

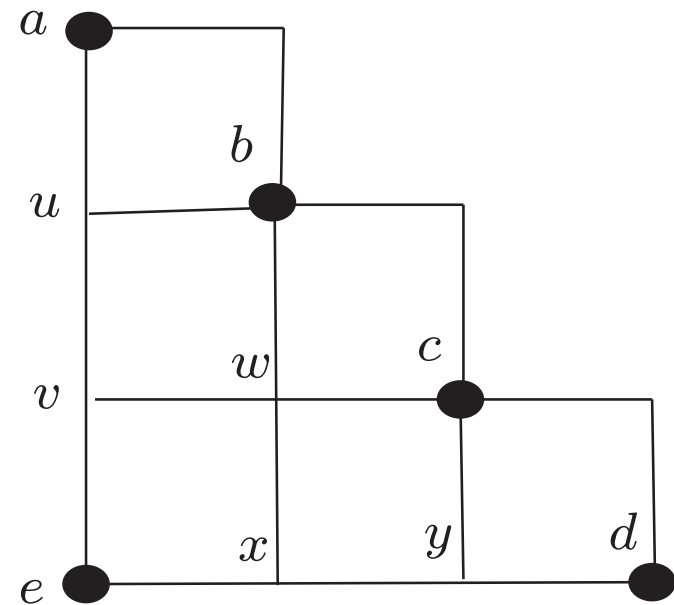
Vorlesung 15b

Eine Klausur aus 2015/16

mit Lösungen

1. Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen. Wieviele Schritte braucht es in Erwartung bei Start in w bis zum erstmaligen Treffen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$?

Hinweis: Nützen Sie die Symmetrie des Problems!



Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}$, $s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$

Wegen der Spiegelungssymmetrie an der "Diagonale" durch x und w gilt:

$$s(x) = s(v), s(y) = s(u).$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \frac{1}{2}s(x)$$

$$s(x) = 1 + \frac{1}{3}s(w) + \frac{1}{3}s(y)$$

$$s(y) = 1 + \frac{1}{3}s(x)$$

Einsetzen der 1. und der 3. in die 2. Gleichung ergibt:

$$s(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}s(x)\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}s(x)\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}s(x) + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}s(x)$$

$$\iff 18s(x) = 18 + 6 + 6 + (3 + 2)s(x)$$

$$\iff 13s(x) = 30, \quad s(x) = \frac{30}{13}, \quad \boxed{s(w) = \frac{28}{13}}.$$

2. X sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie

a) die Verteilungsfunktion

b) die Dichte

c) den Erwartungswert

von $Y := e^{X/2}$.

Hinweis als Rechenhilfe: $e^{-2 \ln b} = (e^{\ln b})^{-2} = ?$

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet \mathbb{R}_+ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist

$$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}.$$

Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Ableitung von F_Y ergibt sich: $f_Y(b) := F'_Y(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) := 0$ für $b < 1$.

In $b = 1$ stimmen die links- und rechtsseitige Ableitung von F_Y nicht überein - auf den Wert der Dichtfunktion in einzelnen Punkten kommt es aber auch nicht an!

$$\text{c) } \mathbf{E}[Y] = \int_1^{\infty} b f_Y(b) db = \int_1^{\infty} b \frac{2}{b^3} db = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{b^2} db = 2 \left(-\frac{1}{b} \Big|_1^{\infty} \right) = 2$$

Direkte Lösung von c) (ohne Rückgriff auf b)):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[h(X)] = \int_0^{\infty} h(a) f_X(a) da = \int_0^{\infty} e^{a/2} e^{-a} da = \int_0^{\infty} e^{-a/2} da \\ &= -2e^{-a/2} \Big|_0^{\infty} = 2. \end{aligned}$$

3. a) In einem p -Münzwurf mit n Versuchen ist K/n , die relative Anzahl von Erfolgen, für nicht zu kleines np und $n(1 - p)$, annähernd normalverteilt - mit welchem Erwartungswert und welcher Varianz?

b) In einem p -Münzwurf betrug die relative Häufigkeit der Erfolge bei n Versuchen 48%. Wie groß muss n sein, damit unter der Hypothese $p = 1/2$ eine mindestens so große Abweichung vom Erwartungswert eine Wahrscheinlichkeit von nicht mehr als 0.05 hat?

