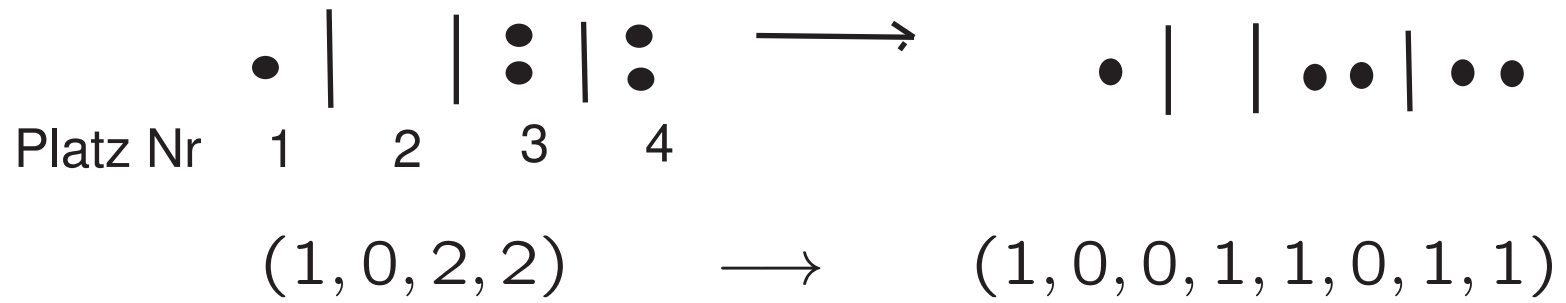
$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Hier hilft ein netter Trick, $S_{n,r}$ anders darzustellen.

Beispiel: Drei Elemente aus $S_{n,r}$ mit $r = 4$ und $n = 5$:





Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$
mit genau n Einsen

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5, r = 4$:

$$(k_1, k_2, \dots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j -ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz j . Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt.

Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den r Plätzen, insgesamt gibt es $r - 1$ solche Trennwände.

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$
mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n + r - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen
einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r - 1$ schwarzen
Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen
und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S .

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von h)

in eine rein zufällige Besetzung.