

Vorlesung 8b

Kovarianz und Korrelation

1. Die Kovarianz und ihre Eigenschaften

Wir erinnern an die Definition der
Kovarianz

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y
mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$ ist

$$\mathbf{Cov}[X, Y] := \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)]$$

Insbesondere ist also

$$\mathbf{Cov}[X, X] = \mathbf{Var}[X]$$

Die Kovarianz ist

- im Fall von zwei gleichen Einträgen nichtnegativ:

$$\text{Cov}[X, X] \geq 0$$

- in den beiden Einträgen symmetrisch:

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$$

- *bilinear*, d.h. in jedem einzelnen Eintrag linear:

$$\text{Cov}[c_1X_1 + c_2X_2, Y] = c_1\text{Cov}[X_1, Y] + c_2\text{Cov}[X_2, Y]$$

2. Die Kovarianz-Varianz-Ungleichung

Die “Kovarianz-Varianz-Ungleichung”

$$|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{Var}X} \sqrt{\text{Var}Y}$$

folgt sofort aus der

Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Für reellwertige Zufallsvariable G, H mit $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] < \infty$

ist

$$(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2] \mathbf{E}[H^2] .$$

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2] \mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}, V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ erfüllen

$$\mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

Aus $\pm 2UV \leq U^2 + V^2$ folgt

$$\pm \mathbf{E}[UV] \leq 1.$$

Multiplikation mit $\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ ergibt die **Behauptung**.

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2] \mathbf{E}[H^2]$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Dann folgt aus dem

Satz von der Positivität des Erwartungswertes

$$\mathbf{P}(G^2 = 0) = 1,$$

$$\text{also } \mathbf{P}(GH = 0) = 1$$

und

$$\mathbf{E}[GH] = 0. \quad \square$$

3. Der Korrelationskoeffizient

Definition.

Für zwei Zufallsvariable X, Y
mit positiven, endlichen Varianzen ist

$$\kappa = \kappa_{XY} := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}X} \sqrt{\text{Var}Y}}$$

der **Korrelationskoeffizient** von X und Y .

Aus der Kovarianz-Varianz-Ungleichung folgt sofort

$$-1 \leq \kappa \leq 1.$$

4. Die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten

5 prominente Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung
eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

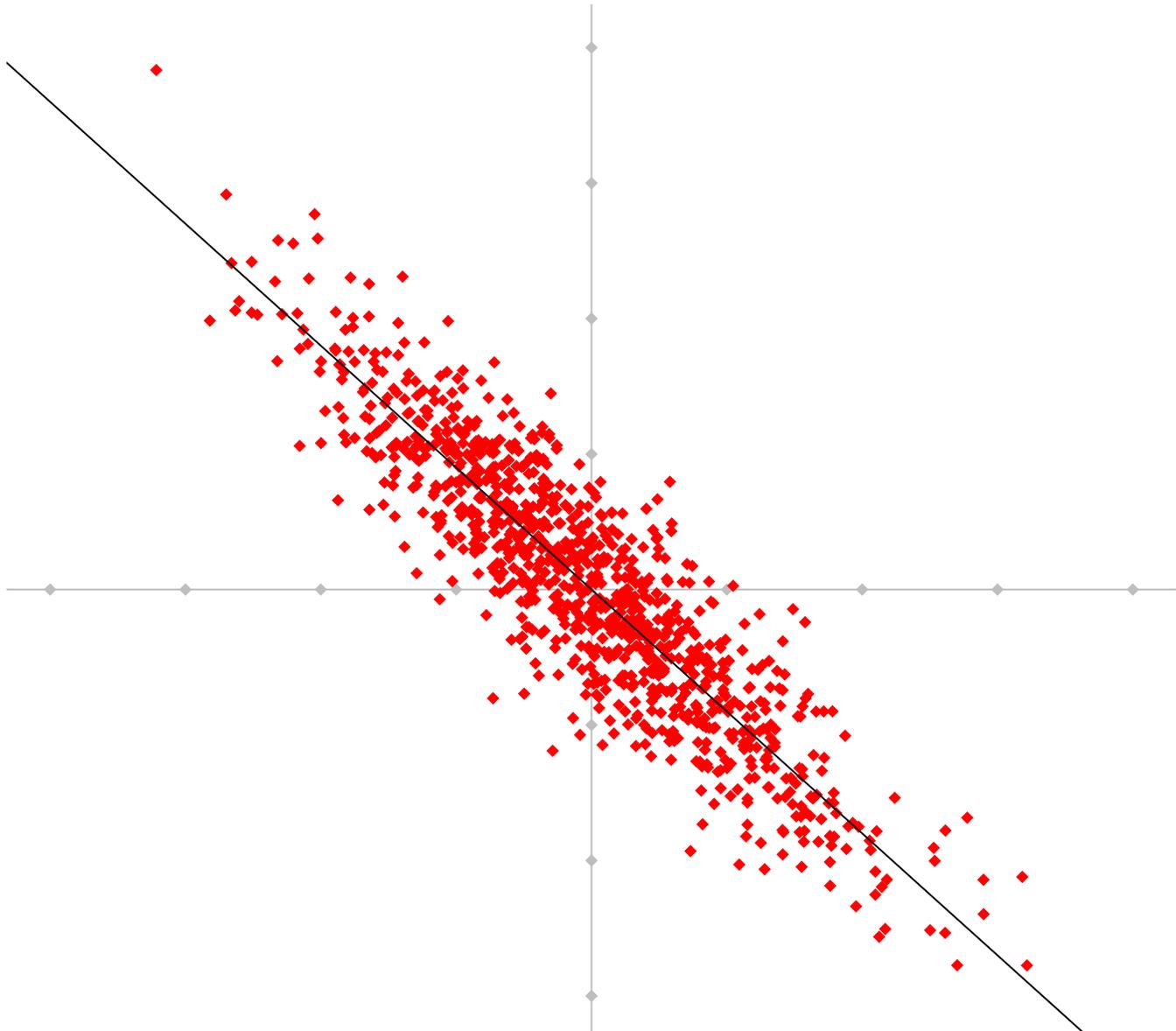
μ_X und μ_Y : die Erwartungswerte von X und Y

σ_X und σ_Y : die Standardabweichungen von X und Y

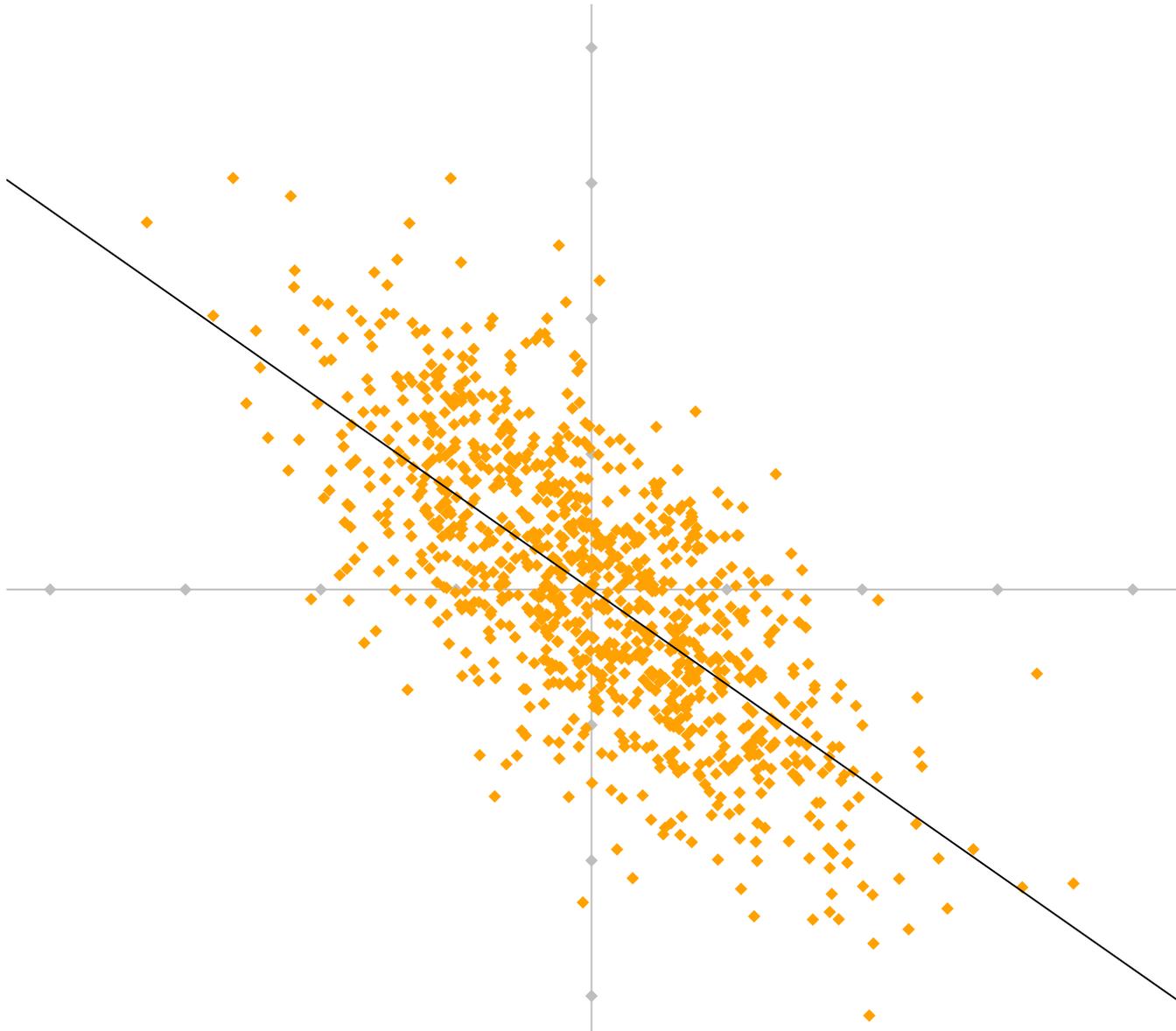
κ_{XY} : der Korrelationskoeffizient von X und Y

Die folgenden Bilder
($\kappa = -0.9, -0.7, \dots, 0.7, 0.9$)
zeigen jeweils die Realisierungen von
1000 unabhängige Kopien (X_i, Y_i)
von einem “gemeinsam normalverteilten”
zufälligen Paar (X, Y) ,
zusammen mit der (demnächst in der Vorlesung erklärten)
Regressionsgeraden (für Y auf der Basis von X)

