Vorlesung 11a

Mehrstufige Zufallsexperimente

1. Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

(Buch S. 94)

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \ ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$= \cdots$$

$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n) \ .$$

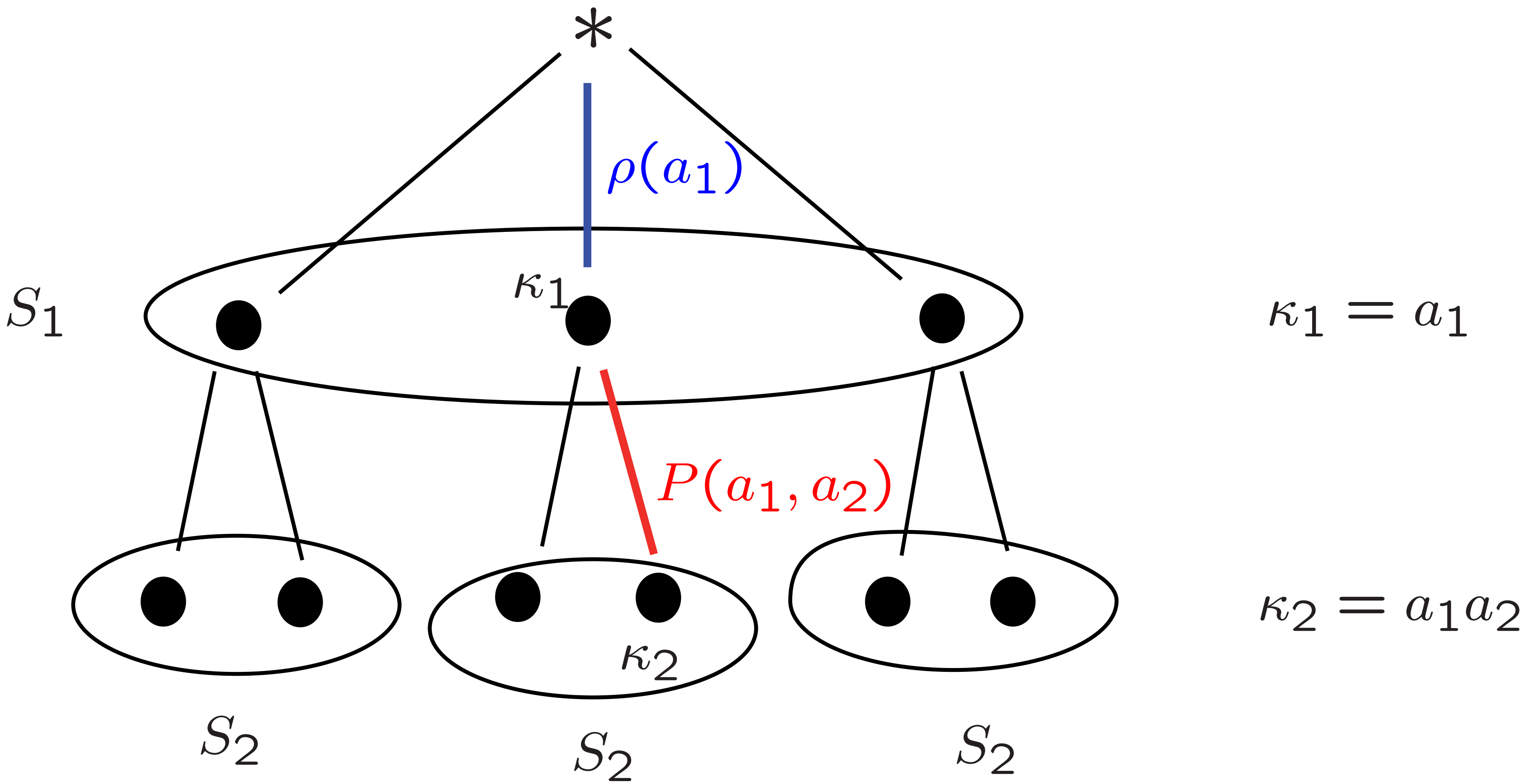
2. Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsexperimenten durch Bäume

(Buch S. 95)

Wir erinnern uns an die

Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten

durch *Bäume*:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Was 2 recht ist, ist $i+1$ billig:

$\kappa_i = a_1 \ldots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \;, \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \;\; \kappa_i = a_1 \ldots a_i, \;\; \kappa_{i+1} = a_1 \ldots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden,

ergibt sich als Produkt der Kantengewichte

entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.

3. Die Pólya-Urne

Oder

Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu ....

