Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 1. November 2016, vor der Vorlesung (12:20-12:30 im Magnus HS)

1. S. Wie in der Vorlesung betrachten wir eine Gesamtfläche G bestehend aus g Pixeln und eine Teilfläche F bestehend aus f Pixeln. Jetzt geht es um eine dreimal wiederholte rein zufällige Wahl eines Pixels aus G (anders gesagt: um ein Ziehen aus G mit Zurücklegen), beschrieben durch eine auf dem Wertebereich $\{1,\dots,g\}^3$ uniform verteilte Zufallsvariable $X = (X_1, X_2, X_3)$.
a) Wieviele verschiedene mögliche Ausgänge von X gibt es, bei denen zwei der X_i auf die Menge $\{1,\dots,f\}$ und eines auf die Menge $\{f+1,\dots,g\}$ fallen? Drücken Sie das Ergebnis durch g und durch $p := f/g$ aus.
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei von den drei Pixeln aus F gewählt werden?
c) Es sei M die zufällige Trefferquote von F . Illustrieren Sie für $p = 0.195$ und $n = 3$ das Ergebnis aus b) mittels des über den Link auf der StofI-Web-Seite zur Verfügung gestellten R-Programms “Monte Carlo Simulation”.[1] Betrachten Sie dazu ein Histogramm der Schätzwerte aus (z.B.) 1000 Wiederholungen des Zufallsexperiments.

2. Erkunden Sie in der in Aufgabe 1 beschriebenen Situation (wieder für $p = 0.195$) mittels des R-Programms “Monte Carlo Simulation”, wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn (i) $n = 100$ (ii) $n = 400$ (iii) $n = 1600$ Punkte in die Menge G geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmäler?

3. Q sei das Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Wir denken uns Q aus 1000 mal 1000 Pixel bestehend. Es sei D die Menge der Pixel auf der Diagonale von Q, und F die Menge der Pixel, die von der Diagonalen einen Abstand höchstens 0.5 besitzen. Die Zufallsvariable X beschreibe die rein zufällige Wahl eines Pixels aus Q. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
a) $\{X \in D\}$, b) $\{X \in F\}$.
Begnügen Sie sich dabei in b) mit einer Näherungslösung, indem Sie einen passenden Flächeninhalt berechnen.

4 S. 3 Studierende wählen rein zufällig (und ohne irgendeine gegenseitige Absprache) je eine von 6 möglichen Gruppen. Wie wahrscheinlich ist es, dass sie alle in verschiedenen Gruppen landen? Verwenden Sie
(i) die exakte Berechnung
(ii) die Stirling-Approximation
(iii) die in der Vorlesung diskutierte Näherung $\exp(-\frac{n(n-1)}{2r})$
und vergleichen Sie die Ergebnisse.

[1] Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org, zu finden auch über google → R, auf Ihren Rechner.