Lösung: a) K ist $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1 - p)$,

$$\mathbf{E}\left[\frac{K}{n}\right] = p, \quad \mathbf{Var}\left[\frac{K}{n}\right] = \frac{1}{n}p(1 - p)$$

b) Der beobachtete Ausgang von $\frac{K}{n}$ war $\frac{k}{n} = 0.48$, dessen absolute Abweichung vom Erwartungswert von $\frac{K}{n}$ ist $|\frac{k}{n} - p| = 0.02$.

Wie groß muss n sein, damit $\mathbf{P}\left(|\frac{K}{n} - p| \geq 0.02\right) \approx 0.05$? Die (approximative) Gleichheit trifft zu, wenn die Abweichung 0.02 das Zweifache der Standardabweichung von $\frac{K}{n}$ ist:

$$0.02 = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (wegen } p = 1/2\text{)}.$$

$$\text{Also: } \sqrt{n} = 50, \quad \boxed{n = 2500}$$

4. Wir betrachten n Spieler mit den Namen $1, 2, \dots, n$. Jedes Paar von Spielern entscheidet sich mit Wahrscheinlichkeit p (unabhängig von allen anderen Paaren), ob es eine Verbindung (“Kooperation”) eingeht. Für $i < j < k$ sagen wir, dass *die Dreieckskonstellation* $\{i, j, k\}$ *besteht*, wenn alle drei Paare (i, j) , (i, k) , (j, k) eine Verbindung eingehen.

a) Wieviele Dreieckskonstellationen können (für gegebenes $n \geq 3$) maximal bestehen?

b) Sei $n \geq 3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Dreieckskonstellation $\{1, 2, 3\}$?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen

(i) für allgemeines $n \geq 3$ und $p \in (0, 1)$, (ii) für $n = 10$ und $p = 1/4$.

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert p^3 .

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

$$\binom{n}{3} p^3$$

(ii) $\frac{15}{8}$.

5. Auf dem Zustandsraum $S := \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Übergangsmatrix P definiert durch

$$P(1, 1) = P(1, 2) = P(1, 3) = 1/3,$$

$$P(2, 1) = P(2, 3) = 1/2,$$

$$P(3, 1) = P(3, 2) = 1/2.$$

a) Finden Sie eine Verteilung π auf S mit $\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a)$, $a, b \in S$.

b) Es sei $X = (X_0, X_1, \dots)$ eine Markovkette zur Übergangsmatrix P mit Start in der in a) gefundenen reversiblen Gleichgewichtsverteilung π .

(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1)$ und $\mathbf{P}_\pi(X_7 < X_8)$.

(ii) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Zeitpunkte $i \in \{0, 1, \dots, 10\}$, für die $X_i < X_{i+1}$ gilt?

Lösung: a)

$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$$

$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$$

$$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \pi(3)$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \implies \pi(1)\left(1 + \frac{4}{3}\right) = 1,$$

$$\boxed{\pi(1) = \frac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \frac{2}{7}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) (i) } \mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) &= \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}) \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Weil π Gleichgewichtsverteilung ist, gilt insbesondere: Unter \mathbf{P}_π ist für jedes $i \geq 1$ das Paar (X_i, X_{i+1}) so verteilt wie (X_1, X_2) , also ist auch $\mathbf{P}(X_i < X_{i+1}) = \frac{3}{7}$.

c) Die gefragte Anzahl ist eine Summe von 11 Indikatorvariablen, jede hat (vgl. b) den Erwartungswert $\frac{3}{7}$. Aus der Linearität des EW folgt, dass die gefragte Anzahl den Erwartungswert $11 \cdot \frac{3}{7}$ hat.

6. Wir betrachten ein zweistufiges Experiment, bei dem X_1 exponentialverteilt ist zum Parameter $\lambda > 0$. Gegeben $\{X_1 = a\}$ ist X_2 normalverteilt mit Erwartungswert a und Varianz a . Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert

(ii) die Varianz
von X_2 .

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \quad \mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$

$$(**) \quad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Also ist

(i) wegen (*)

$$\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$$

und

(ii) wegen (**)

$$\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[X_1] + \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}.$$