(Buch S. 94)

In einer Urne befinden sich anfangs
eine weiße und eine blaue Kugel.
In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.
Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (0 für blau, 1 für weiß).

Wir nennen dann $(Z_1, \ldots, Z_n)$ auch
eine (Standard-) *Pólya-Folge* der Länge n.

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

(das ist die W'keit, beim zweiten Zug blau zu ziehen,

wenn beim ersten Zug blau gezogen wurde)

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \frac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+\ell}{2+i} \text{ mit } a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} = 0, 1,$$

$$\ell = \ell(a_1, \ldots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \le j \le i, a_j = a_{i+1}\} \ ;$$

$1 + \ell$ ist also die Zahl der Kugeln in der Urne nach i Zügen, deren Farbe mit der Farbe der $i+1$-ten gezogenen Kugel übereinstimmt.

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\ldots,a_n)$ mit $a_1+\cdots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$(*)\ \mathbf{P}\big((Z_1,\ldots,Z_n)=(a_1,\ldots,a_n)\big)=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \dots, a_n)$

mit $a_1 + \dots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \dots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n .$$

Fazit: Die Anzahl der

nach n Zügen hinzugekommenen weißen Kugeln

ist uniform verteilt in $\{0, 1, \dots, n\}$.

4. Pólya-Urne mit r Farben

(Buch S. 95)

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$, also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} :=$ # Neuzugänge der Farbe j in n Schritten.

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r+1) \cdots (n+r-1)} = \frac{k_1! \cdots k_r!}{(n+r-1)!}(r-1)!\ .$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \, .$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = n! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \\ = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}},$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{rn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert

uniform verteilte Besetzungen!

5. Markovketten als spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

(Buch S. 97)

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die “Startverteilung”)

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \; .$$

6. Beispiele für Markovketten

(Buch S. 98)

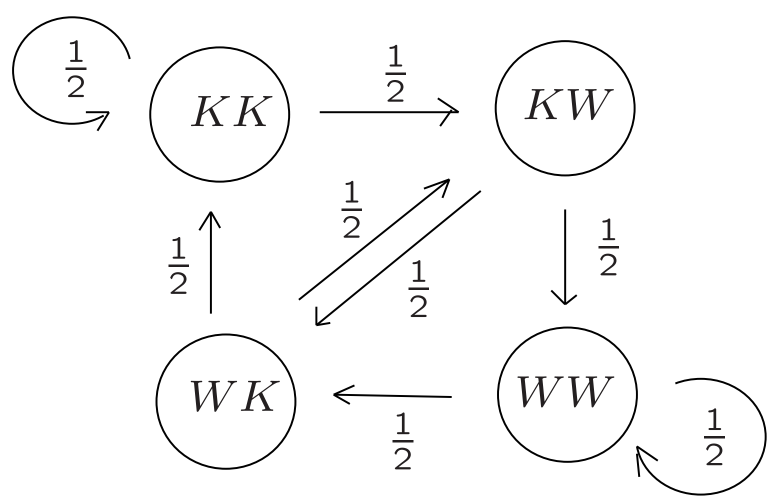
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \dots$ unabhängig und uniform veteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

$$S = \mathbb{Z}$$

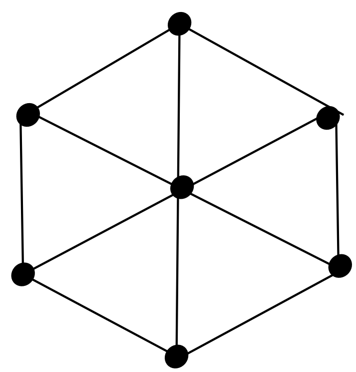
$$P(k, k+1) = p, \quad P(k, k-1) = 1 - p =: q$$

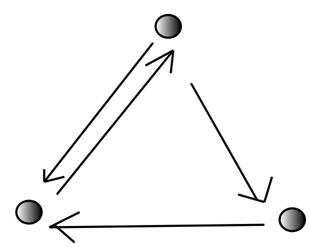
$\mathbf{Var}_a[X_n] = 4npq$ (Warum gilt das?)

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen





$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(w, b) : w, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w, b), (w + 1, b)) := \frac{w}{w + b}\,,$$

$$P((w, b), (w, b + 1)) := \frac{b}{w + b}\,.$$

Das modelliert dieselbe Situation wie in Abschnitt 3,
allerdings “sparsamer”:
als aktueller Zustand wird nicht der gesamte bisherige Pfad, sondern nur die Anzahl der weißen und blauen Kugeln in der Urne mitgeführt