

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 15. November 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

9. S a) Für natürliche Zahlen r und n sei (X_1, \dots, X_n) uniform verteilt auf $\{1, \dots, r\}^n$. Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Kollisionen, d.h. den Erwartungswert der Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $X_i = X_j$. Fällt Ihnen ein Zusammenhang mit einer der in Vorlesung 1b hergeleiteten Näherungen für die “Wahrscheinlichkeit von null Kollisionen” auf?

b) Es seien p_1, p_2 und p_3 drei nichtnegative Zahlen mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. In einem vollständigen Graphen mit n Knoten werden die Kanten per (p_1, p_2, p_3) -Würfeln blau, rot oder grün gefärbt. Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Dreiecke mit drei gleichfarbigen Seiten.

10. X sei binomialverteilt zu den Parametern n und p . Berechnen Sie $\mathbf{E}[X^2]$, indem Sie X als Summe von Zählvariablen schreiben.

11. X_1, \dots, X_{10} seien die Resultate eines rein zufälligen Ziehens ohne Zurücklegen aus der Menge $\{1, \dots, 100\}$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $M_n := \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i^2$.
Zur Erinnerung: $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

12. S 32 Karten, bestehend aus je 8 derselben Farbe, werden in rein zufälliger Reihenfolge aufgeschlagen. Für jede der 32 Karten bekommen Sie einen Euro, wenn sie dieselbe Farbe hat wie die unmittelbar zuvor oder die unmittelbar danach aufgeschlagene Karte.¹ Berechnen Sie die erwartete Gesamtauszahlung. (Man beachte: Die erste aufgeschlagene Karte hat keinen Vorgänger und die letzte aufgeschlagene Karte hat keinen Nachfolger.)

¹“Oder” ist hier - wie auch sonst in dem in der Stochastik üblichen Sprachgebrauch - im nicht ausschließenden Sinn verstanden. Haben z.B. die ersten 4 aufgeschlagenen Karten die Farben *rot, rot, rot, blau*, dann bekommen Sie aus den ersten 3 Aufschlägen insgesamt 3 Euro. Haben die ersten 4 aufgeschlagenen Karten die Farben *rot, blau, rot, rot*, dann bekommen Sie aus den ersten 3 Aufschlägen insgesamt 1 Euro.