Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 6. Dezember 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

21 S. U sei uniform auf $[0,3]$ verteilt, und X sei Exp(3)-verteilt.
Berechnen Sie
(i) die Verteilungsfunktion (ii) die Dichte (iii) den Erwartungswert (iv) die Varianz
von
a) U^4 b) $6X+2$.

22. a) Die Zufallsvariable U sei uniform auf $[0,1]$ verteilt. Finden Sie eine Abbildung $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, sodass $h(U)$
i) Bin (3, 1/4)-verteilt
ii) Exp(3)-verteilt
ist. Skizzieren Sie jeweils die Lösung.
Hinweis zu i): Zerlegen Sie das Einheitsintervall in vier Teilintervalle passender Länge. Zu ii): Das letzte Beispiel aus Vorlesung 6a ist hilfreich.

b) Z sei standard-normalverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert von e^Z. *Hinweis: Erweitern Sie den mittels der Dichte von Z ausgedrückten Erwartungswert $\mathbf{E}[e^Z]$ mit $e^{-1/2}e^{1/2}$ und verwenden Sie die Identität $x^2-2x+1=(x-1)^2$.*

23. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Exp(1/4)-verteilte Zufallsvariable in das Intervall $[10,20]$? Stellen Sie eine Beziehung zur Aufgabe 16 b) her.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Komponenten X_1 und X_2 einer auf $[0,1]\times[0,1]$ uniform verteilten Zufallsvariablen $X=(X_1,X_2)$ den Abstand $\geq \frac{1}{2}$?

24. S a) X sei normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Varianz 16. Bestimmen Sie Zahlen c und d so, dass $Y:=d+cX$ mit Wahrscheinlichkeit 0.95 in das Intervall $[9,11]$ fällt. Rechnen Sie dabei mit der Näherung $\mathbf{P}(|Z|\leq 2)\approx 0.95$ für standard-normalverteiltes Z.

b) Für $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$ und $q:=1-p$ sei X Bin(n,p)-verteilt und Y N(np,npq)-verteilt. In der Vorlesung haben wir zumindest ansatzweise begründet, warum für großes npq gilt:

$$P(X=k)\approx \mathbf{P}(k-\frac{1}{2}\leq Y\leq k+\frac{1}{2}).$$

In diesen Sinn ist die Verteilung von X durch die von Y approximierbar. Die Zahl n sei nun gerade mal so groß, dass $n\cdot 0.9+2\sqrt{n\cdot 0.9\cdot 0.1}\geq 100+\frac{1}{2}$. Begründen Sie, warum für dieses n und ein Bin$(n,0.9)$-verteiltes X gilt: $\mathbf{P}(X>100)\approx 0.025$. Eine Skizze ist hilfreich!

c) Es sei bekannt, dass jede einzelne bis zum Tag x angenommene Buchung eines Fluges mit Wahrscheinlichkeit 0.1 nach dem Tag x storniert wird. Wieviele Buchungen dürfen für diesen Flug bis zum Tag x höchstens angenommen werden, wenn bei 100 Plätzen im Flugzeug alle gebuchten Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.975 Platz finden sollen?