

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 17. Januar 2017, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

37. a) X und Y seien unabhängig und $\text{Pois}(\alpha)$ bzw. $\text{Pois}(\beta)$ -verteilt. Begründen Sie, dass $X + Y$ $\text{Pois}(\alpha + \beta)$ verteilt ist. *Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{i+j=k} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} \frac{\beta^j}{j!} e^{-\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^k}{k!} e^{-(\alpha + \beta)}$.*

warum gilt das?

- b) Berechnen Sie die Gewichte der bedingten Verteilung von X gegeben $X + Y = n$, $n \in \mathbb{N}$.
 c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$. Dabei sind $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Kopien von X , die auch von Y unabhängig sind.

38. Im Fachbereich A einer Universität war die Durchfallquote bei der Aufnahmeprüfung 0.4 bei den Männern und 0.3 bei den Frauen, im Fachbereich B war sie 0.8 bei den Männern und 0.7 bei den Frauen. (In beiden Fachbereichen haben Frauen damit jeweils besser abgeschnitten als Männer.) Paradoxerweise war die Durchfallsquote bei den Männern insgesamt (mit den beiden Fachbereichen zusammengefasst) niedriger, nämlich 0.5, im Gegensatz zu 0.6 bei den Frauen.

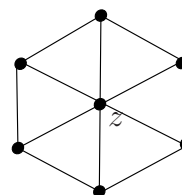
- a) Wie kann das sein? Berechnen Sie aus den Angaben, ein wie großer Prozentsatz der Männer (Frauen) im Fachbereich B angetreten ist.¹
 b) Wie groß war der Anteil der Frauen an den “Erfolgreichen”, wenn
 (i) insgesamt gleich viele Männer und Frauen angetreten sind,
 (ii) doppelt so viele Frauen wie Männer angetreten sind?
 c) Ein wie großer Anteil der “Erfolgreichen” entfiel auf den Fachbereich A , wenn
 (i) in beiden Fachbereichen gleich viele Personen angetreten sind,
 (ii) im Fachbereich A doppelt so viele Personen angetreten sind wie im Fachbereich B ?

39. S U_0, U_1, U_2, U_3 seien unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt.

- a) Bestimmen Sie $\mathbf{P}(U_1 < U_0, U_2 < U_0)$ und $\mathbf{P}(U_1 < U_0, U_2 < U_0, U_3 \geq U_0)$. (*Tipp: Arbeiten Sie mit rein zufälligen Permutationen, siehe Folie 14 in VL 2a.*)
 b) Wir definieren $Z_1 := I_{\{U_1 < U_0\}}$, $Z_2 := I_{\{U_2 < U_0\}}$, $Z_3 := I_{\{U_3 < U_0\}}$.
 (i) Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_2 = 1 | Z_1 = 1)$ und $\mathbf{P}(Z_3 = 1 | Z_1 = 1, Z_2 = 0)$.
 (ii) Tragen Sie die Gewichte der Übergangsverteilungen des durch (Z_1, Z_2, Z_3) beschriebenen 3-stufigen Experiments in einen Baum der Tiefe 3 ein.

40. S a) $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ sei eine (p, q) -Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p = 3/4$ (d.h. man addiert zur aktuellen Position in jedem Schritt unabhängig $+1$ mit W'keit p und -1 mit W'keit $q = 1 - p$) und Start in 0. Wie groß muss n mindestens sein, damit X_n mit Wahrscheinlichkeit 0.975 größer als 100 ist? Verwenden Sie die Normalapproximation.

b) $(Y_n)_{n=0,1,2,\dots}$ sei eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen (d.h. man geht in jedem Schritt unabhängig zu einem rein zufällig gewählten Nachbarn der aktuellen Position). Der Startpunkt sei $Y_0 = z$. Finden Sie die Verteilung von Y_2 .



Gesegnete Weihnachten und ein glückliches Jahr 2017!

¹Die Zahlen hier sind erfunden. Eine ähnliche Geschichte hat sich allerdings tatsächlich einmal an der Universität Berkeley zugetragen und führte sogar zu einer Diskriminierungsklage, siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Simpson-Paradoxon>