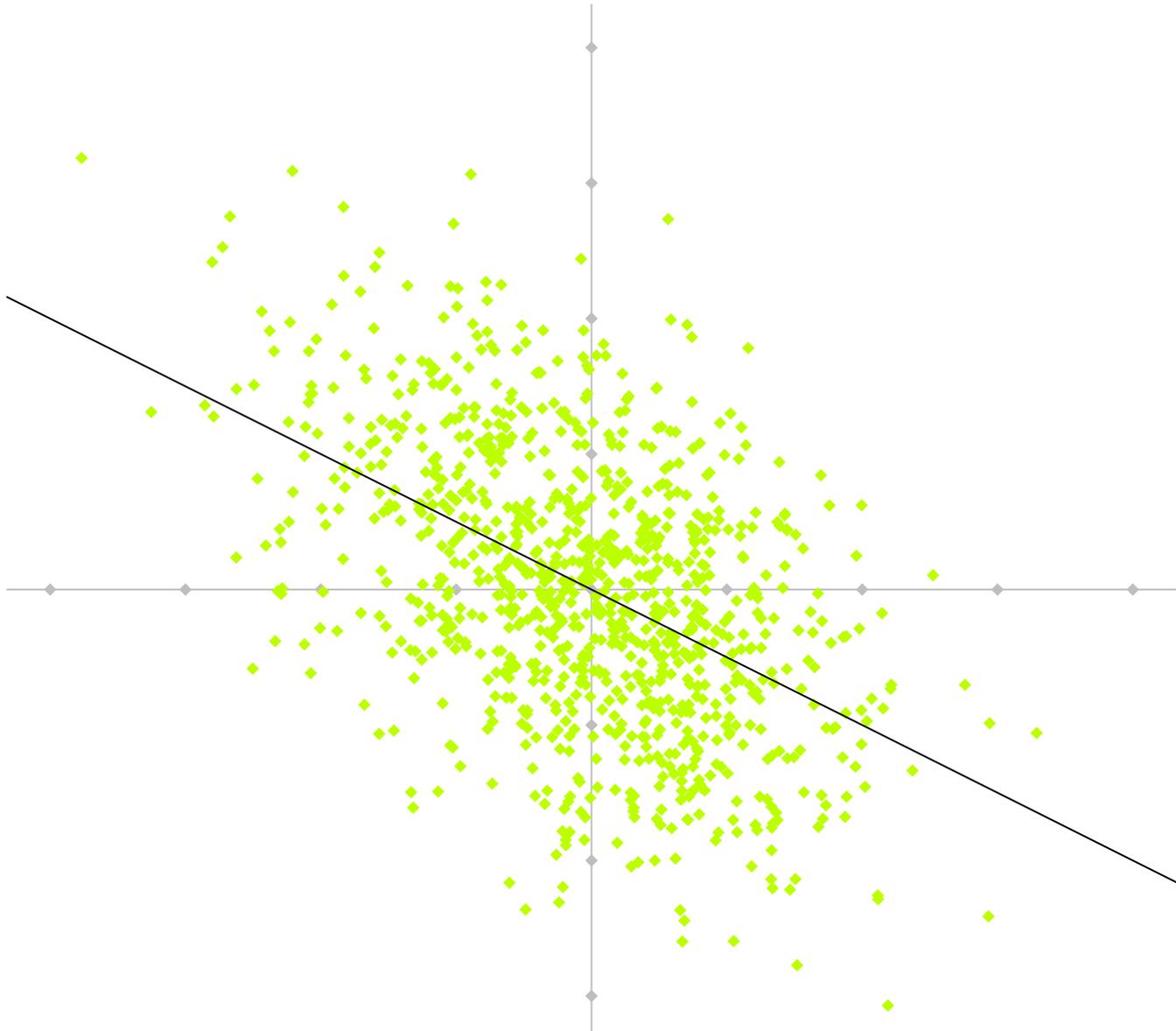
Korrelation = - 0.9



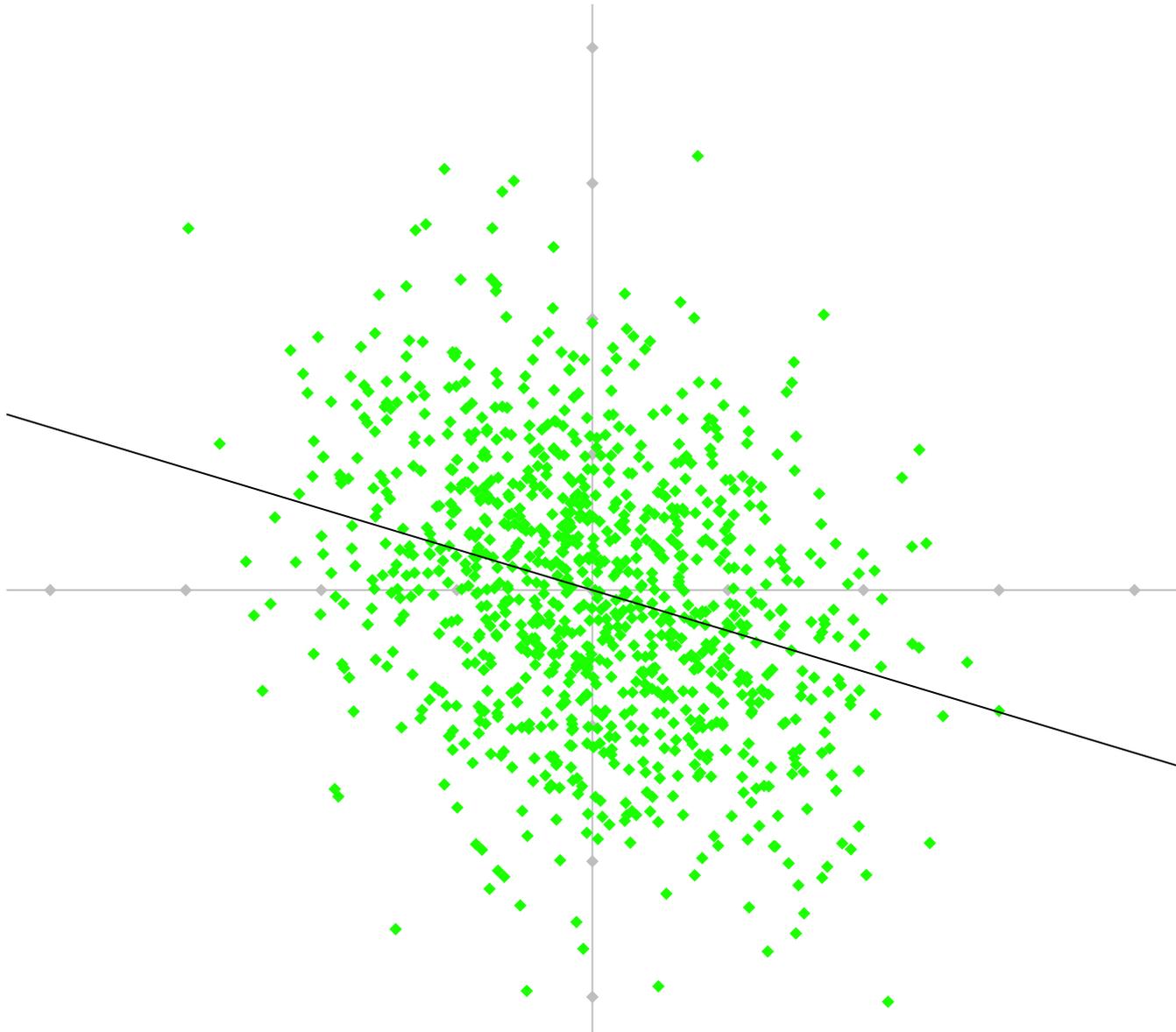
Korrelation = - 0.7



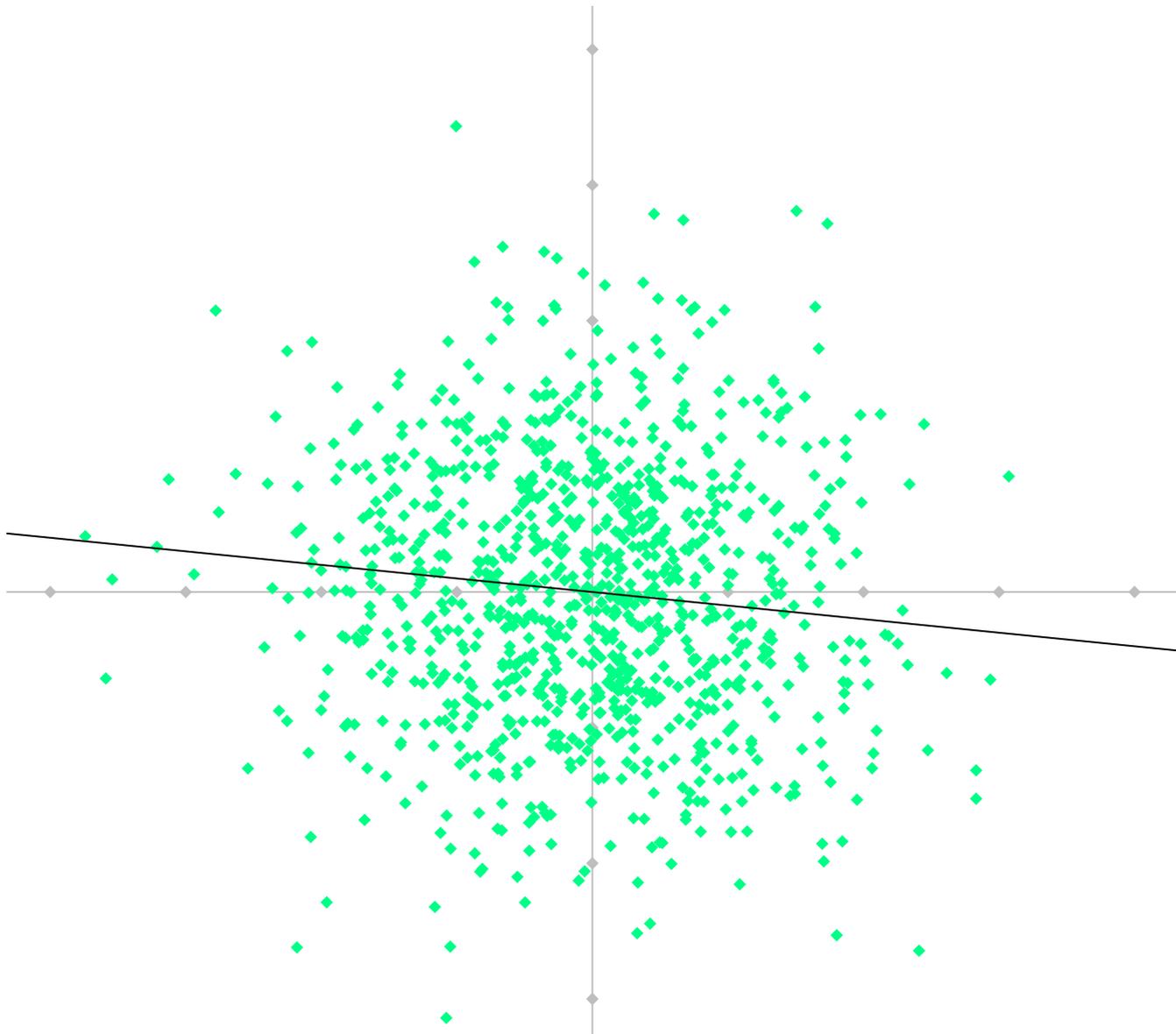
Korrelation = - 0.5



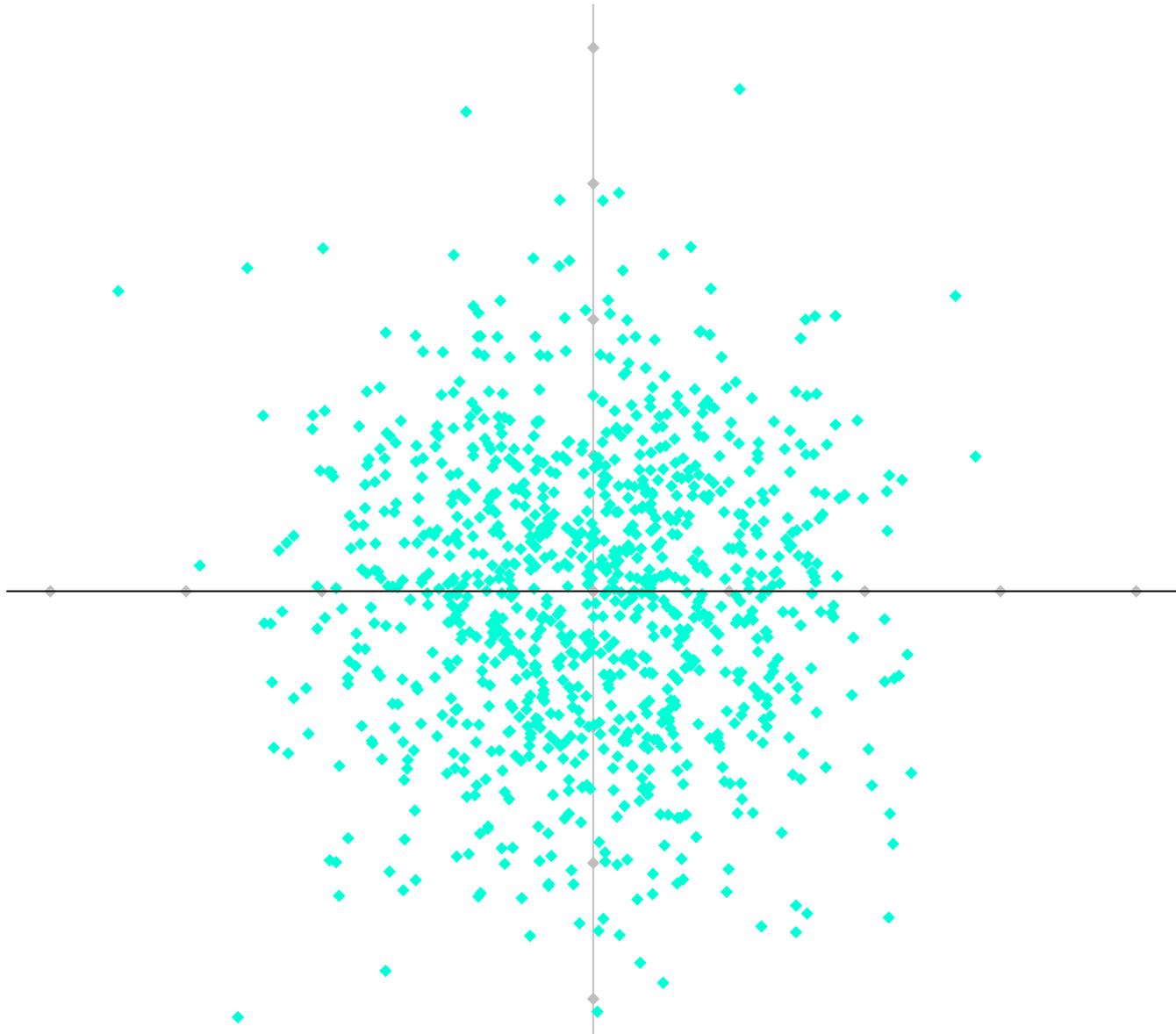
Korrelation = - 0.3



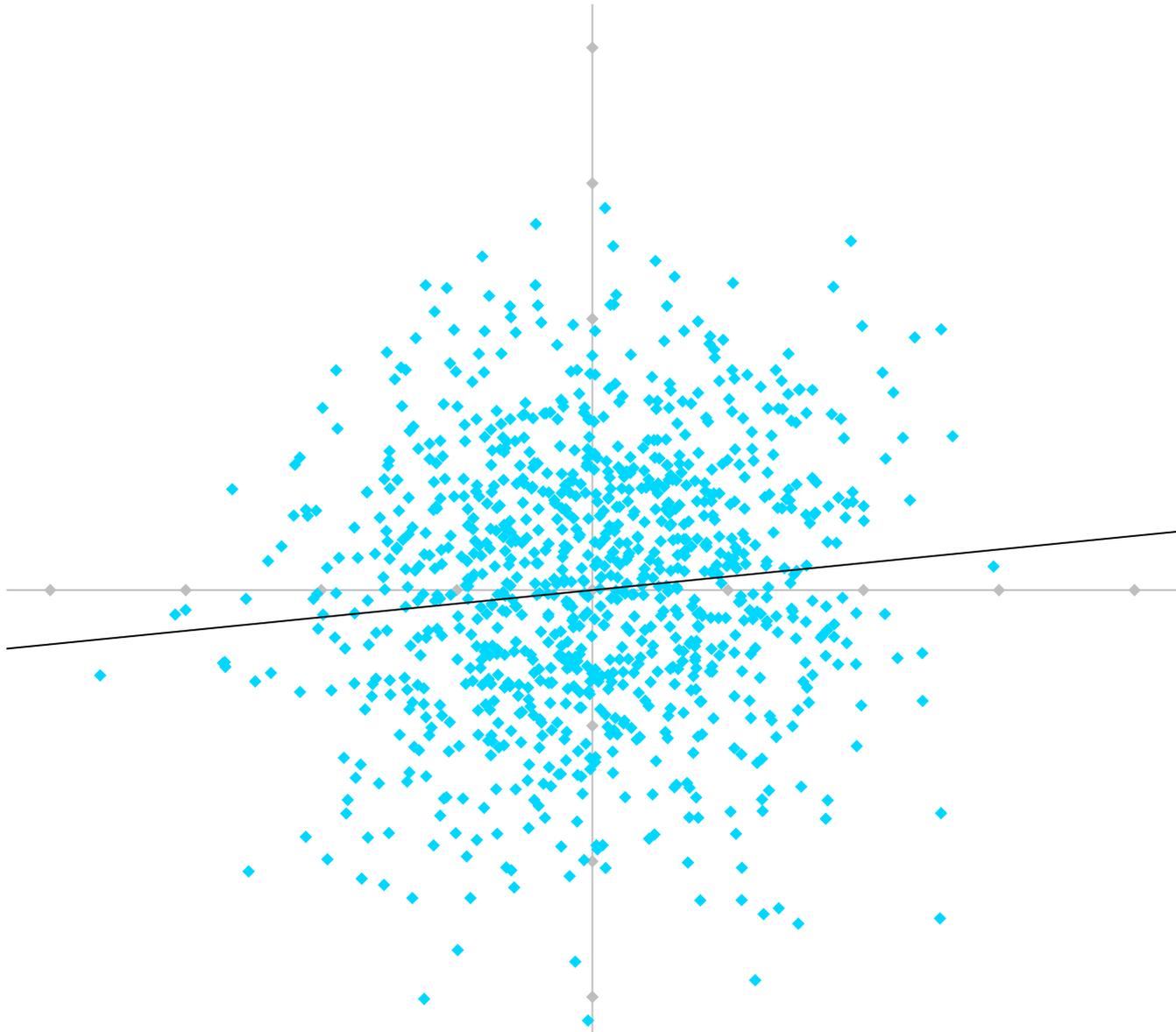
Korrelation = - 0.1



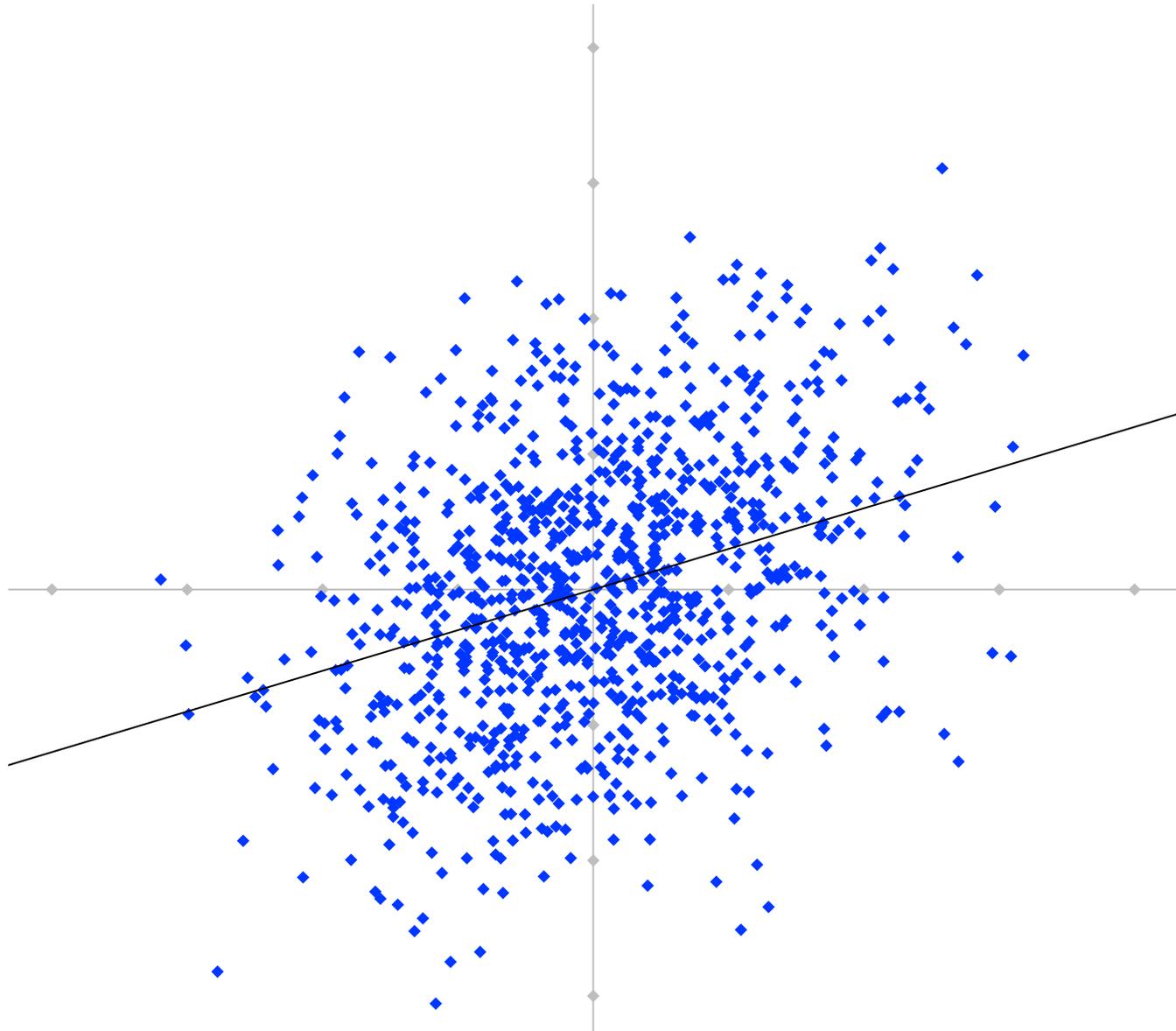
Korrelation = 0



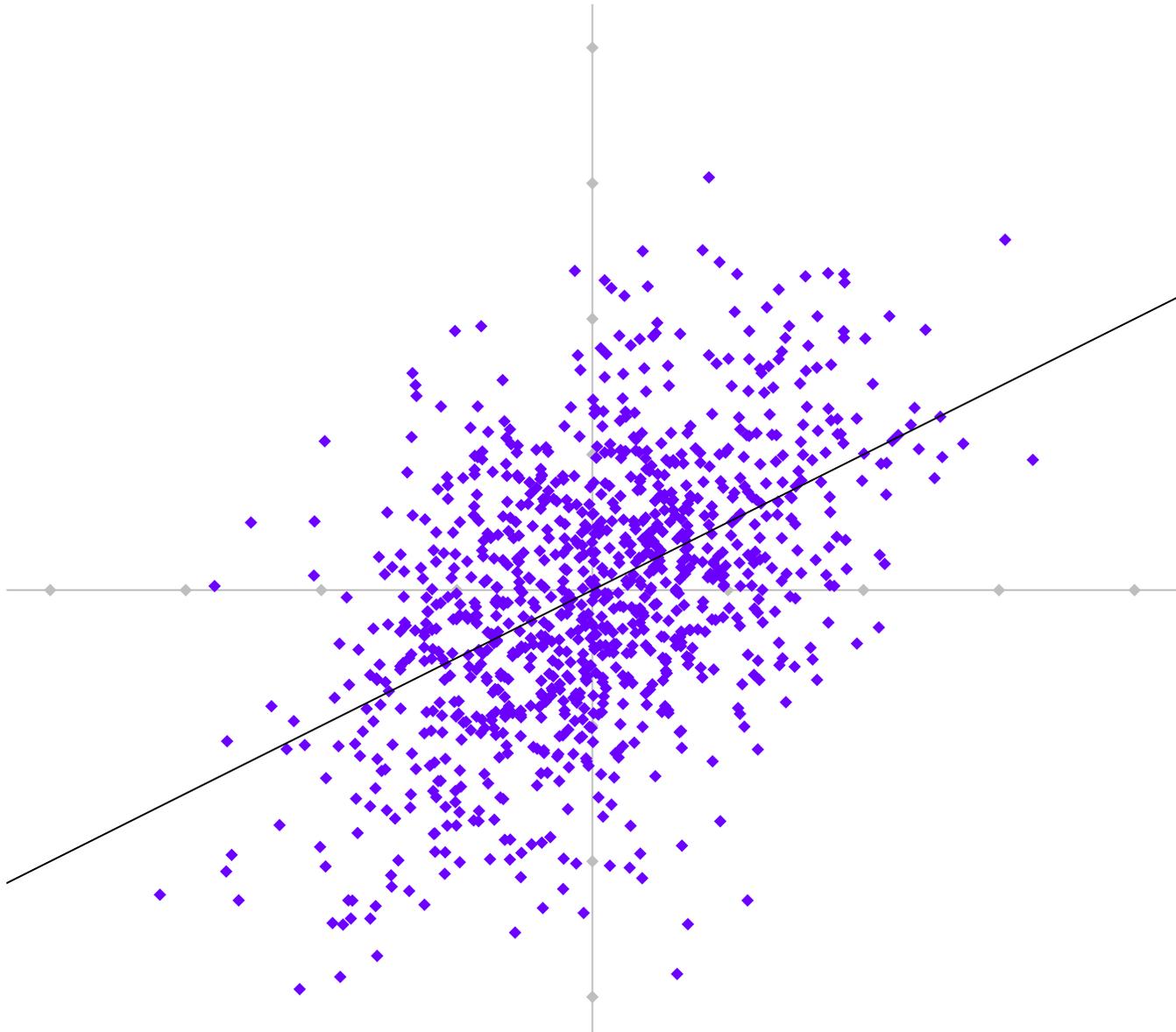
Korrelation = 0.1



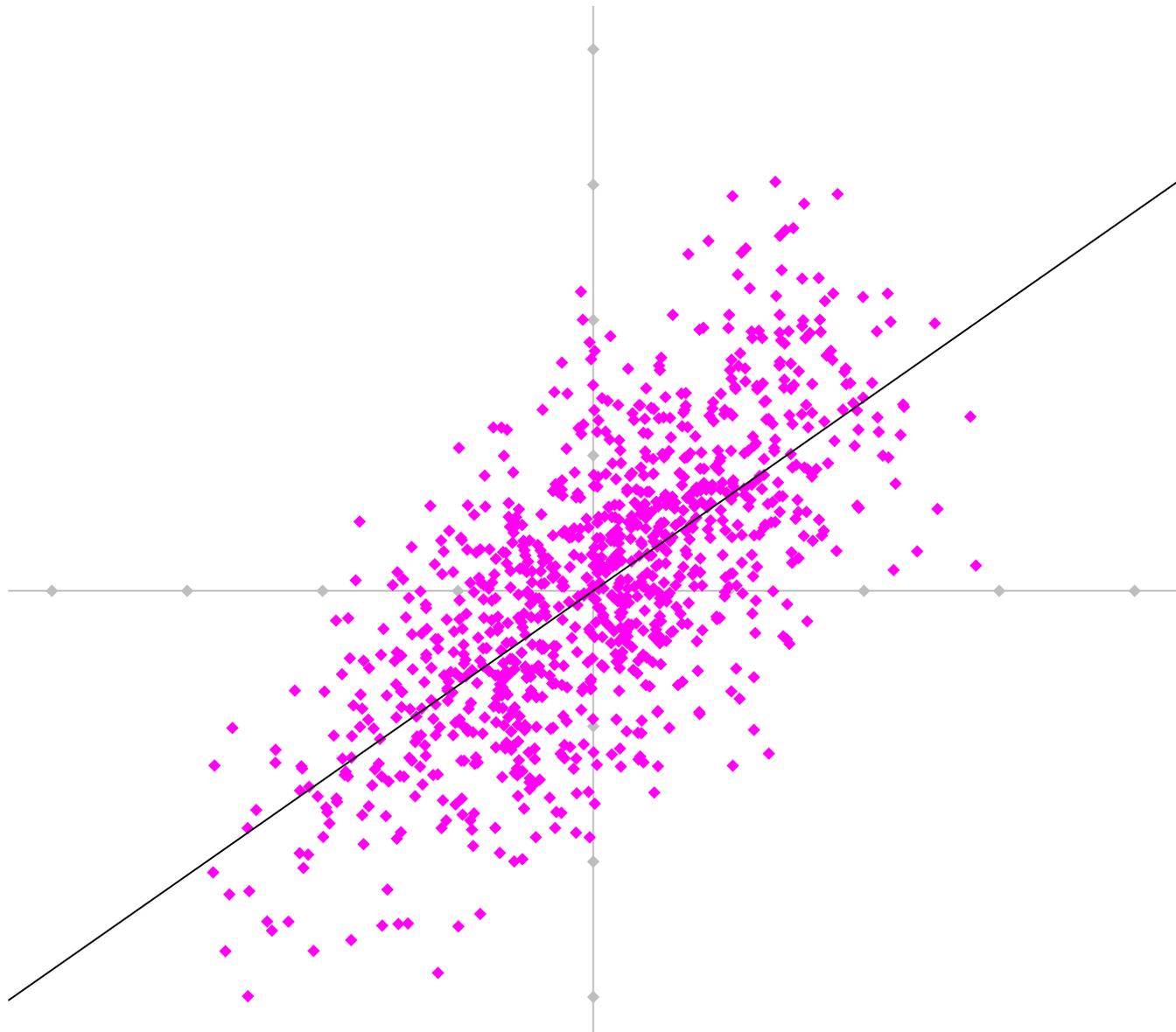
Korrelation = 0.3



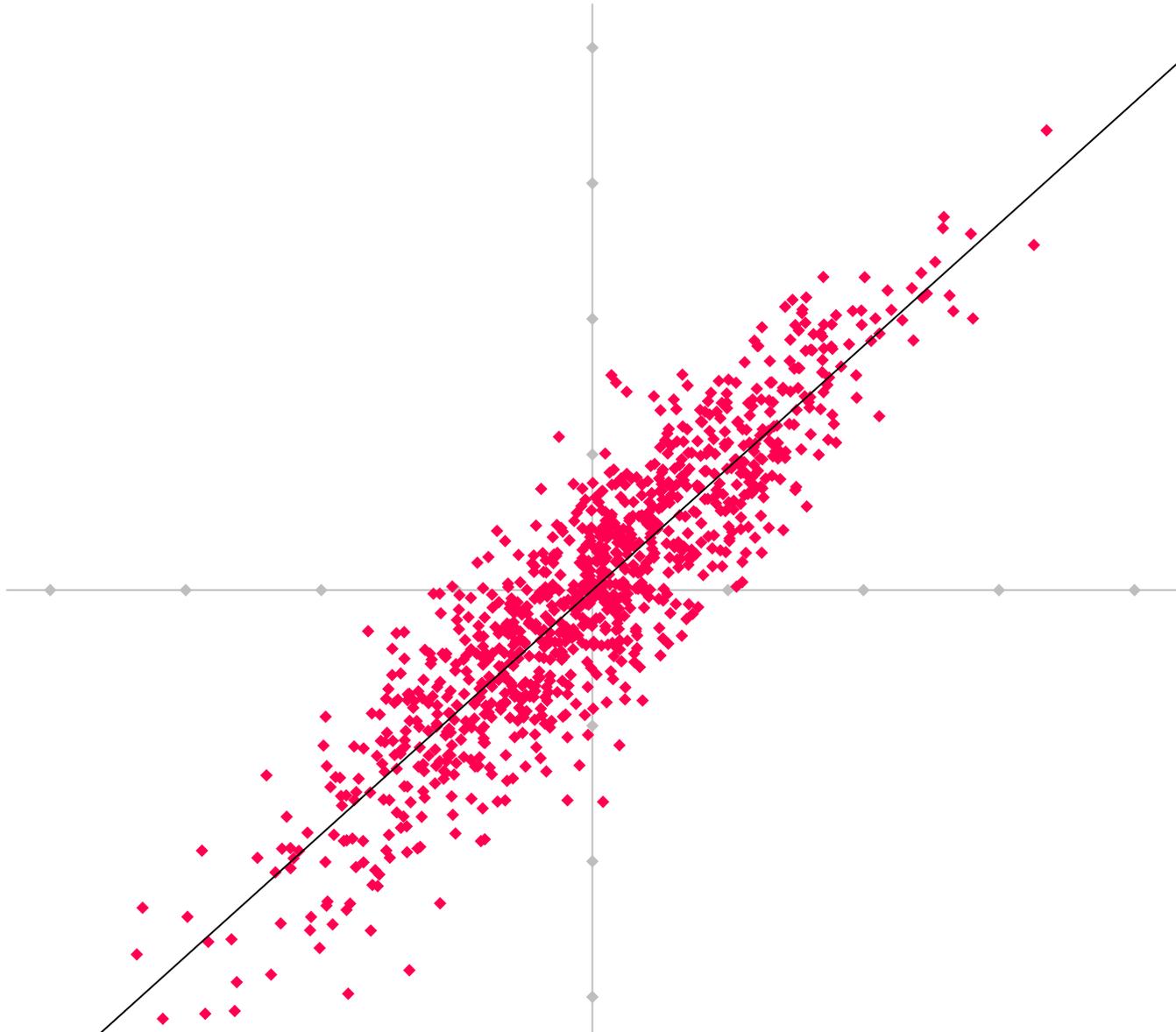
Korrelation = 0.5



Korrelation = 0.7



Korrelation = 0.9



Wir werden sehen:

κ^2 ist ein Maß dafür, um wieviel besser man Y durch eine affin lineare Funktion von X vorhersagen kann:

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \text{“Fehler”},$$

als durch eine Konstante:

$$Y = c + \text{“Fehler”}.$$

(Die “Güte der Vorhersage” bezieht sich auf die Kleinheit des **erwarteten quadratischen Fehler (mean square error)**.)

5. Beste konstante Vorhersage

Um die eben behauptete Eigenschaft von κ^2 einzusehen,
fragen wir erst einmal:

Durch welche **Konstante** wird die Zufallsvariable Y
(im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)
am besten vorhergesagt?

Durch ihren **Erwartungswert $E[Y]$** !

Denn:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y - c)^2 &= \mathbf{E}[(Y - \mu_Y + \mu_Y - c)^2] \\ &= \mathbf{E}[(Y - \mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y - \mu_Y)(\mu_Y - c)] + (\mu_Y - c)^2 \\ &= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y - c)^2.\end{aligned}$$

Das wird minimiert von

$$c = \mu_Y$$

und hat den Minimalwert

$$\sigma_Y^2.$$

6. Beste affin lineare Vorhersage

Durch welche **affin lineare Funktion von X** ,

$$\beta_1 X + \beta_0,$$

wird die Zufallsvariable Y

(wieder im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Genauer:

Für welche Zahlen β_1, β_0 wird
 $\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$ minimal?

Wie wir gleich sehen werden, ist die Lösung:

