Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 8. November 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

5. Für die Zyklendarstellung einer Permutation hat sich eine suggestive Schreibweise eingebürgert, die schon an einem Beispiel einsichtig wird: Die Zyklendarstellung der in der Vorlesung betrachteten Permutation 5 , 2, 7, 3, 1, 4, 6 von $1, \dots, 7$ schreibt man als $(1\,5)(2)(3\,7\,6\,4)$.
Wir beschreiben jetzt ein rekursives Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n+1$ aus einer Permutation von $1, \dots, n$, ausgehend von deren Zyklendarstellung: *Das Element $n+1$ wird jeweils mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ auf einen der n Plätze rechts neben $1, 2, \dots, n$ (innerhalb des jeweiligen Zyklus) gesetzt. Ebenfalls mit W'keit $\frac{1}{n+1}$ wird das Elemet in einen neuen Zyklus (der Länge 1) gesetzt.*
a) Zeichnen Sie (in Form eines Baumes) die 6 Pfade, die, ausgehend vom trivialen Zyklus (1), zu den 6 Permutationen von 1, 2, 3 führen.
b) Begründen Sie induktiv, dass zu jeder der $n!$ Permutationen von $1, 2, \dots, n$ genau ein Pfad (im Sinn von a)) führt.
c) Warum liefert der Algorithmus für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine rein zufällige Permutation von $\{1, \dots, n\}$?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen in einer rein zufälligen Permutation von $\{1, \dots, 100\}$
(i) 1, 2 und 3 (ii) 80, 90 und 100
im selben Zyklus?

6. a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus f Frauen und m Männern ein k-köpfiges Komitee (ohne Reihung) auszuwählen, in dem w Frauen sind? (Dabei ist $w \le k \le f + m$.)
b) Beweisen Sie ohne weitere Rechnung, dass

$$\sum_{w=0}^{k} \binom{f}{w}\binom{m}{k-w} = \binom{f+m}{k}.$$

7. S. i) (X_1, X_2, X_3) sei eine uniform verteilte Besetzung von 3 Plätzen mit 10 Objekten. Wie wahrscheinlich ist es, dass jeder Platz mit mindestens zwei Objekten besetzt wird? Skizzieren Sie die Menge der zugehörigen Ausgänge als Teilmenge des in der Vorlesung 2a betrachteten de Finetti-Dreiecks.
(ii) Sei $2r \le n$. Begründen Sie: Die Anzahl der Besetzungen von r Plätzen mit n Objekten, die auf jeden Platz mindestens zwei Objekte setzen, ist gleich der Anzahl der Besetzungen von r Plätzen mit $n - 2r$ Elementen.[1]
(iii) T sei eine rein zufällige 2-elementige Teilmenge der Menge $\{1, \dots, 20\}$. Wir setzen $V := T \cup \{0, 21\}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass je zwei verschiedene Elemente von V mindestens den Abstand 3 haben?

8. S. a) In einer Urne befinden sich 10 rote, 20 blaue und 30 grüne Kugeln. Man zieht n-mal rein zufällig mit Zurücklegen und notiert $Z_i = 1$ (bzw. $Z_i = 2$ bzw. $Z_i = 3$) falls die i-te gezogene Kugel rot (bzw. blau bzw. grün) ist. Prüfen Sie nach, dass $(Z_1, \dots, Z_n)$ ein n-faches (p_1, p_2, p_3)-Würfeln (mit passendem (p_1, p_2, p_3)) im Sinn der in der Vorlesung gegebenen Definition ist.
b) Überprüfen Sie anhand der Definition (und illustrieren Sie anhand des Beispiels in Teil a)): Wenn man bei einem n-fachen $(p_1, \dots, p_r)$-Würfeln $(Z_1, \dots, Z_n)$ zwei Ausgänge zu einem zusammenfasst in dem Sinn, dass man $Z'_i = r - 1$ setzt falls $Z_i \in \{r-1, r\}$, und $Z'_i = Z_i$ sonst, dann ist $(Z'_1, \dots, Z'_n)$ ein n-faches $(p_1, \dots, p_{r-2}, p_{r-1} + p_r)$-Würfeln.
c) $(X_1, \dots, X_r)$ sei multinomial $(n; p_1, \dots, p_r)$-verteilt. Wie ist dann $(X_1 + X_2, X_3, \dots, X_r)$ verteilt?

[1] Zur Erinnerung: Bei einer *Besetzung* (als Synonym für ein r-Tupel von Besetzungszahlen) unterscheiden wir nicht, mit welchen Objekten der jeweilige Platz besetzt ist.