Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 10. Januar 2017, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

33. S. Das zufällige Paar (X_1, X_2) mit Werten in $\{b, c, d\} \times \{1, 2, 3\}$ komme durch ein zweistufiges Experiment zustande, wobei $\mathbf{P}(X_1 = b) = 2\mathbf{P}(X_1 = c) = 2\mathbf{P}(X_1 = d)$ gelte und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$, $a_1 \in \{b, c, d\}$, durch die rechts angegebene Matrix bestimmt sind.

	1	2	3
b	0	0.6	0.4
c	0.3	0.2	0.5
d	0.6	0.3	0.1

(i) Finden Sie die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) und die Verteilung von X_2.

(ii) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von X_2 gegeben $X_1 = c$.

(iii) Finden Sie die *(im Sinn des erwarteten quadratischen Abstandes) beste Prognose von* X_2 auf der Basis von X_1, d.h. diejenige Zufallsvariable der Form $h(X_1)$, für die $\mathbf{E}[(X_2 - h(X_1))^2]$ minimal (über alle möglichen Funktionen h) wird.

(iv) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(a_2, .)$, $a_2 \in \{1, 2, 3\}$ so, dass das zufällige Paar (X_2, X_1) als zweistufiges Zufallsexperiment (jetzt mit X_2 als erster Stufe) entsteht.

34. 15 Namen sind in 5 Listen einsortiert. Die Längen $Z_1, \ldots, Z_5$ der Listen sind identisch verteilt und haben Varianz 16. Die Suchtiefen der in Liste j einsortierten Namen sind $0, 1, \ldots, Z_j - 1$.
a) Finden Sie $\mathbf{E}[Z_j]$.
b) Aus den 15 Namen wird rein zufällig einer gewählt. Berechnen Sie den Erwartungswert seiner Suchtiefe.

35 S X sei Exp(2)-verteilt, und gegeben $X = a$ sei Y normalverteilt mit Erwartungswert a und Standardabweichung $\sqrt{a}$. Berechnen Sie $\mathbf{Var}(X + Y)$ über die Zelegung der Varianz nach der ersten Stufe. (Sie dürfen dabei verwenden, dass die in der Vorlesung hergeleitete Formel auch für kontinuierlich verteilte Zufallsvariable gilt.)

36. Y sei uniform verteilt auf $S := \{1, 2, \ldots 5\} \cup \{21, 22, \ldots 30\}$.
Berechnen Sie $\mathbf{Var}[Y]$, indem Sie Y als zweite Stufe in einem zweistufigen Zufallsexperiment auffassen, dessen erste Stufe eine Bernoulli(1/3)-Zufallsvariable X ist. Was sind hier
(i) die Varianzen innerhalb der beiden Gruppen
(ii) die Varianz zwischen den Gruppen?