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa_{XY}$$

und β_0 so, dass $\mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$.

M. a. W.: β_0 so, dass der Punkt (μ_X, μ_Y)
auf der Geraden $y = \beta_1 x + \beta_0$ liegt.

Wir nennen diese Gerade
die **Regressionsgerade** für Y auf der Basis von X .

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1 :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \\ &= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0] + (\mathbf{E}[Y - \beta_1 X - \beta_0])^2 \\ &= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] + (\mu_Y - \beta_1 \mu_X - \beta_0)^2 \end{aligned}$$

Der **zweite Summand** ist Null für $\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_X$.

Damit haben wir schon mal **die eine Bedingung** gefunden.

Für welches β_1 wird **der erste Summand** minimal?

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 + (\sigma_Y \kappa - \beta_1 \sigma_X)^2$$

Der rechte Summand wird Null für

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa.$$

Und der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X]$ ist $\sigma_Y^2(1 - \kappa^2)$.

Damit ist auch der Minimalwert von $\text{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0]$
gleich $\sigma_Y^2(1 - \kappa^2)$.

Der Minimalwert von $\text{Var}[Y - c]$ war σ_Y^2 .

Also ist der Anteil von $\text{Var } Y$,
der von den Vielfachen von X
zusätzlich zu den Vielfachen von 1 “erklärt” wird, gleich

$$\kappa^2 \sigma_Y^2.$$

Wir halten fest: Die Minimierungsaufgabe

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \stackrel{!}{=} \min$$

für die *beste affin lineare Vorhersage von Y*

auf der Basis von X

(im Sinn des quadratischen Mittels)

hat die Lösung

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa, \quad \mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$$

und den Minimalwert $(1 - \kappa_{XY}^2) \sigma_Y^2$.

7. Beispiel:

Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable

Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt,
 $\rho \in [-1, 1]$.

