Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 14. Dezember 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

25. S ***(Serien- und Parallelschaltung)*** Für $i = 1, 2, 3$ sei X_i exponentialverteilt zum Parameter $2i$ und die X_i seien unabhängig.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass
(i) jedes der X_i größer als 2 ausfällt
(ii) mindestens eines der X_i größer als 2 ausfällt.

b) Berechnen Sie die Dichte von
(i) $\min(X_1, X_2, X_3)$
(ii) $\max(X_1, X_2, X_3)$.

26. ***(Rotationssymmetrie der 2-dimensioanlen Standardnormalverteilung)*** Es sei (X, Y) standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$. Weiter sei $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ der zu (X, Y) gehörige Radius und Θ der zu (X, Y) gehörige (im Bogenmaß gemessene) Winkel.

a) Begründen Sie auf den Spuren der Vorlesung 7a, dass
(i) R^2 exponentialverteilt ist zum Parameter $1/2$,
(ii) Θ uniform verteilt ist auf $[0, 2\pi)$.

b) In der Vorlesung haben wir rekapituliert, dass das Kreissegment G (in der (x, y)-Ebene) zwischen den Radien r_1 und r_2 und zwischen den (im Bogenmaß gemessenen) Winkeln θ_1 und θ_2 dem Rechteck $H = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ im "Radius-Winkel-Streifen" $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ entspricht (in dem Sinn, dass $(x, y) \in G \Longleftrightarrow (r, \theta) \in H$ für $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, vgl. Folie 19 aus VL 7a).
Weisen Sie damit die (schon aus der Rotationssymmetrie recht anschauliche einzusehende) Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen R und Θ auch formal nach.

27. S ***(Dreieck und Glocke)*** X_1 und X_2 seien unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt. Wir setzen $Y := X_1 + X_2$.

a) Nun ist ja 2 noch recht weit entfernt von ∞, trotzdem (oder gerade deshalb) wollen wir hier Y mit seiner Normalapproximation im Sinn des Zentralen Grenzwertsatzes vergleichen. Es sei dazu N eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu_N = \mu_Y$ und $\sigma_N = \sigma_Y$. Berechnen Sie $\mathbf{P}(|Y - \mu_Y| > 2\sigma_Y)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Zahl $\mathbf{P}(|N - \mu_N| > 2\sigma_N)$. *(Hinweis: Weil (X_1, X_2) so verteilt ist wie $(X_1, 1 - X_2)$, gilt $\mathbf{P}(|X_1 + X_2 - 1| > 2\sigma_Y) = \mathbf{P}(|X_1 - X_2| > 2\sigma_Y)$; hier hilft dann Aufgabe 23 b) weiter.)*

b) (als Kür) Skizzieren Sie die Verteilungs- und die Dichtefunktion von Y.

28. ***(Viele Versuche, kleine Erfolgswahrscheinlichkeit)*** 20000 Punkte werden unabhängig und uniform verteilt ins Quadrat $[0, 100] \times [0, 100]$ gesetzt. Berechnen Sie mit der Poisson-Näherung die Wahrscheinlichkeit, dass die Kreisscheibe mit Radius 1 um den Mittelpunkt des Quadrats
i) leer ausgeht
ii) genau 4 Punkte abbekommt.