Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 29. November 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

17 S. a) S_1, S_2 und S_3 seien endliche Mengen, und (X_1, X_2, X_3) sei uniform verteilt auf $S_1 \times S_2 \times S_3$. Sind dann X_1, X_2, X_3 unabhängig? Geben Sie eine Begründung oder ein Gegenargument.
b) (X_1, X_2) sei uniform verteilt auf $\{(-1,0),(0,1),(0,-1),(1,0)\}$. Sind X_1 und X_2 unabhängig? Sind X_1 und X_2 unkorreliert?

18. a) Die Verteilung des zufälligen Paares (X_1, X_2) mit Werten in $S_1 \times S_2$ lässt sich angeben durch die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$. Wir betrachten vier Beispiele, bei den ersten beiden ist $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{b,c\}$ bei den letzten beiden ist $S_1 = \{1,2,3\}$, $S_2 = \{b,c,d\}$.

i)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.15	0.45

ii)

	b	c
1	0.1	0.3
2	0.2	0.4

iii)

	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	12γ	14γ	20γ
3	18γ	21γ	30γ

iv)

	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	13γ	14γ	20γ
3	17γ	21γ	30γ

jeweils mit $\gamma := \frac{1}{138}$. In welchen Fällen sind X_1 und X_2 unabhängig, und in welchen nicht? Bei (iii) und (iv) sei Ihnen dabei erlaubt, das folgende, in Übung 25b aus dem WS 15/16 bereitgestellte handliche Kriterium zu verwenden: X_1 *und* X_2 *sind genau dann unabhängig, wenn die Zeilen der Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte zueinander proportional sind.*
b) (als Kür für diejenigen, die der Sache auf den Grund gehen wollen): Knöpfen Sie sich Übung 25b aus dem WS 15/16 samt den dort gegegeben ausführlichen Lösungshinweisen vor, und leiten Sie damit das obige Kriterium her. (Auf die alte Lehrveranstaltungsseite werden Sie geführt, indem Sie in der Web-Adresse der aktuellen Seite die Jahreszahlen verändern.)

19. S In einer Population von 100 Individuen haben 60 Individuen die Größe 10, 30 die Größe 5 und 10 die Größe 15. Es sei X die Größe eines rein zufällig aus der Population gewählten Individuums.
a) Berechnen Sie
(i) den Erwartungswert μ, (ii) die Varianz σ^2, (iii) die Standardabweichung von X.
b) Wir ziehen rein zufällig und ohne Zurücklegen aus der Population und bezeichen mit X_i die Größe des i-ten gezogenen Individuums.
α) Warum hängt (für $1 \le i \ne j \le 100$) die Kovarianz $\mathbf{Cov}[X_i, X_j]$ nicht von i und j ab?
β) Berechnen Sie die Kovarianz von X_1 und X_2 aus der Identität $0 = \mathbf{Var}(X_1 + \ldots + X_{100})$.
γ) Berechnen Sie die Varianz des Stichprobenmittels $\frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$.

20. Schätzen Sie in der Situation von Aufgabe 19 mittels der Ungleichung von Chebyshev die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass das Stichprobenmittel $\frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ um mehr als 2 von μ abweicht.