Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 22. November 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

13. In Aufgabe 10 haben wir gezeigt, dass für eine Bin(n,p)-verteilte Zufallsvariable X_n gilt: $\mathbf{E}[X_n^2] = npq + (np)^2$.
a) Folgern Sie daraus mit der Linearität des Erwartungswertes, dass

$$\mathbf{E}[(X_n - np)^2] = npq \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\left[\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2\right] = \frac{pq}{n}.$$

b) Beweisen Sie mit der Ungleichung von Markov: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathbf{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{pq}{n}.$$

c) Von b) ist es nur mehr ein kleiner Schritt zum *Gesetz der großen Zahlen von Jakob Bernoulli: Sei $Z_1, Z_2, \dots$ ein fortgesetzter p-Münzwurf und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mathbf{P}(|\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) - p| \geq \varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$ eine gegen 0 konvergente Folge, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Anzahl der Erfolge um mehr als ε von der Erfolgswahrscheinlichkeit p abweicht, wird verschwindend klein im Grenzwert $n \to \infty$.* Führen Sie diesen Schritt durch.

14. S Wir betrachten dieselbe Situation wie in Aufgabe 9a) und interpretieren X_i als die zufällige Platzwahl des Individuums i, mit r möglichen Plätzen für das Individuum i, $i = 1, \dots, n$. (Zur Erinnerung: Mehrfache Wahl eines Platzes ist erlaubt, es handelt sich um ein n-faches $(1/r, \dots, 1/r)$-Würfeln.) Es sei $n = 8$ und $r = 10$.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird weder der Platz 2 noch der Platz 3 gewählt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens einer der Plätze 1, 2 oder 3 nicht gewählt?
Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse $E_i := \{\text{Platz } i \text{ wird nicht gewählt}\}$ und verwenden Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen alle drei Plätze 1, 2, 3 zum Zug?

15. Wieder betrachten wir dieselbe Situation wie in den Aufgaben 9a und 14, diesmal mit $n = 3r$. Berechnen Sie für $r \to \infty$ den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit, dass die Plätze $1, 2, 3$
a) allesamt leer ausgehen
b) ingesamt genau viermal gewählt werden.

16. S a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt beim p-Münzwurf mit $p = 1/4$ der erste Erfolg später als zum Zeitpunkt 10, aber nicht später als zum Zeitpunkt 20?
b) Wir betrachten jetzt einen Münzwurf, bei dem pro Millisekunde ein Versuch kommt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei so eingestellt, dass die erwartete Anzahl der Erfolge in 20 Sekunden gleich 5 ist. Berechnen Sie *näherungsweise* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Erfolg später als 10 Sekunden, aber nicht später als 20 Sekunden kommt.