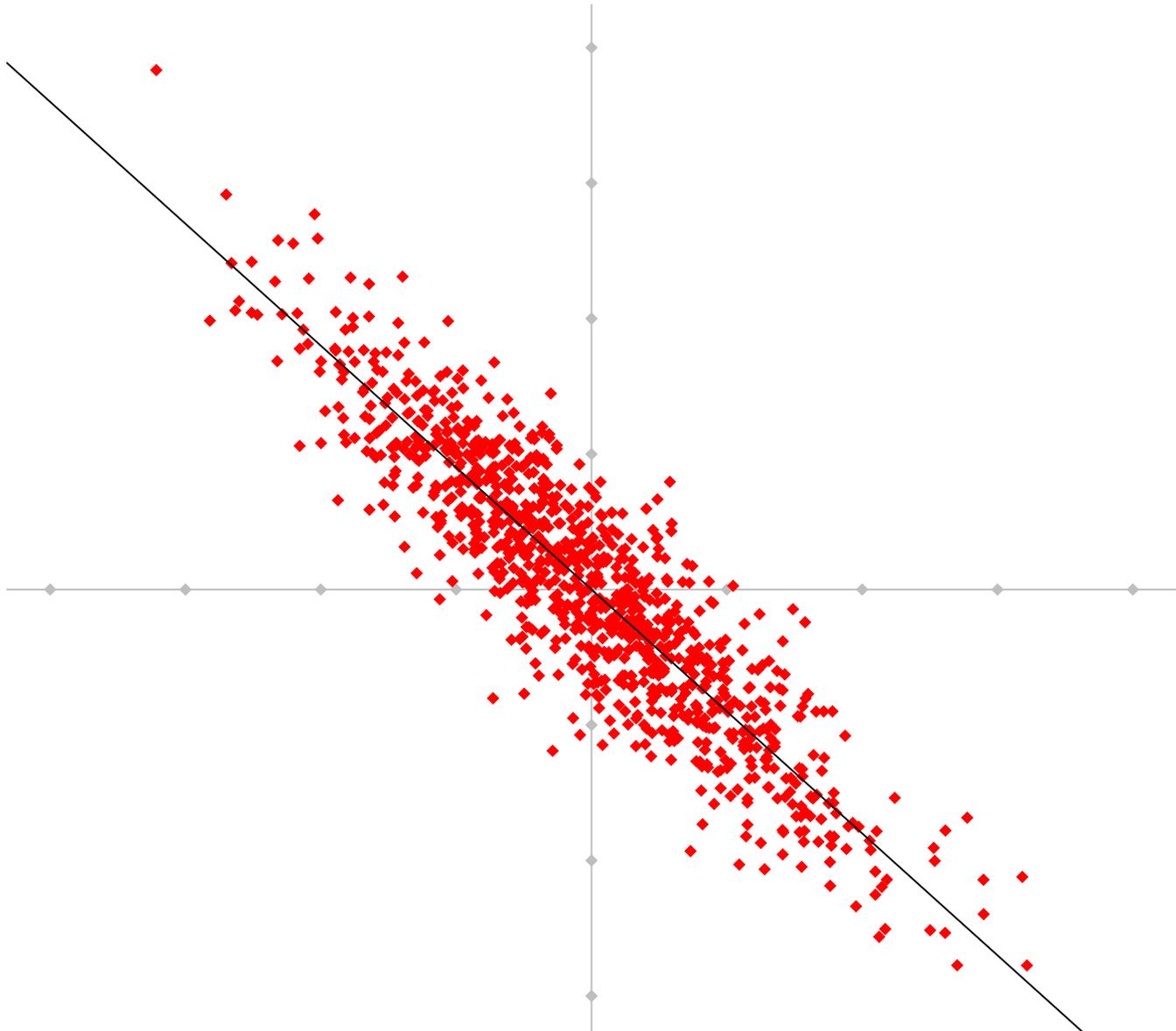
$$X := Z_1, \quad Y := \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2.$$

Dann gilt: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$,

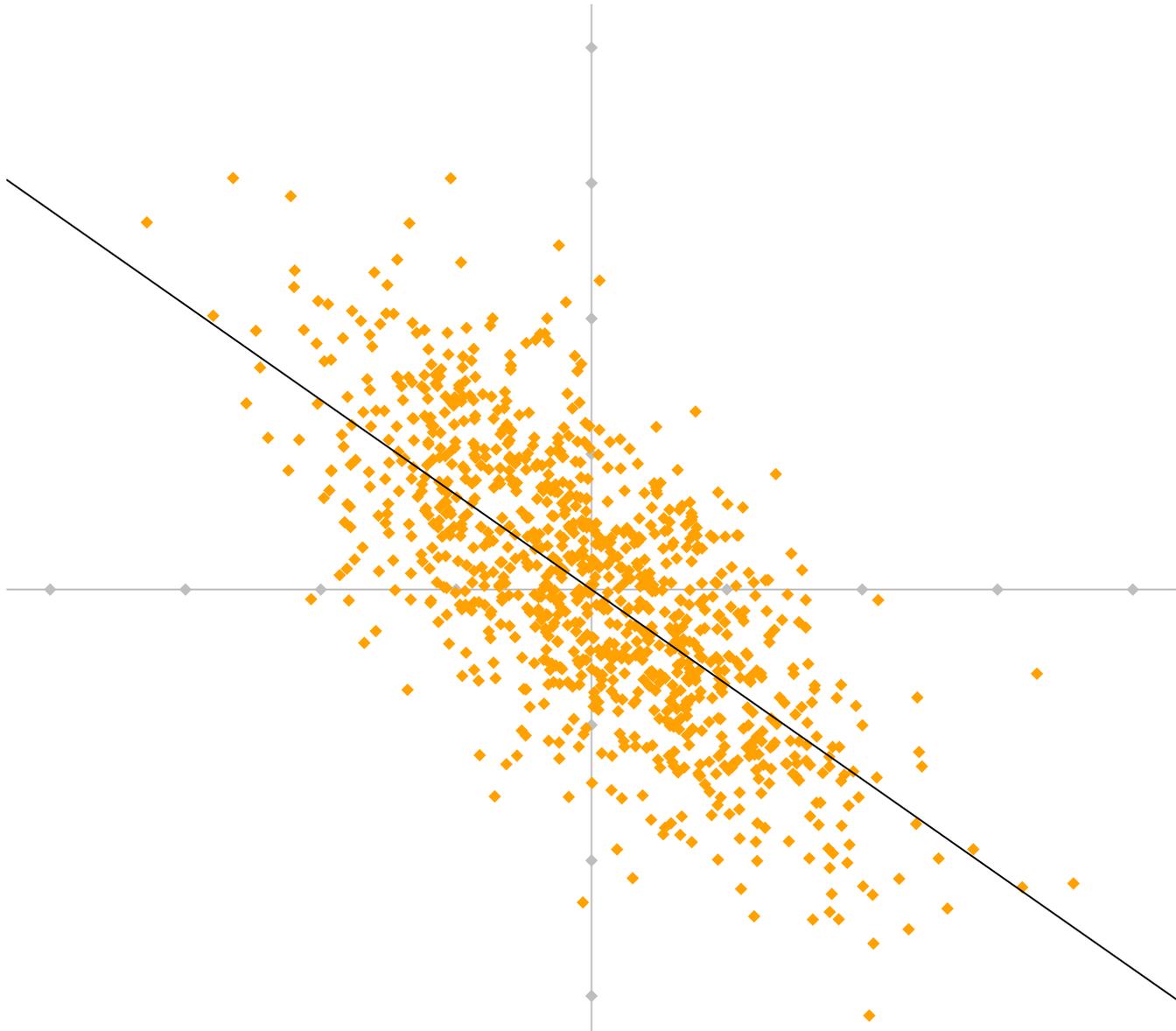
$$\kappa_{XY} = \rho.$$

Die folgenden Bilder
($\rho = -0.9, -0.7, \dots, 0.7, 0.9$)
zeigen jeweils die Realisierungen von
1000 unabhängige Kopien (X_i, Y_i) von (X, Y) ,
zusammen mit der
Regressionsgeraden für Y auf der Basis von X

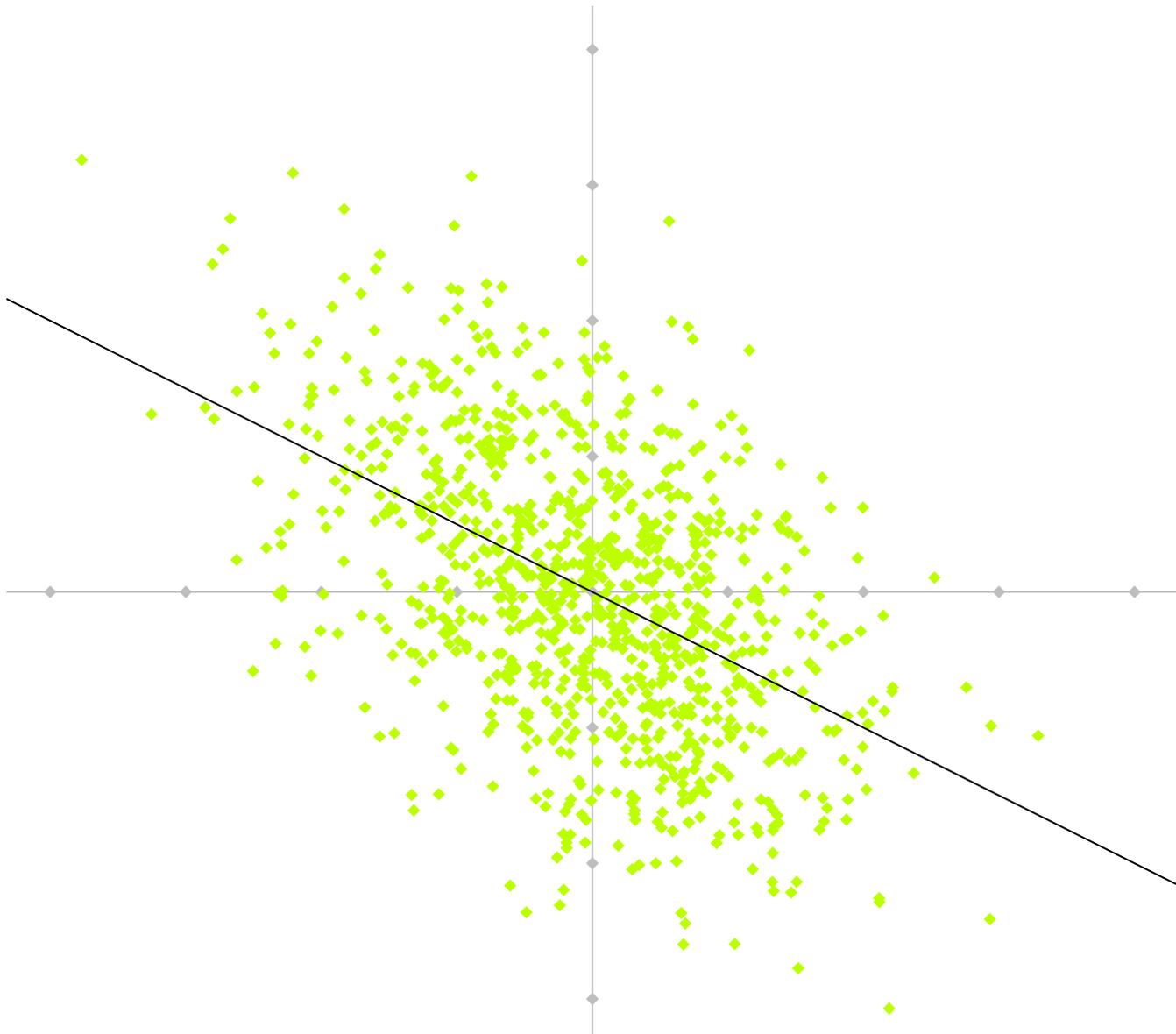
Korrelation = - 0.9



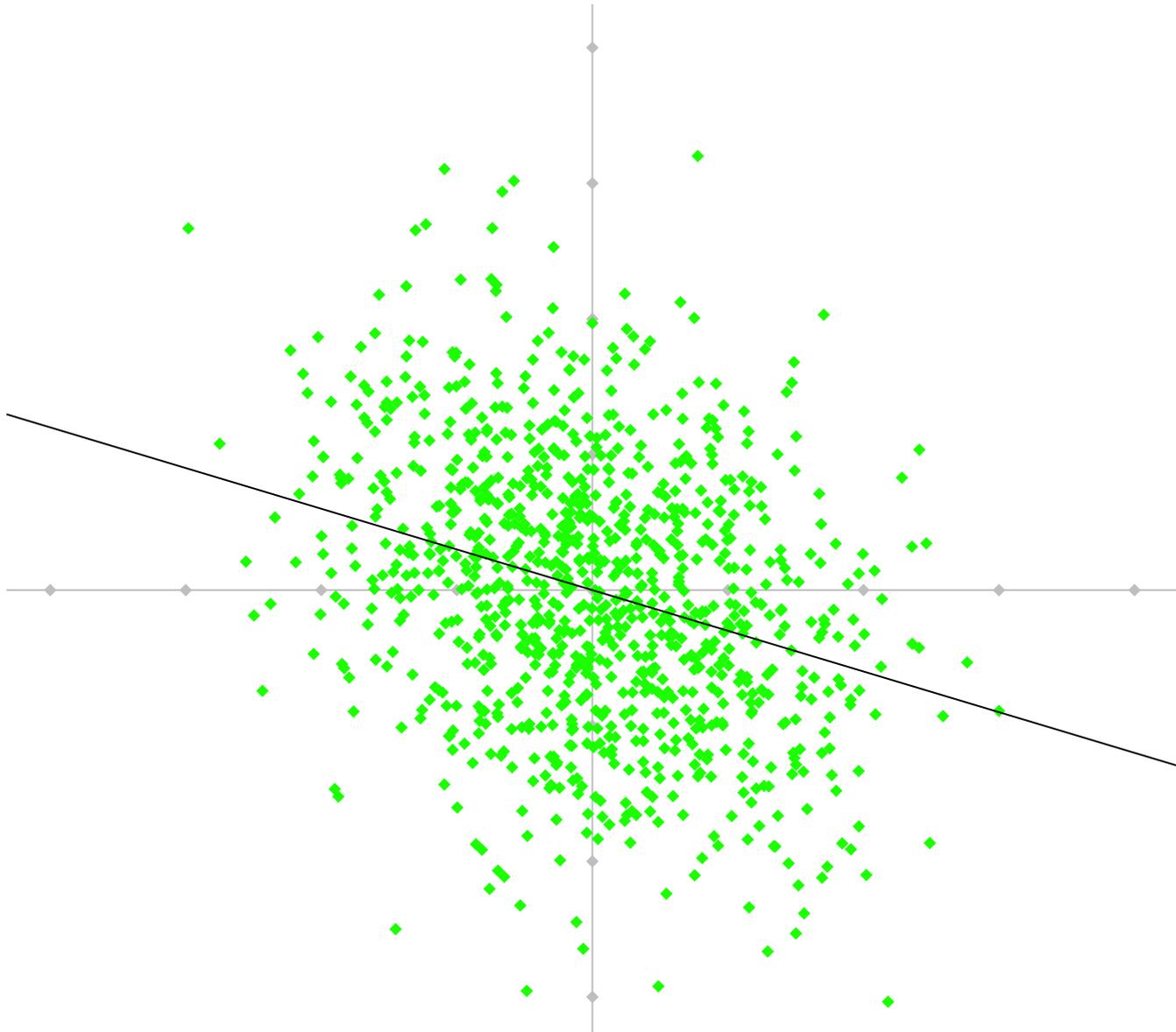
Korrelation = - 0.7



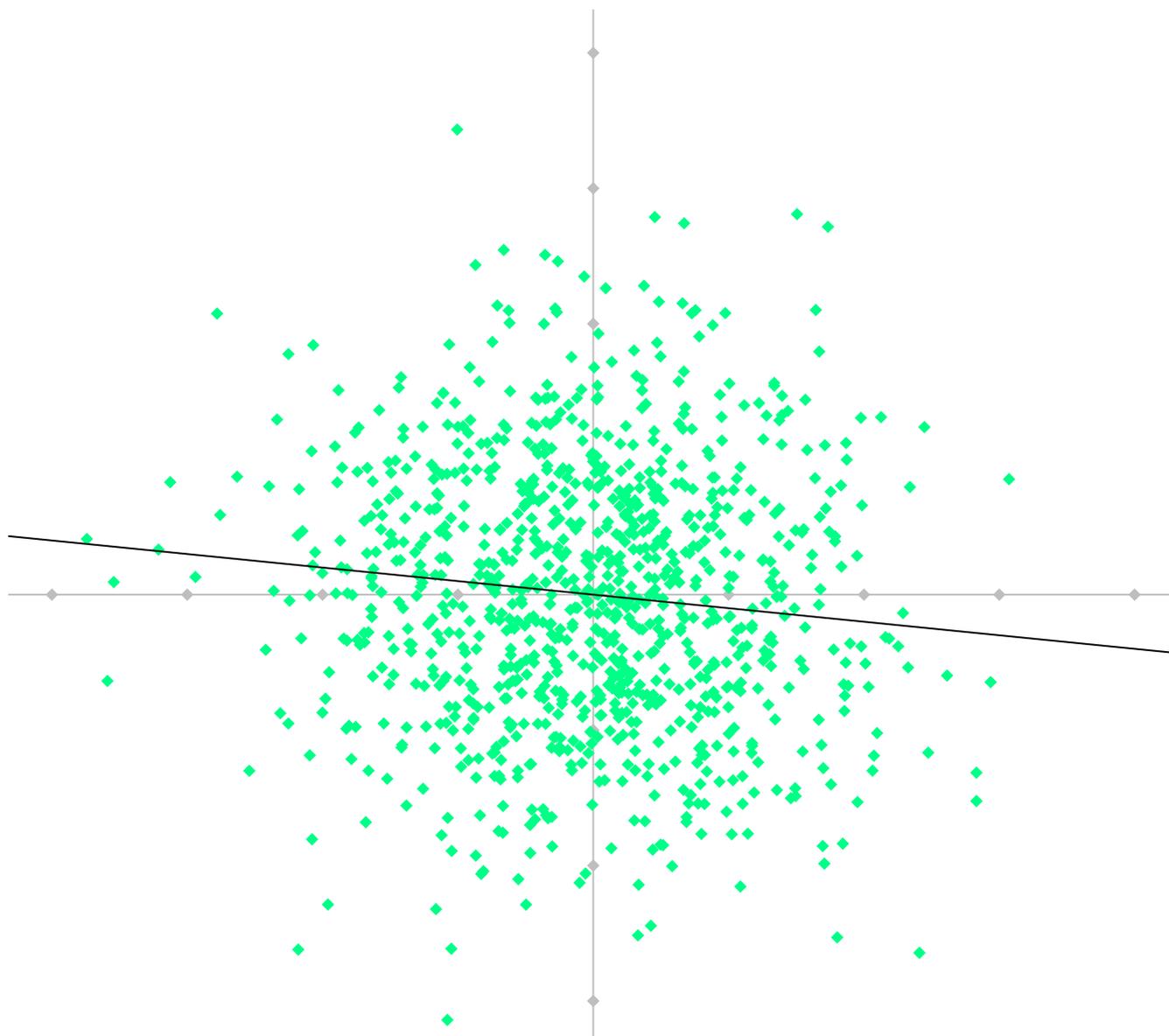
Korrelation = - 0.5



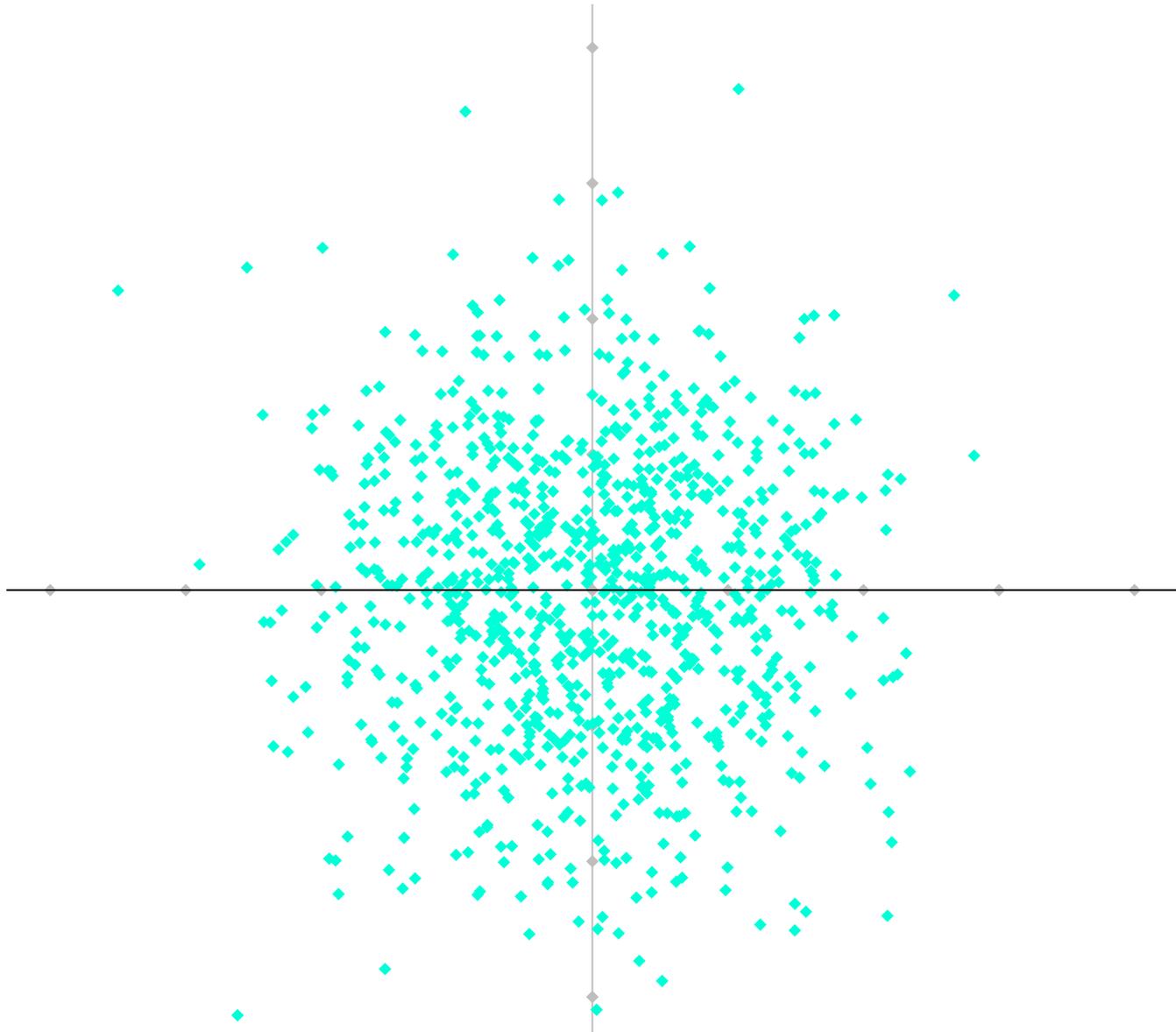
Korrelation = - 0.3



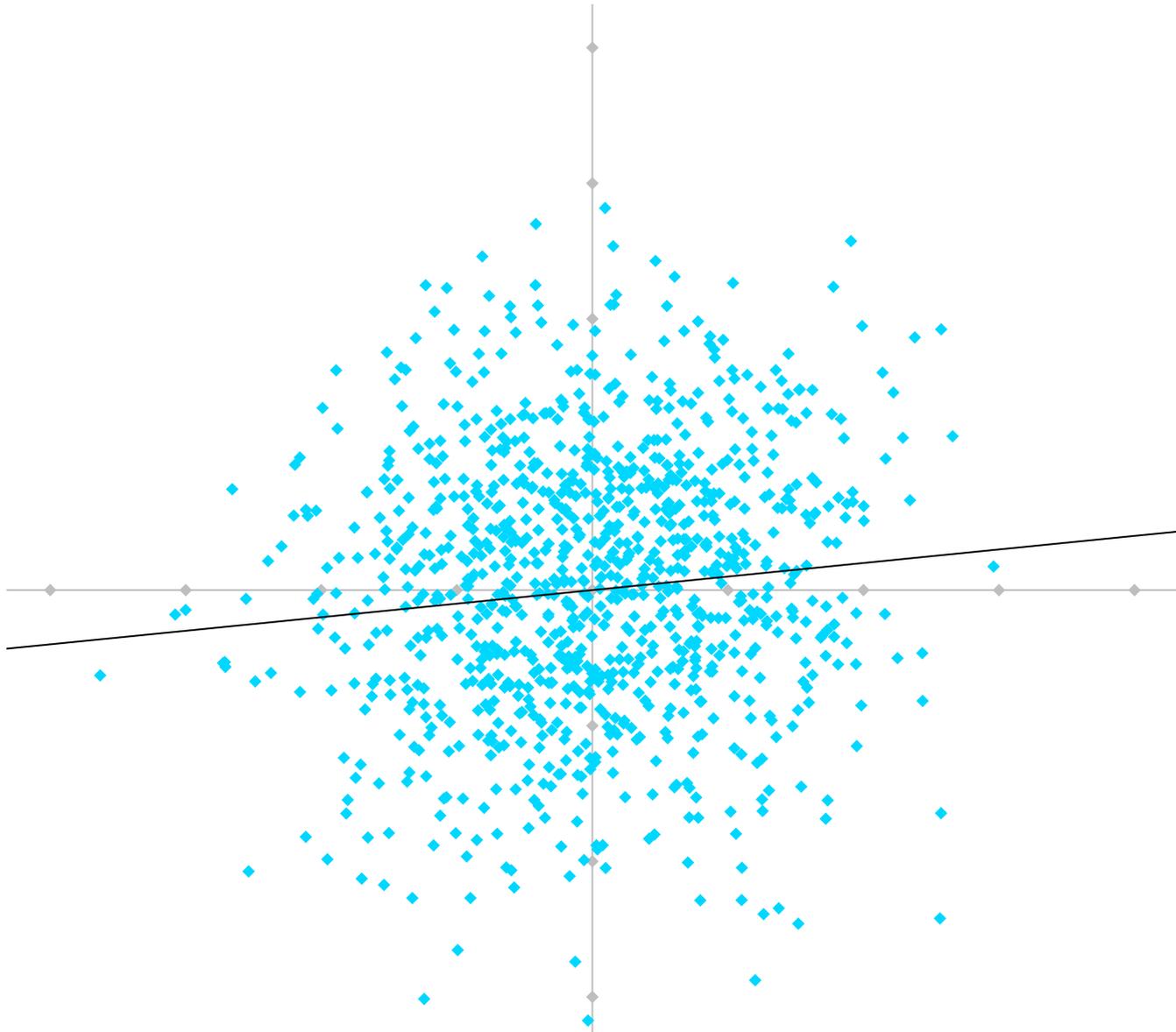
Korrelation = - 0.1



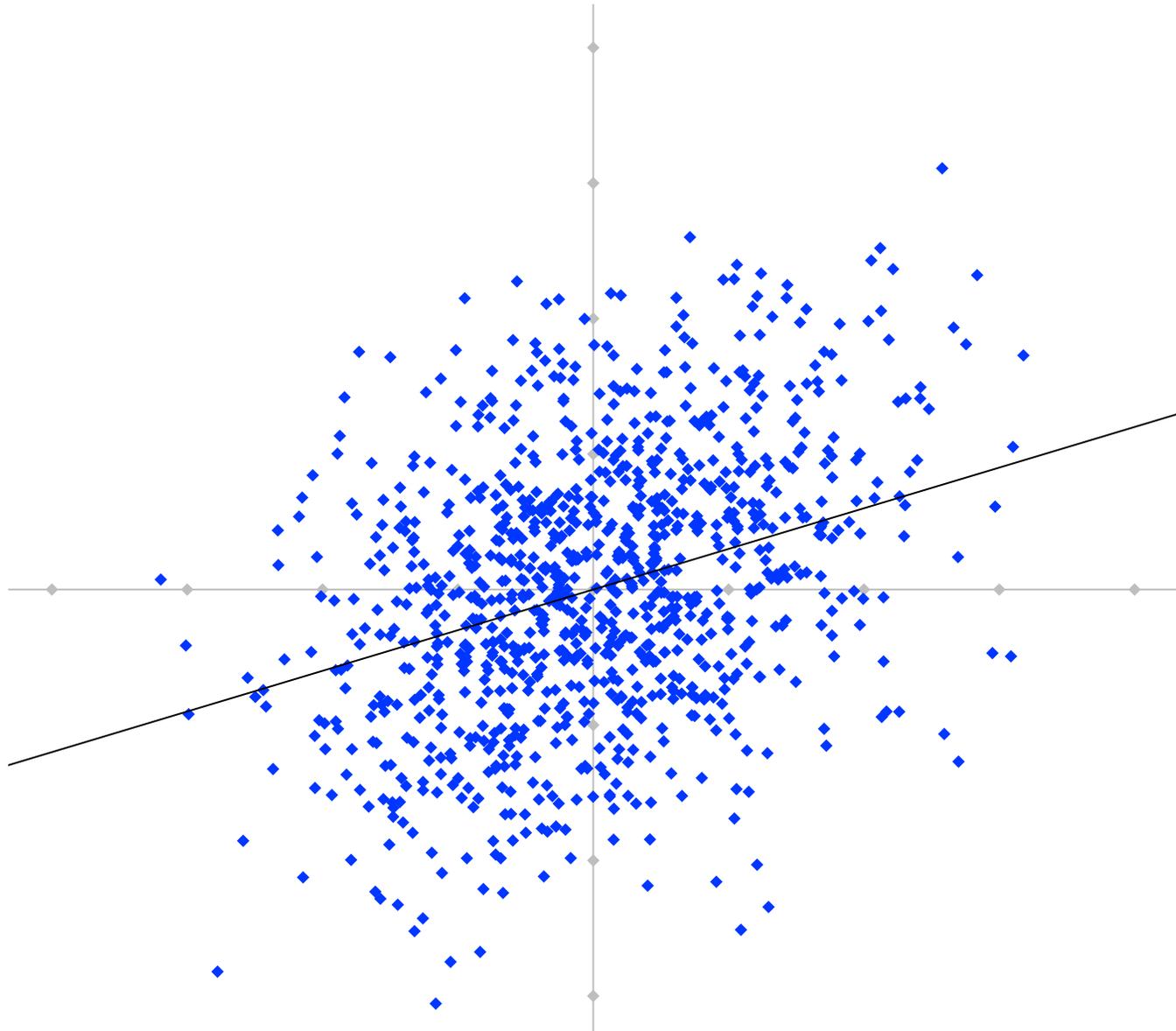
Korrelation = 0



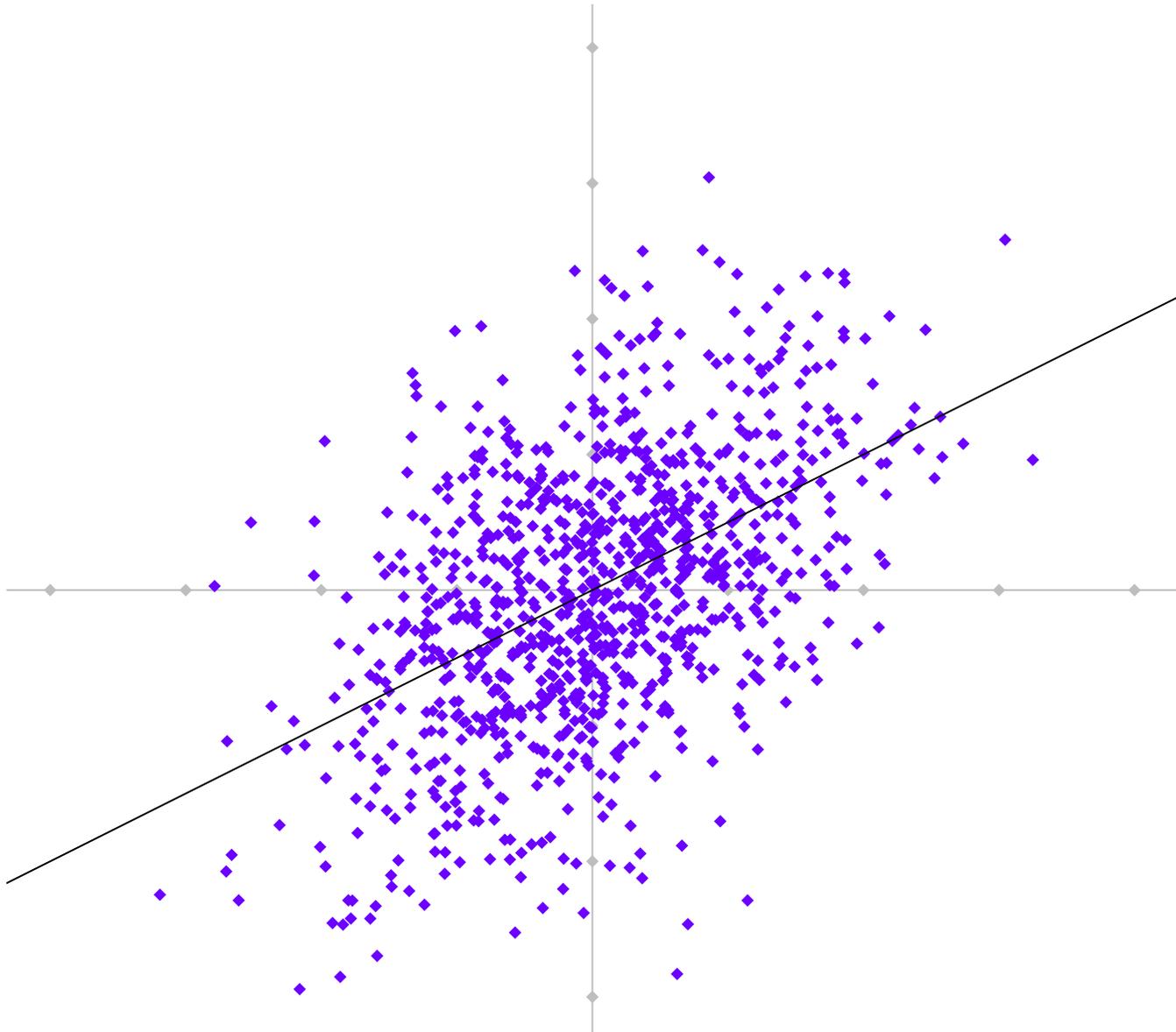
Korrelation = 0.1



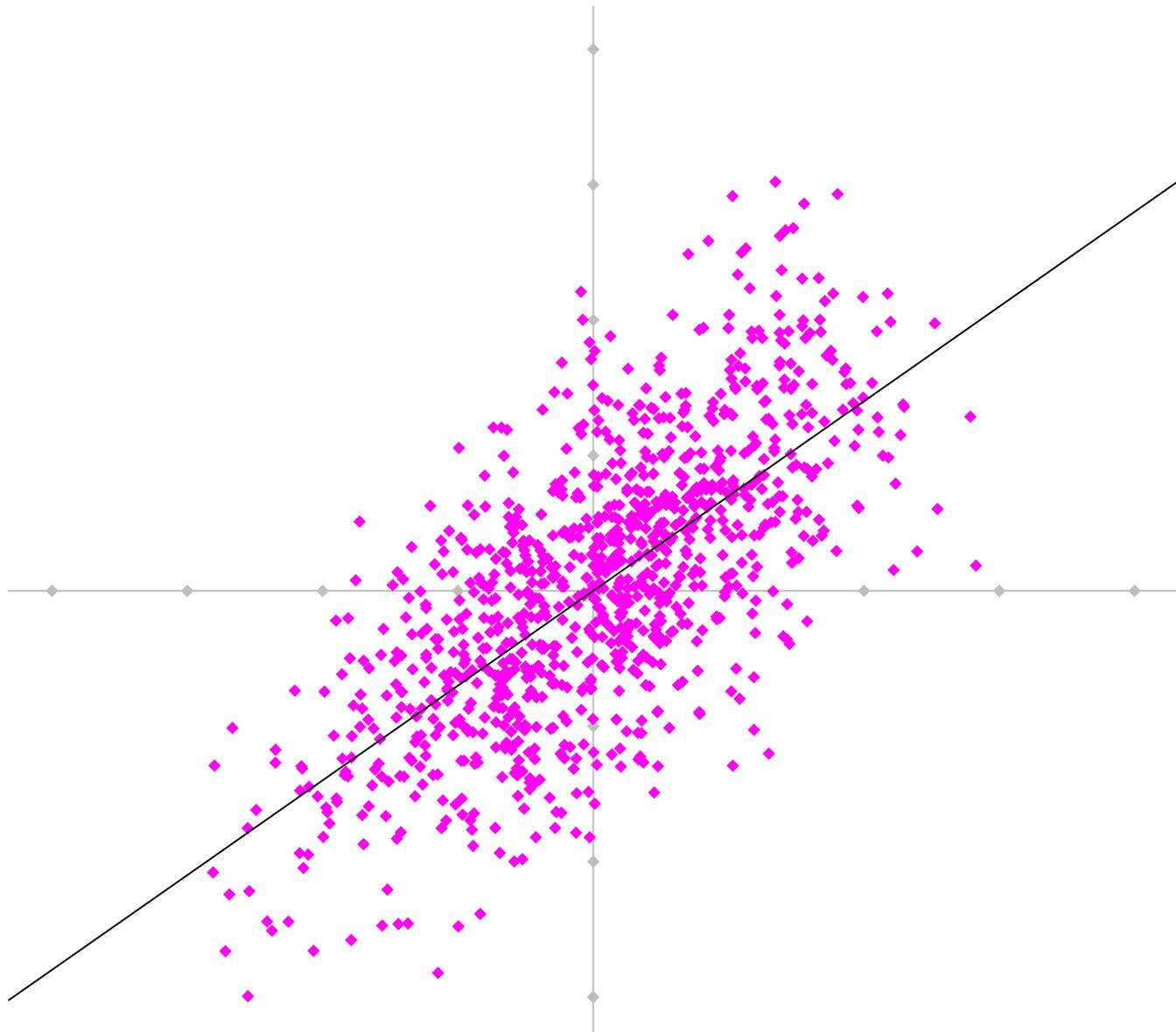
Korrelation = 0.3



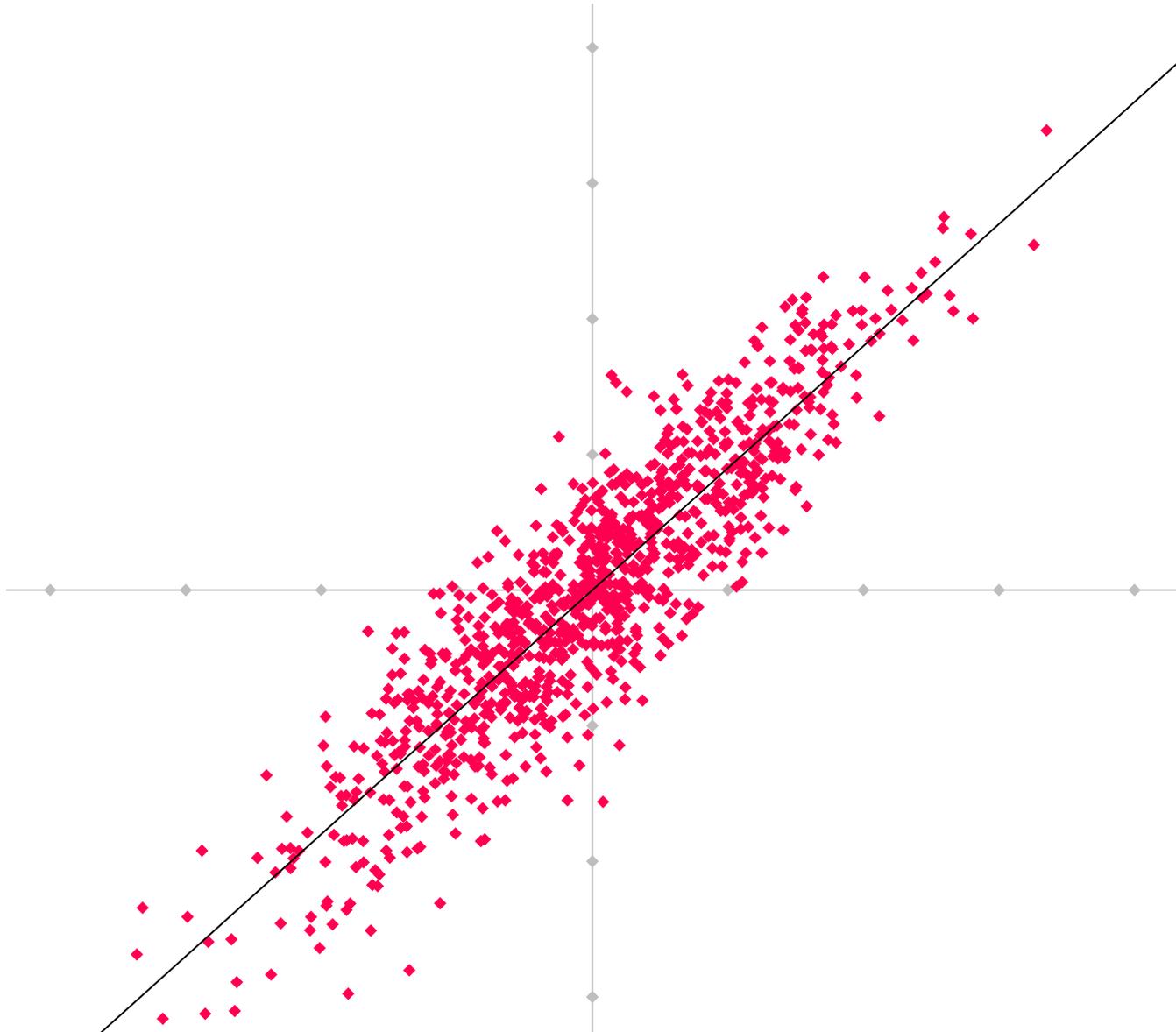
Korrelation = 0.5



Korrelation = 0.7



Korrelation = 0.9



Jetzt nochmal dasselbe,

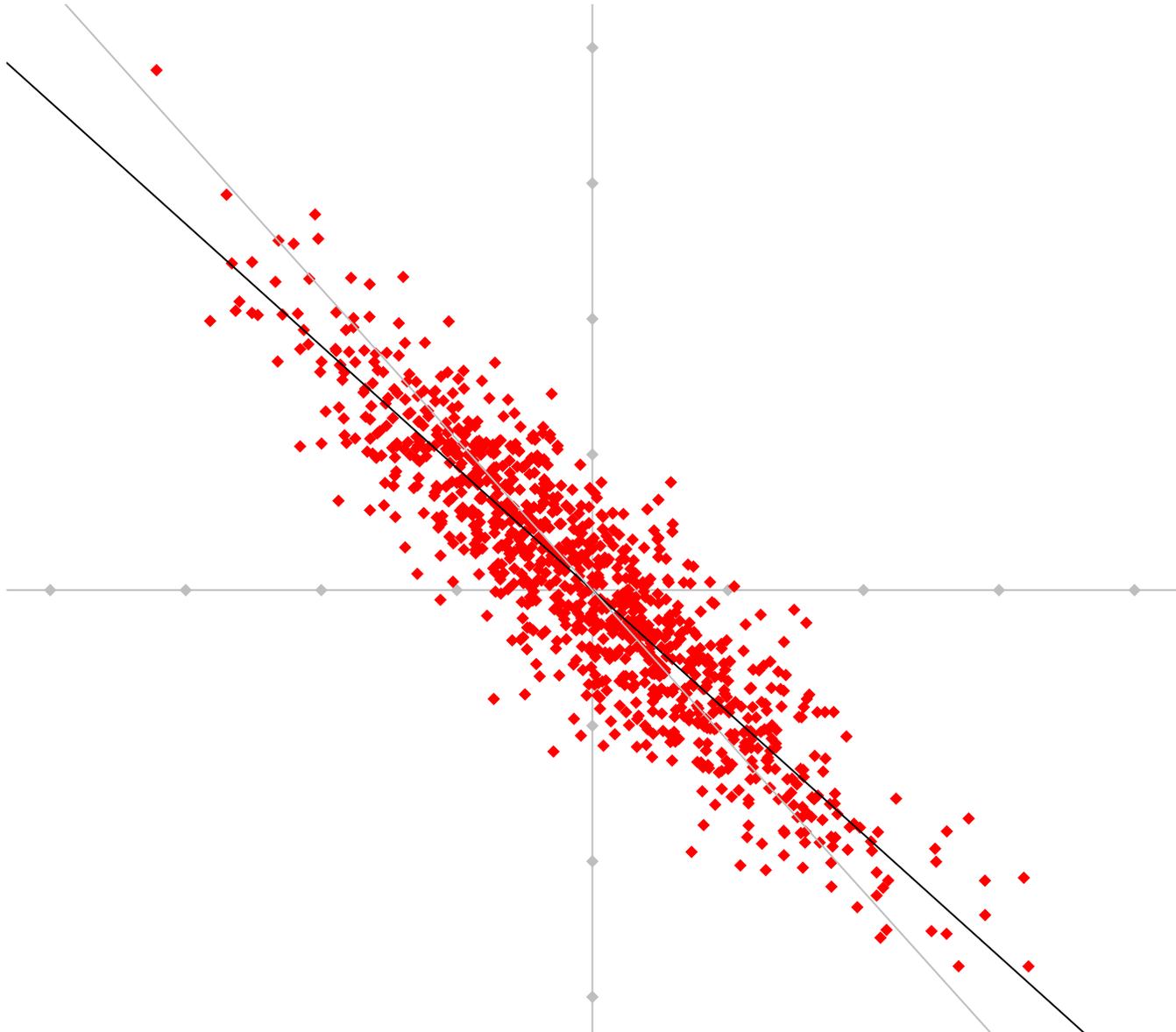
mit der

Regressionsgeraden für Y auf der Basis von X (in schwarz)

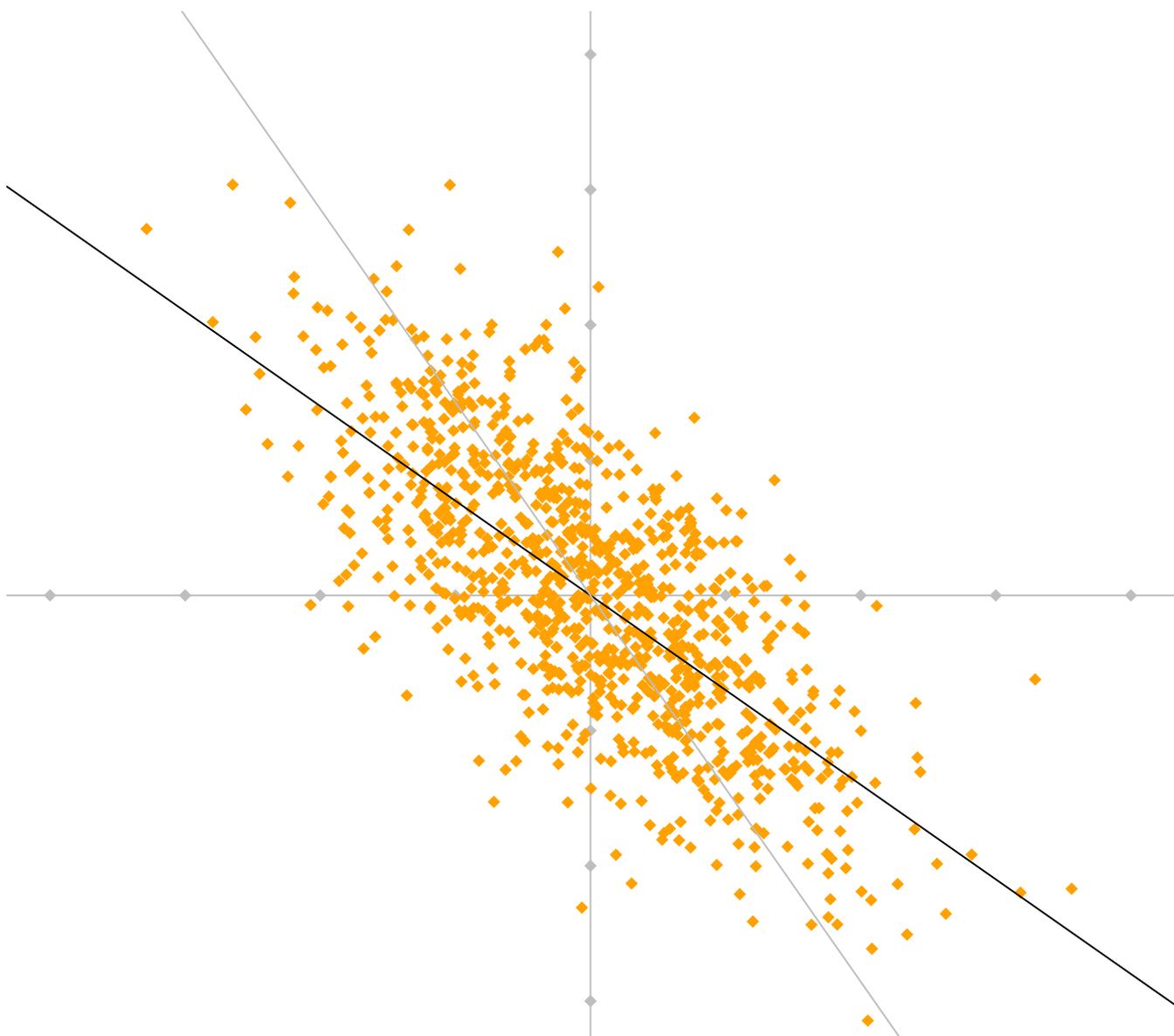
und der

Regressionsgeraden für X auf der Basis von Y (in grau).

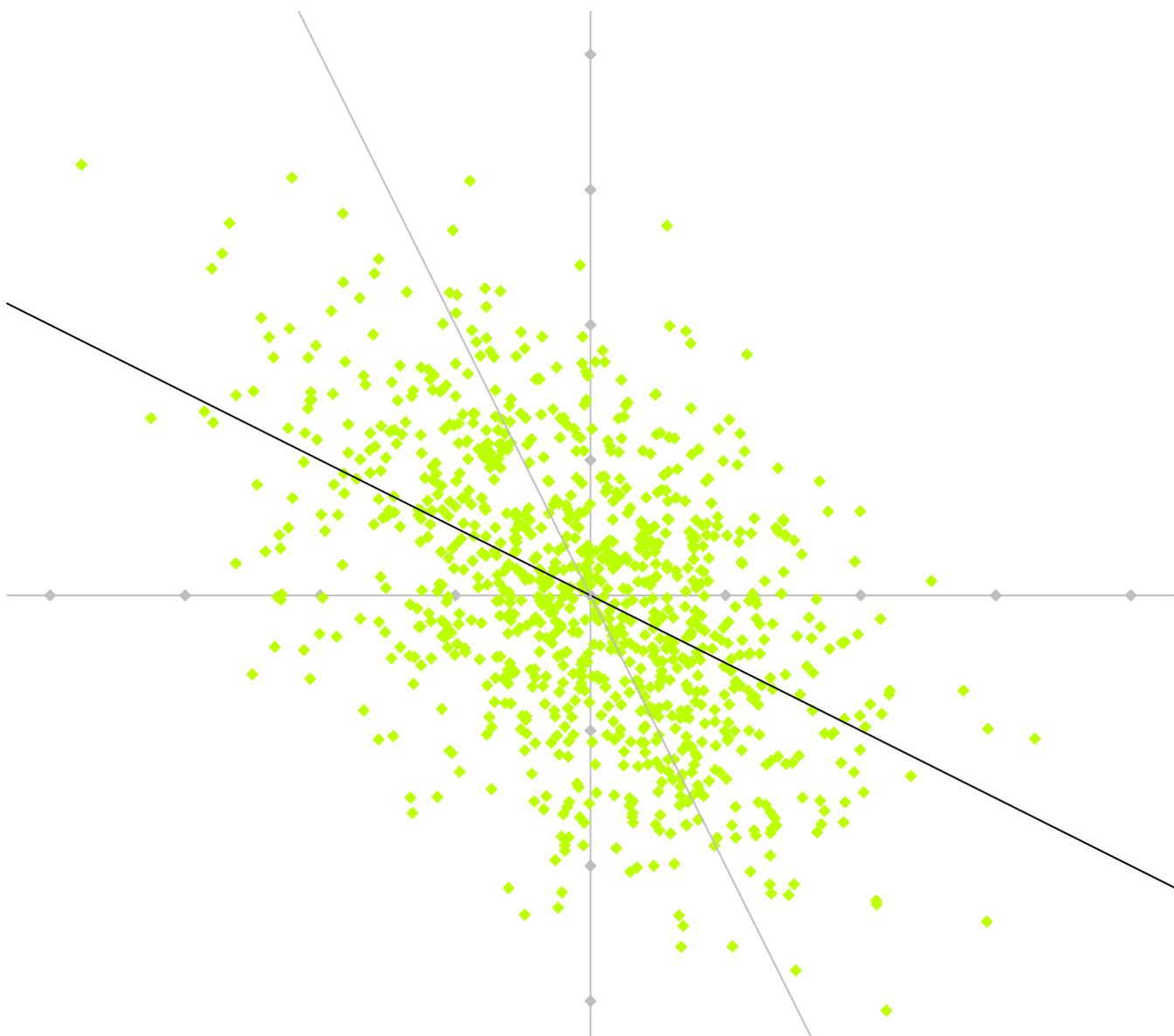
Korrelation = - 0.9



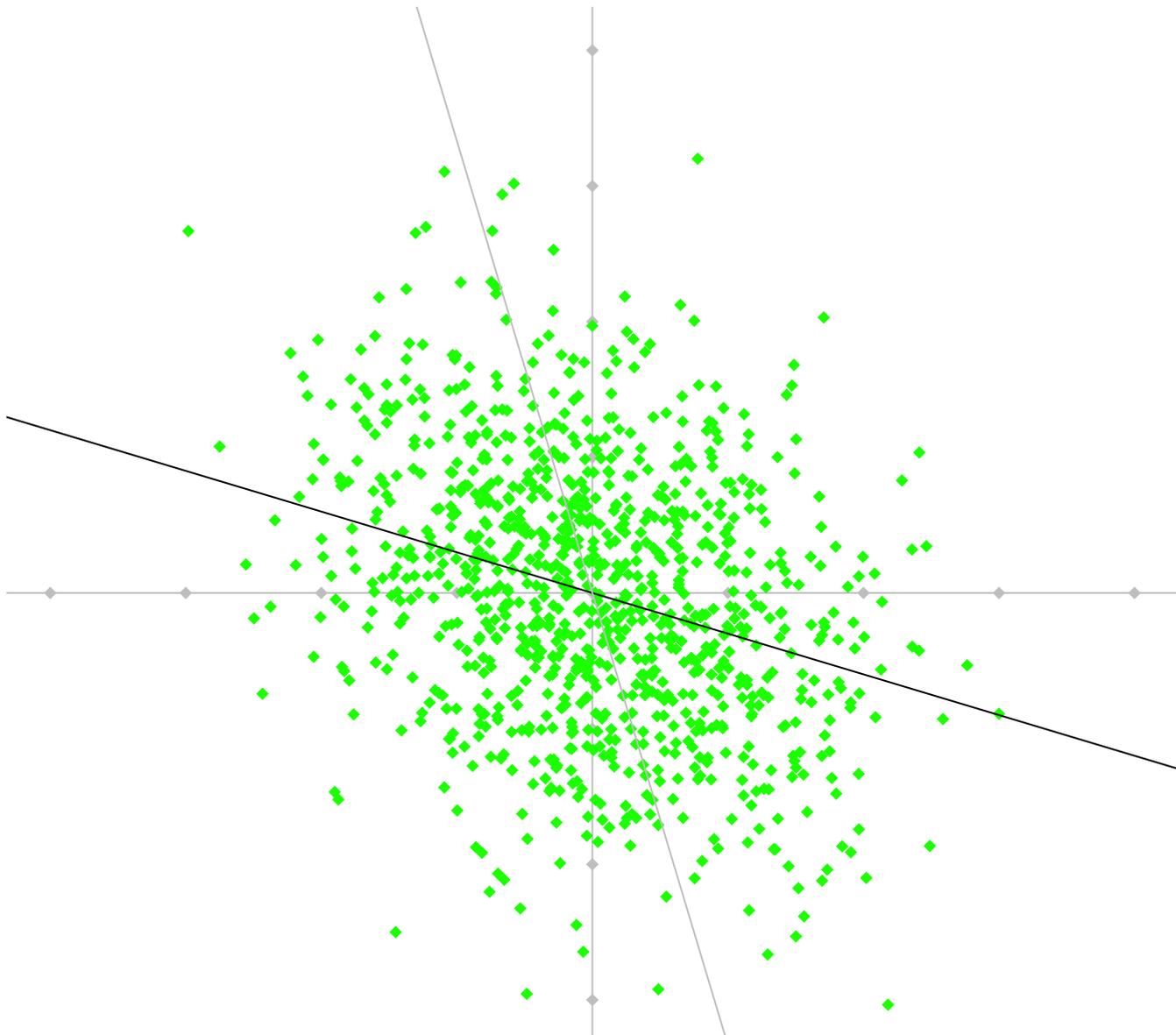
Korrelation = - 0.7



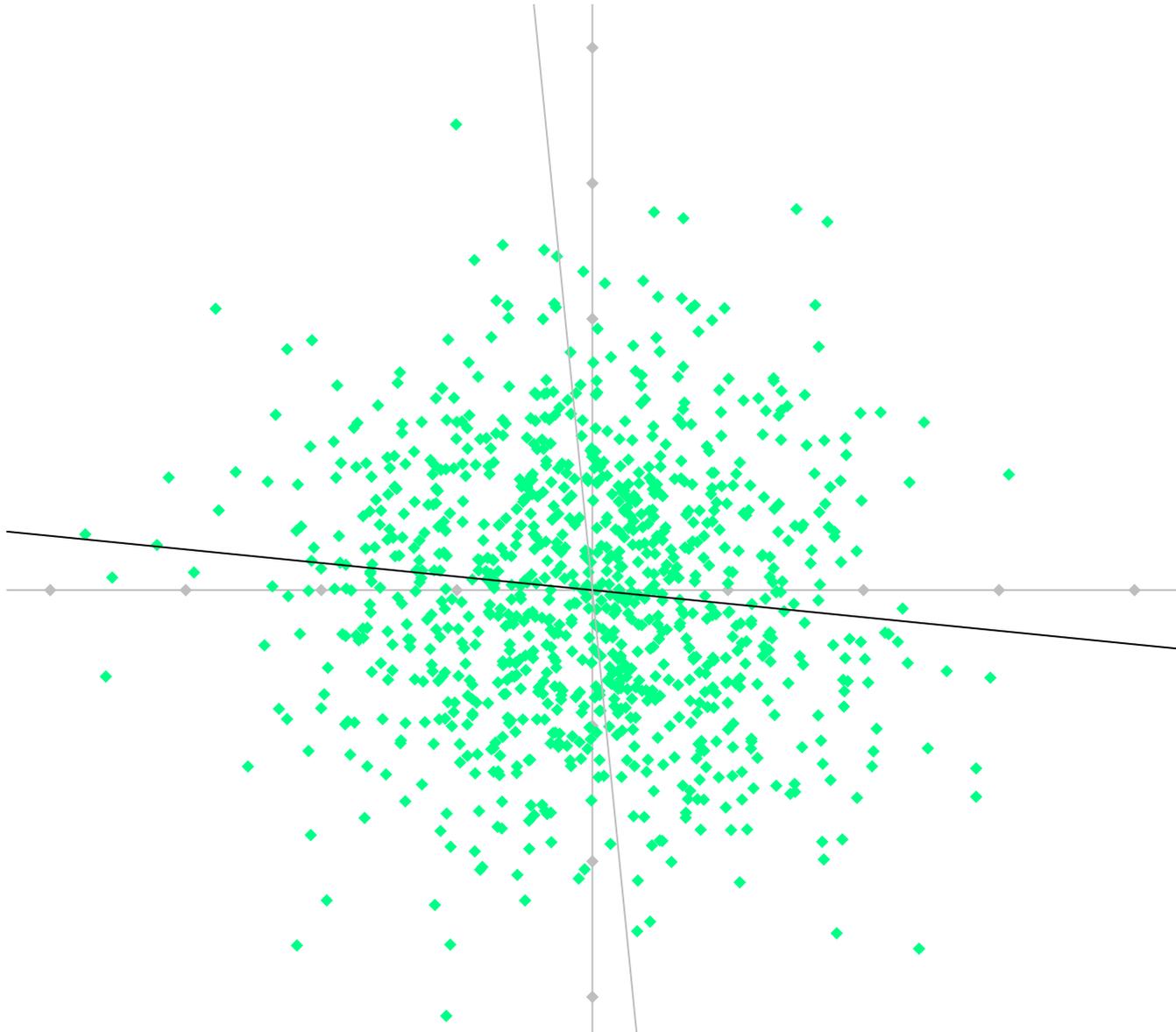
Korrelation = - 0.5



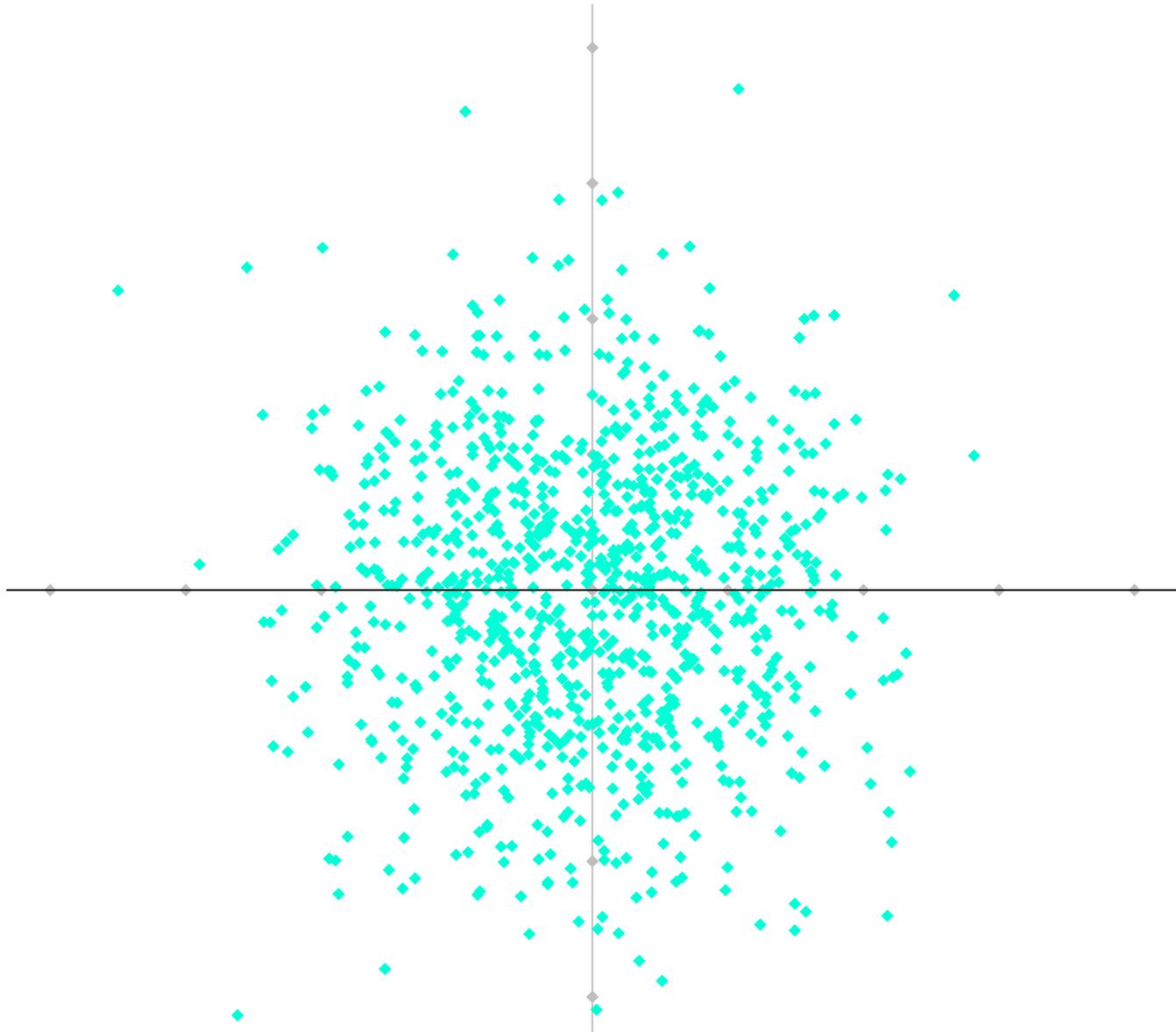
Korrelation = - 0.3



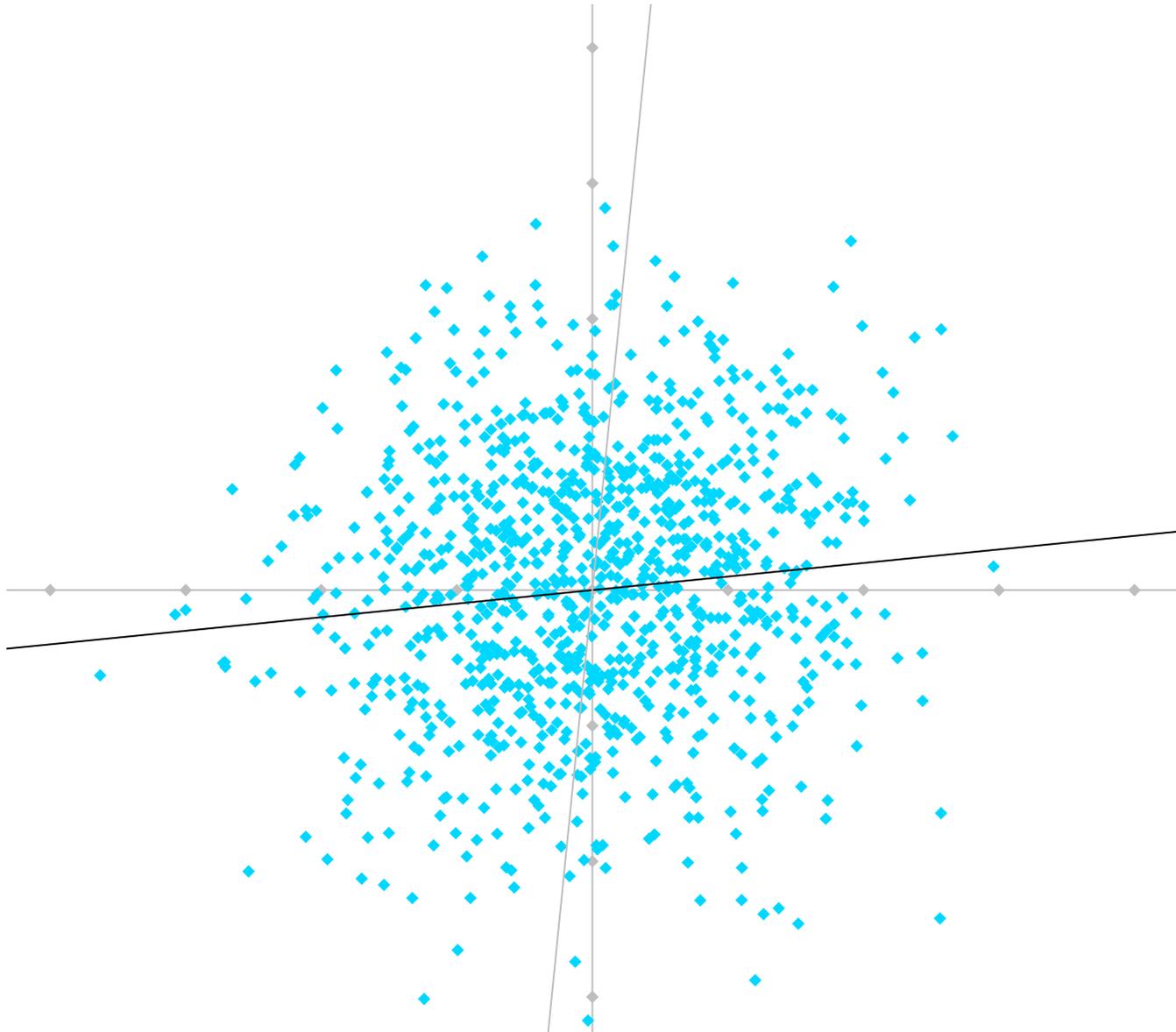
Korrelation = - 0.1



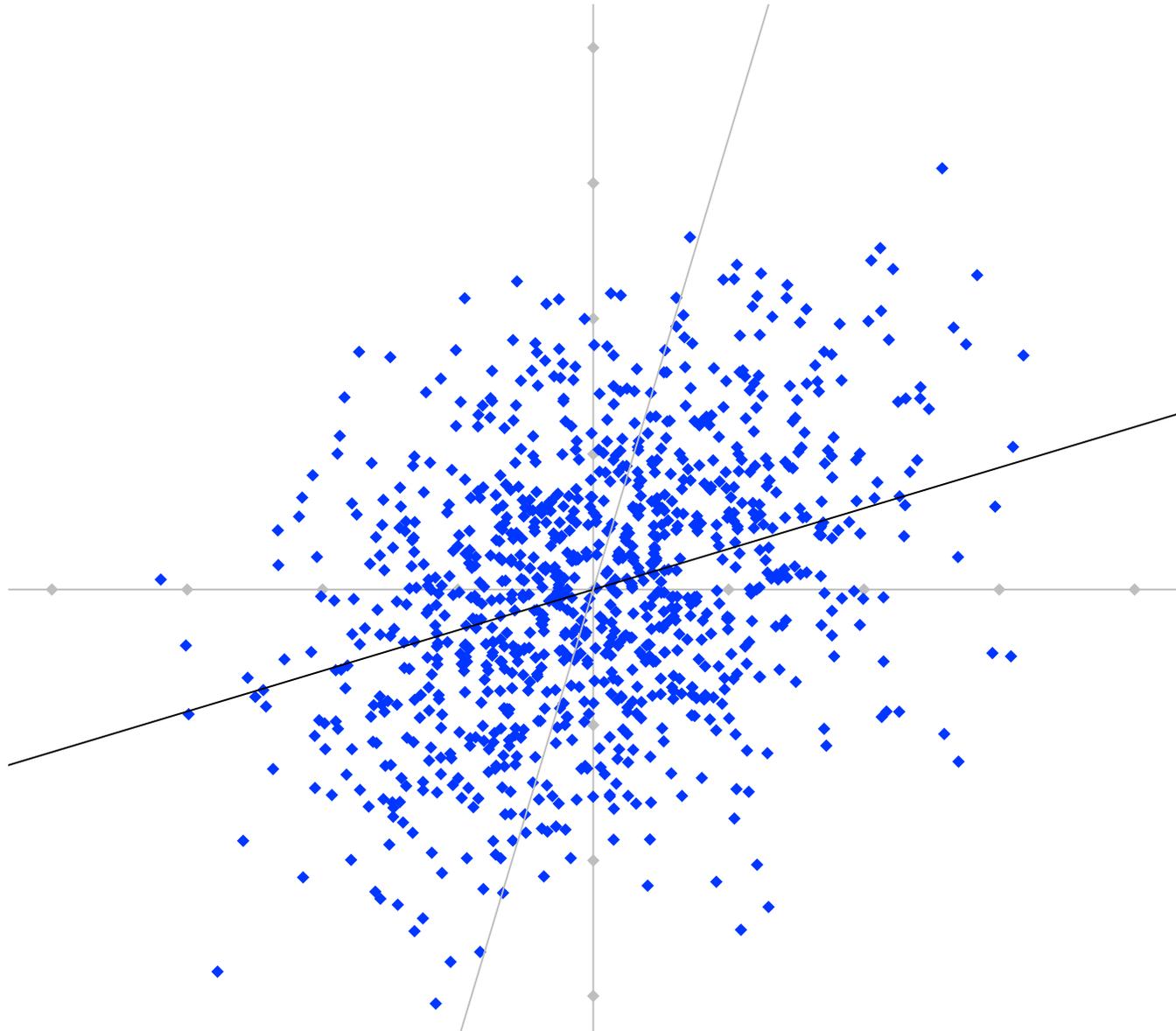
Korrelation = 0



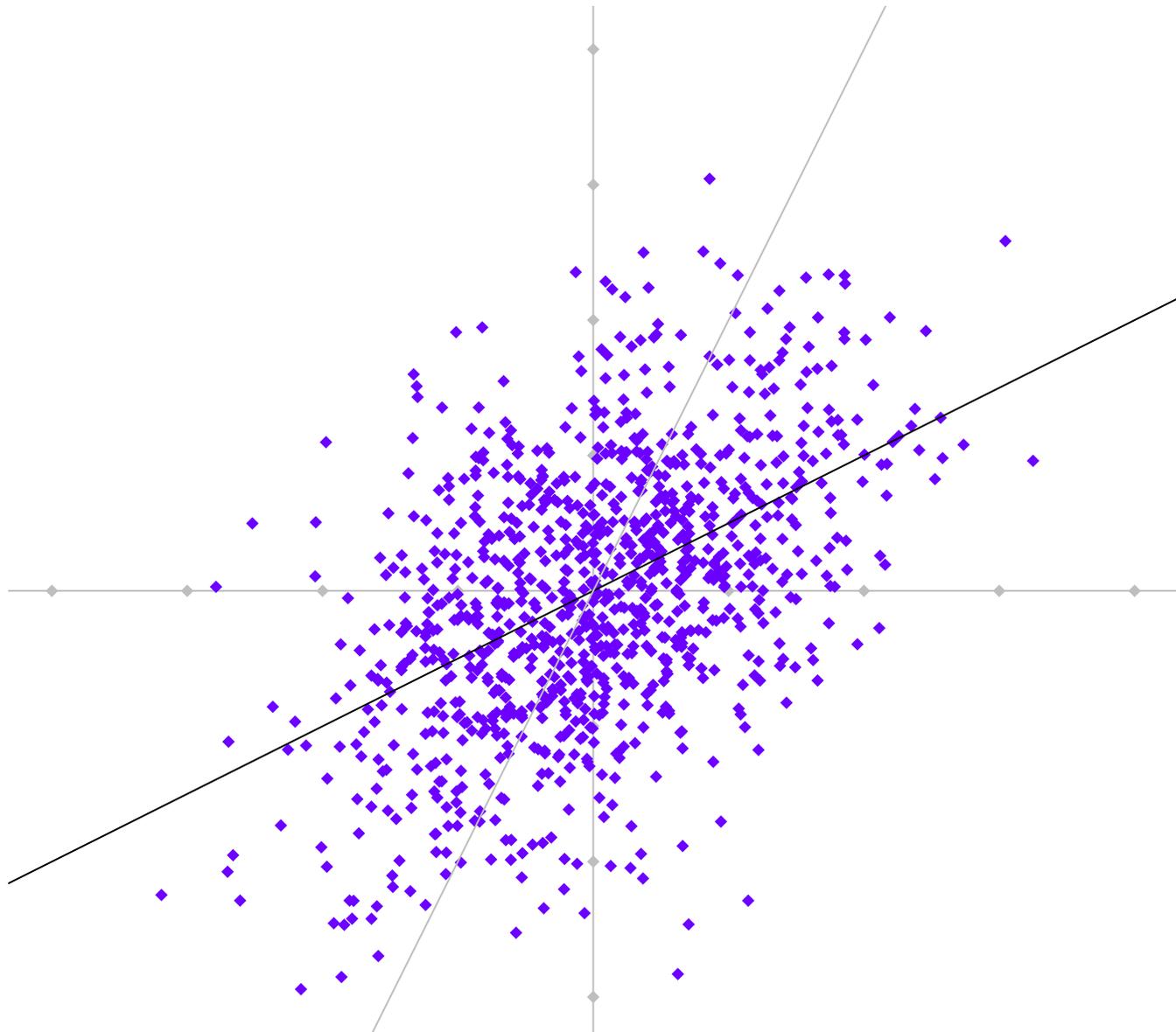
Korrelation = 0.1



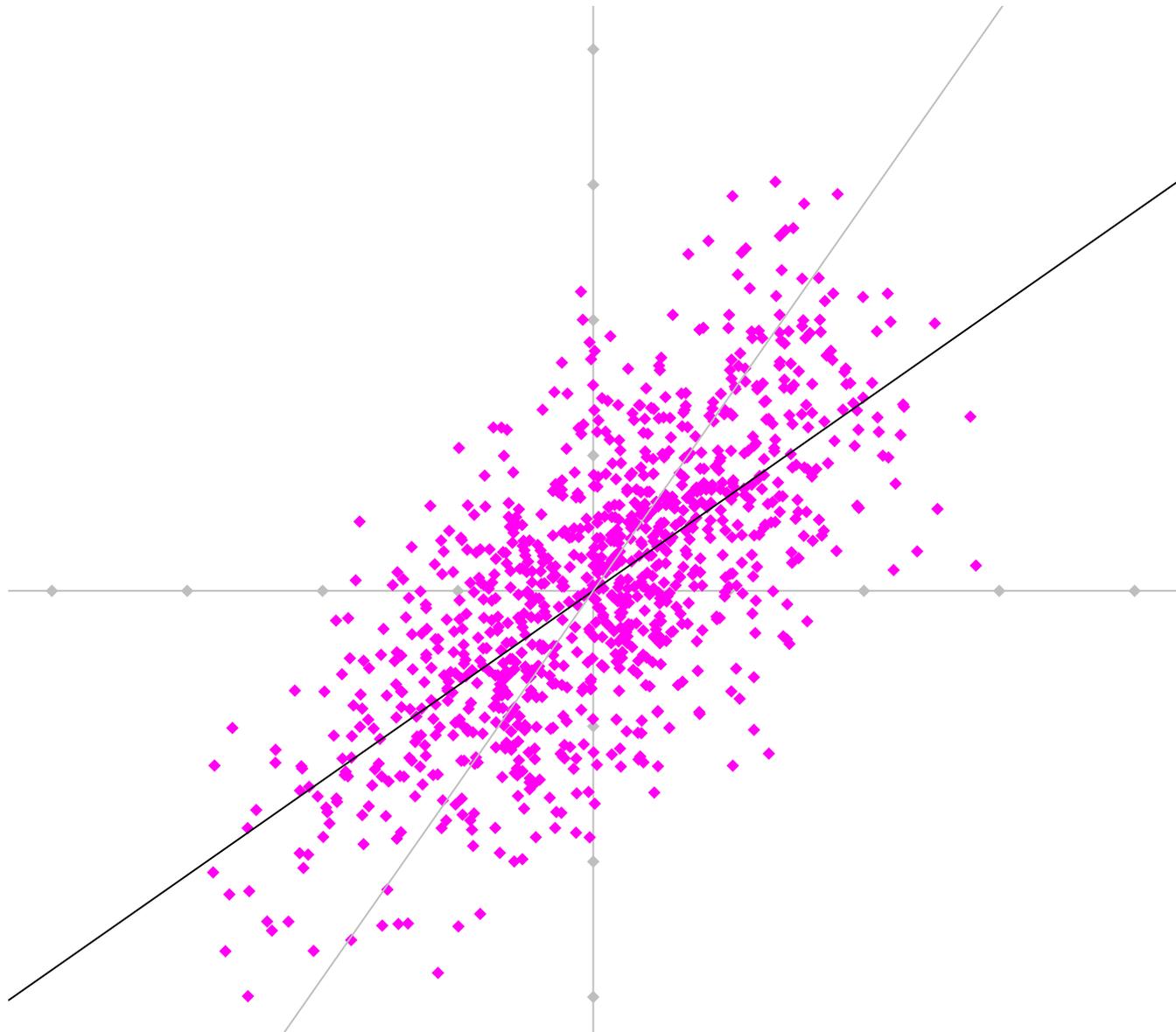
Korrelation = 0.3



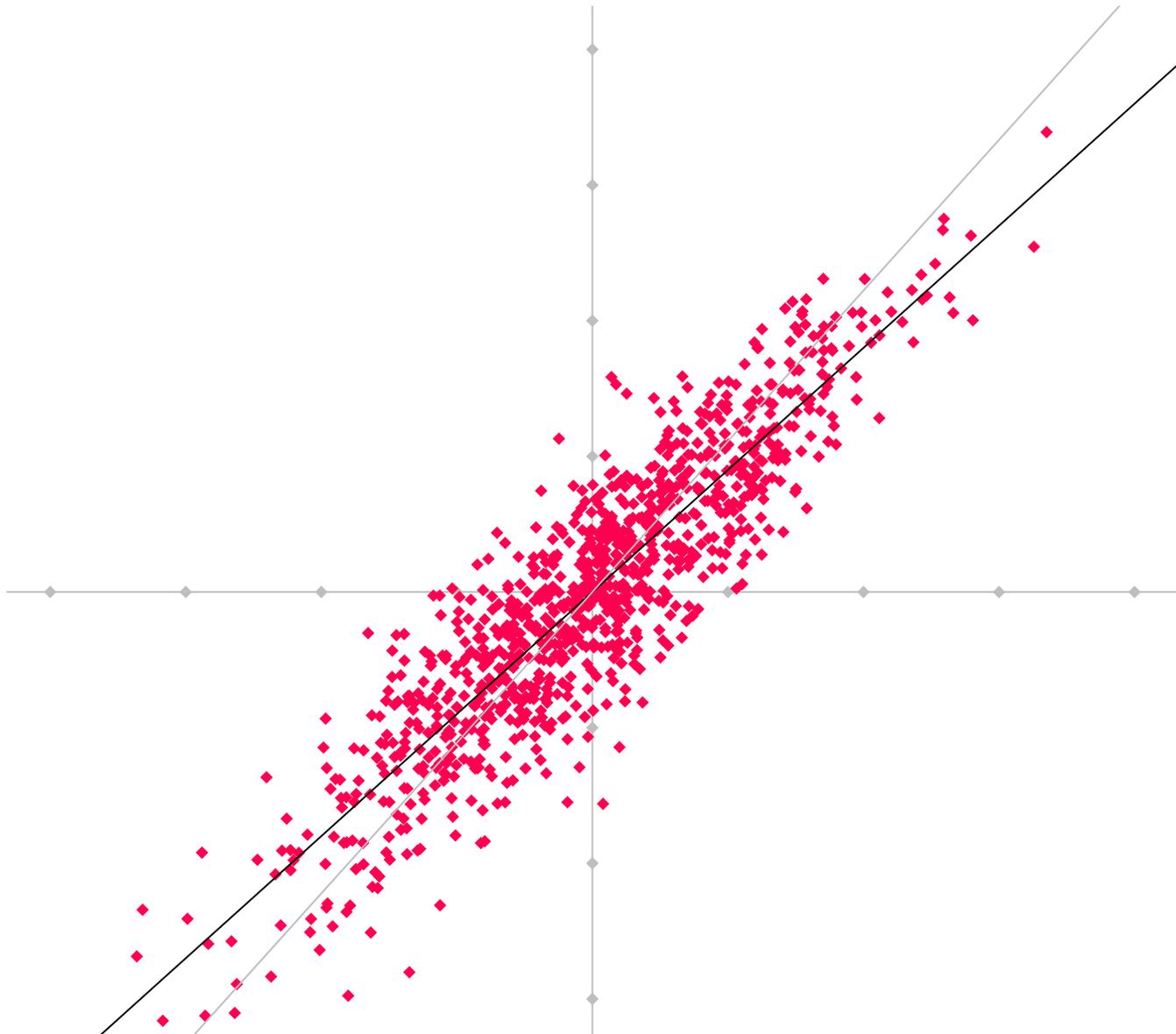
Korrelation = 0.5



Korrelation = 0.7



Korrelation = 0.9



8. Beispiel: “Welche Gerade passt am besten?”

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ seien n verschiedene Punkte im \mathbb{R}^2 .

(X, Y) sei eine rein zufällige Wahl daraus:

$$\mathbf{P}((X, Y) = (x_i, y_i)) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n} \sum x_i =: \bar{x}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\kappa = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2$$

wird, wie wir gezeigt haben, minimiert durch

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

und β_0 so, dass $\bar{y} = \beta_1 \bar{x} + \beta_0$.

Diese Gerade $y = \beta_1 x + \beta_0$ heißt die
Regressionsgerade zu den Punkten (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n..$