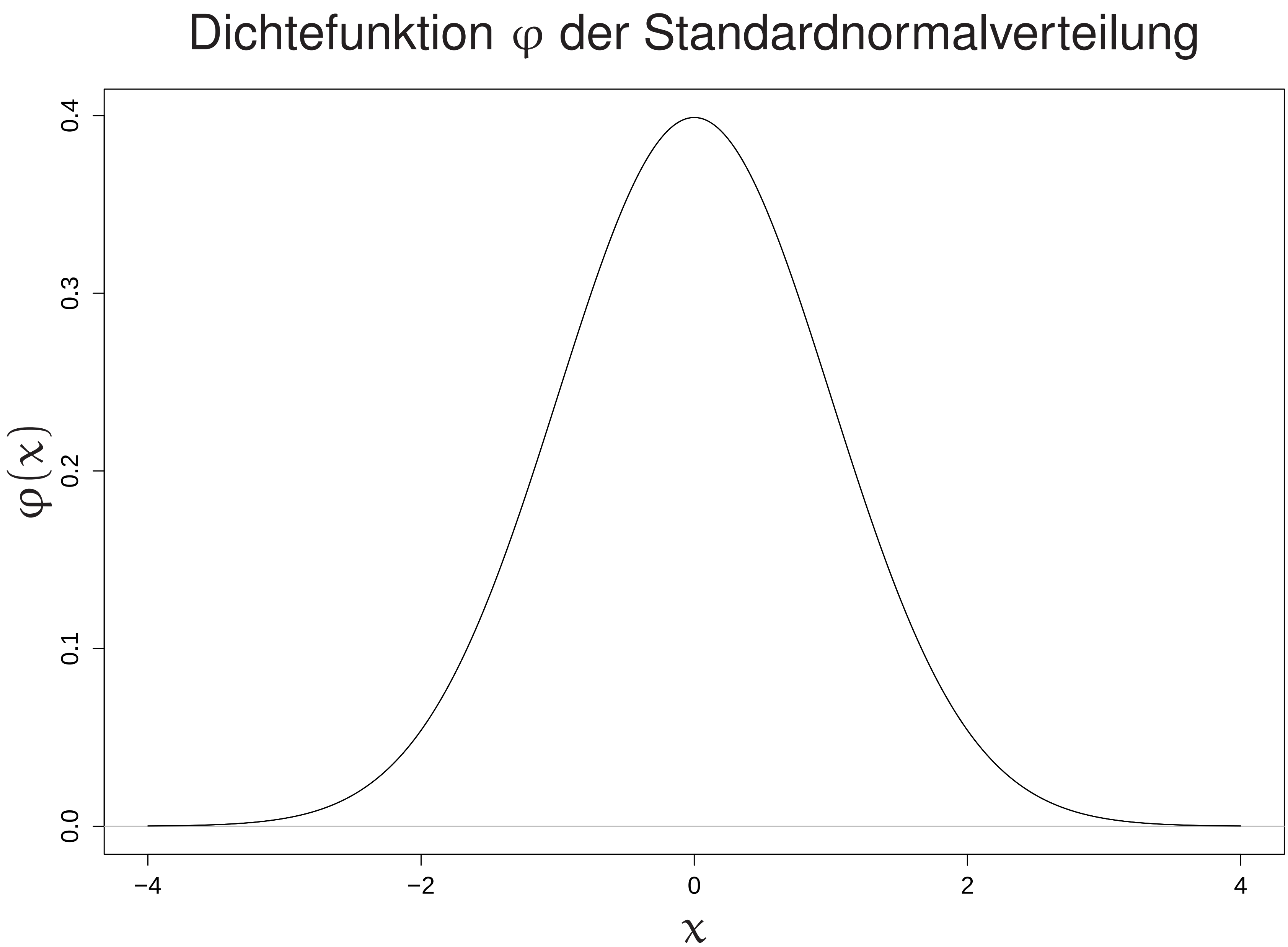
Vorlesung 7b

Der zentrale Grenzwertsatz

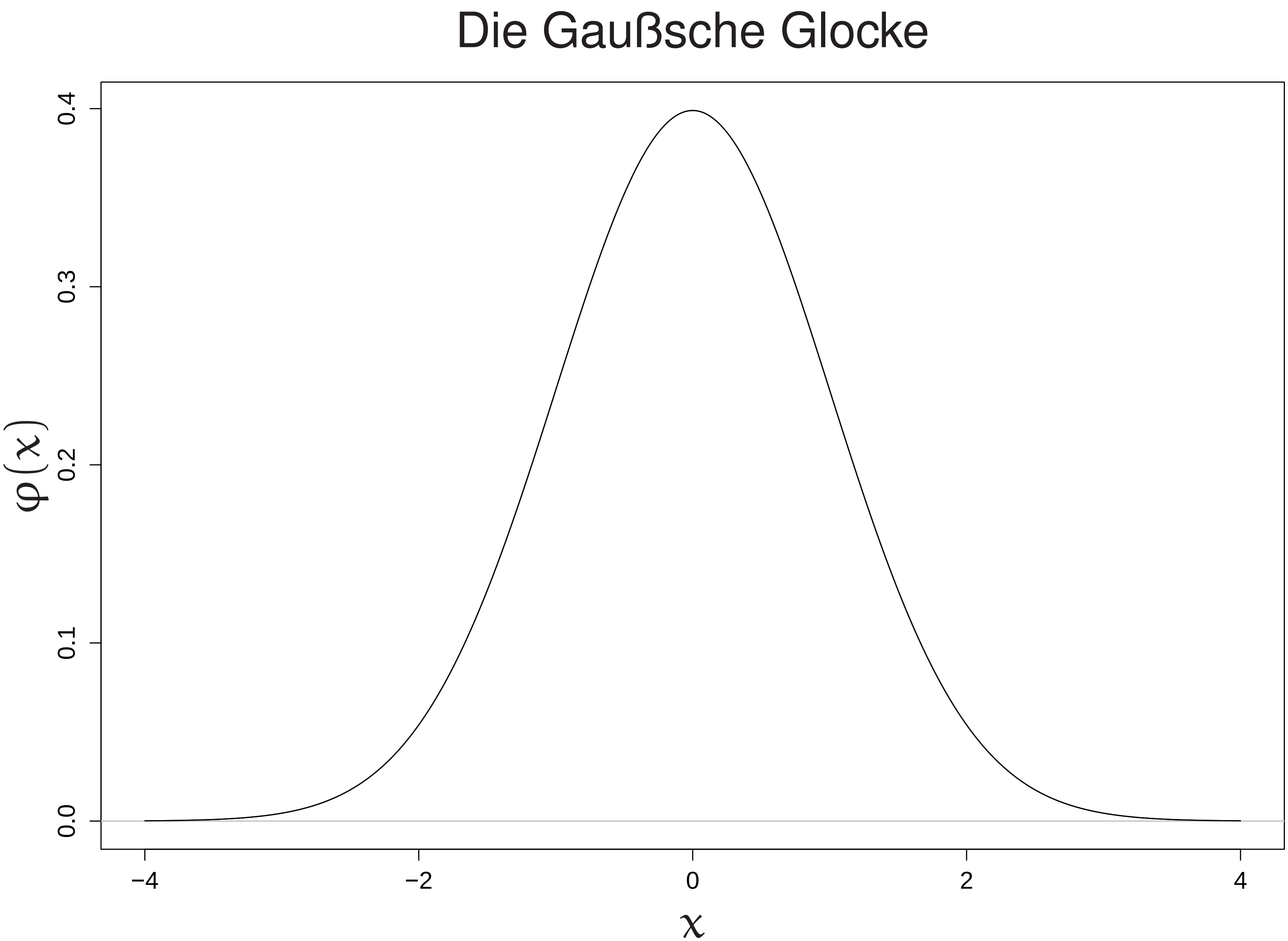
und

das Schwache Gesetz der großen Zahlen

0. Wiederholung: Die Normalverteilung



Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x


Die Gaußsche Glocke
φ(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Z standard-normalverteilt:

$$\mathbf{P}(\ Z \le a\ ) = \Phi(a)$$

Für standard-normalverteiltes Z gilt:

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

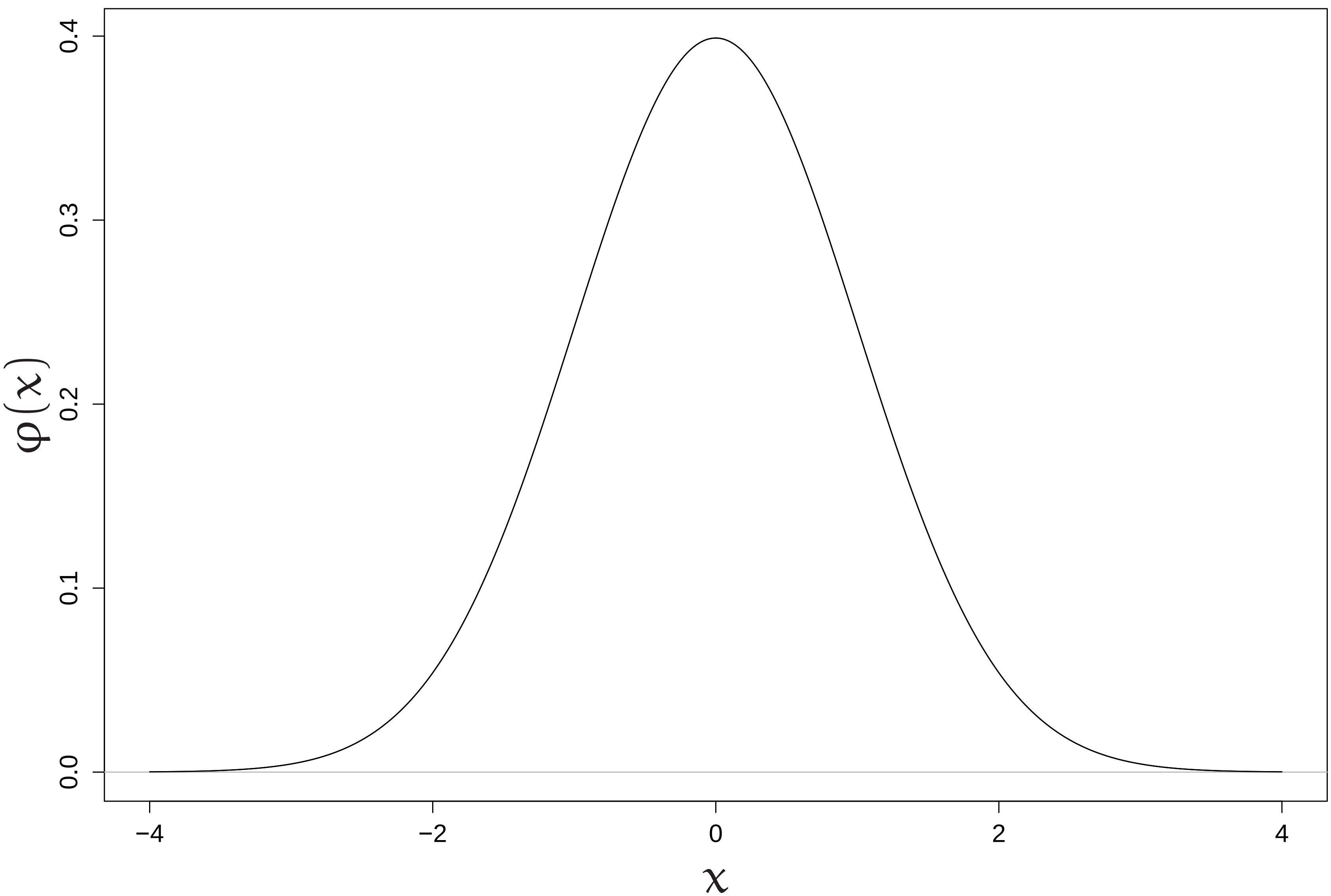
Allgemeine normalverteilte Zufallsvariable entstehen so:

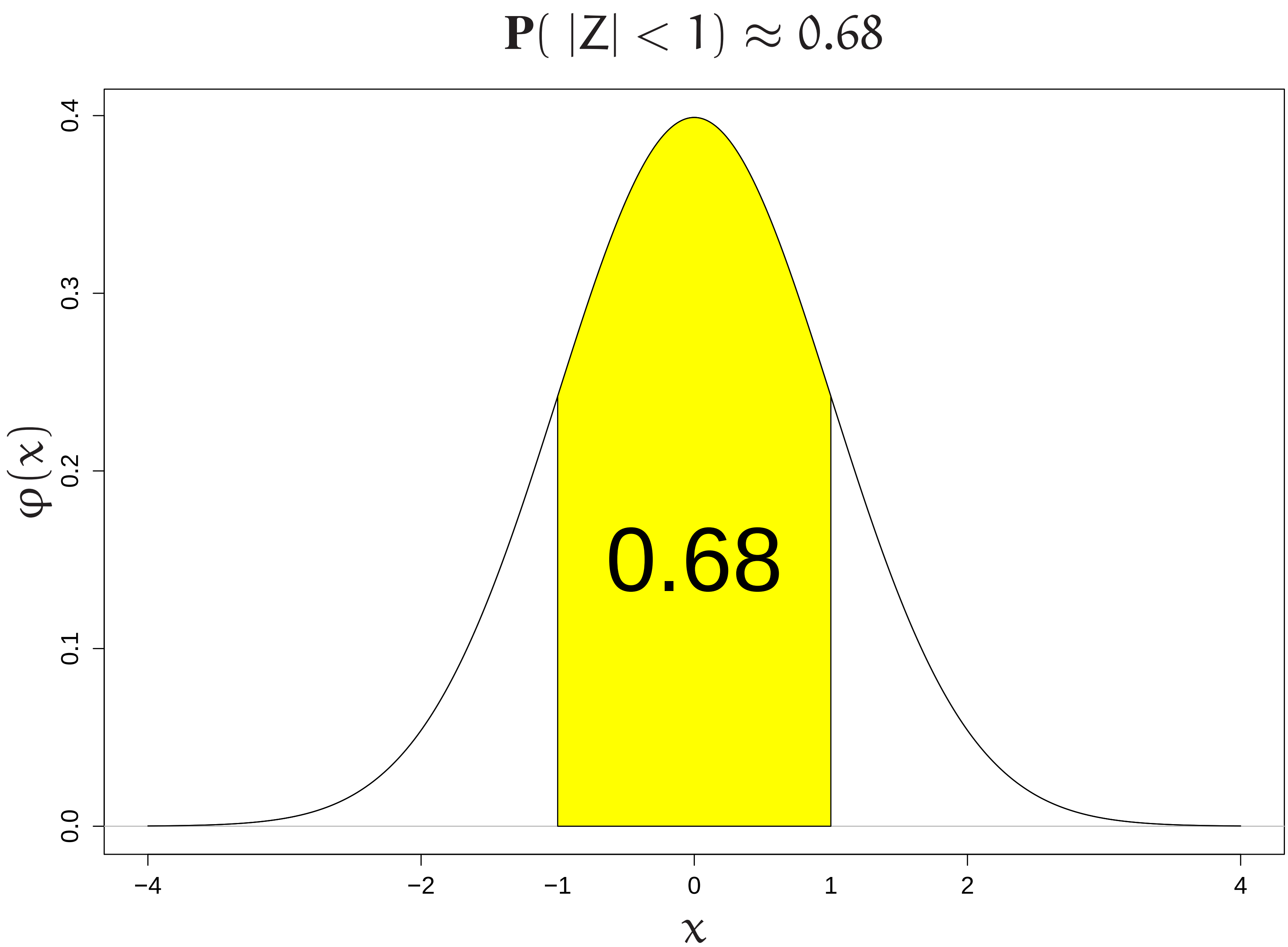
$$N = \mu + \sigma Z$$

Für sie gilt:

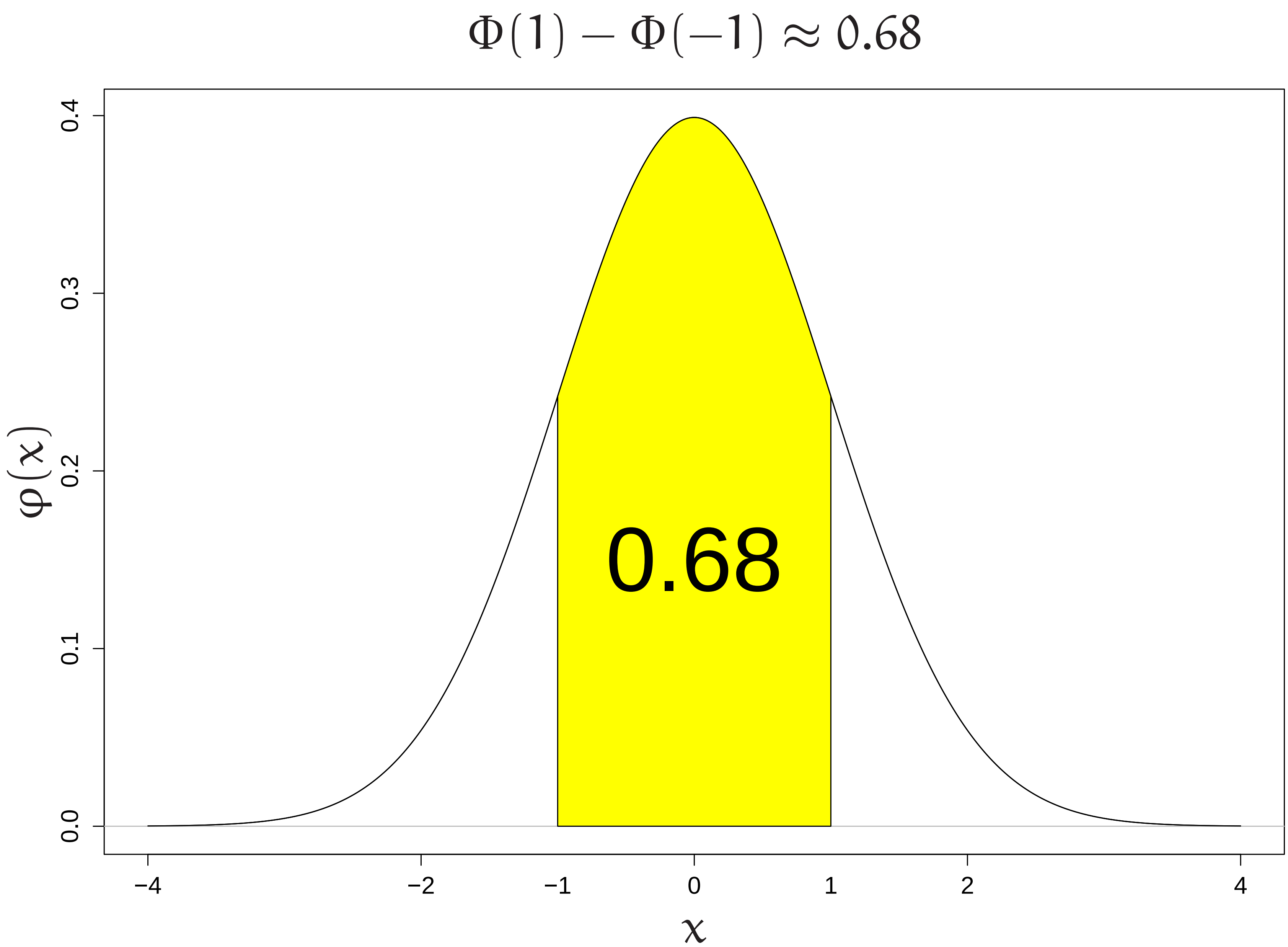
$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \sigma$$

Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung

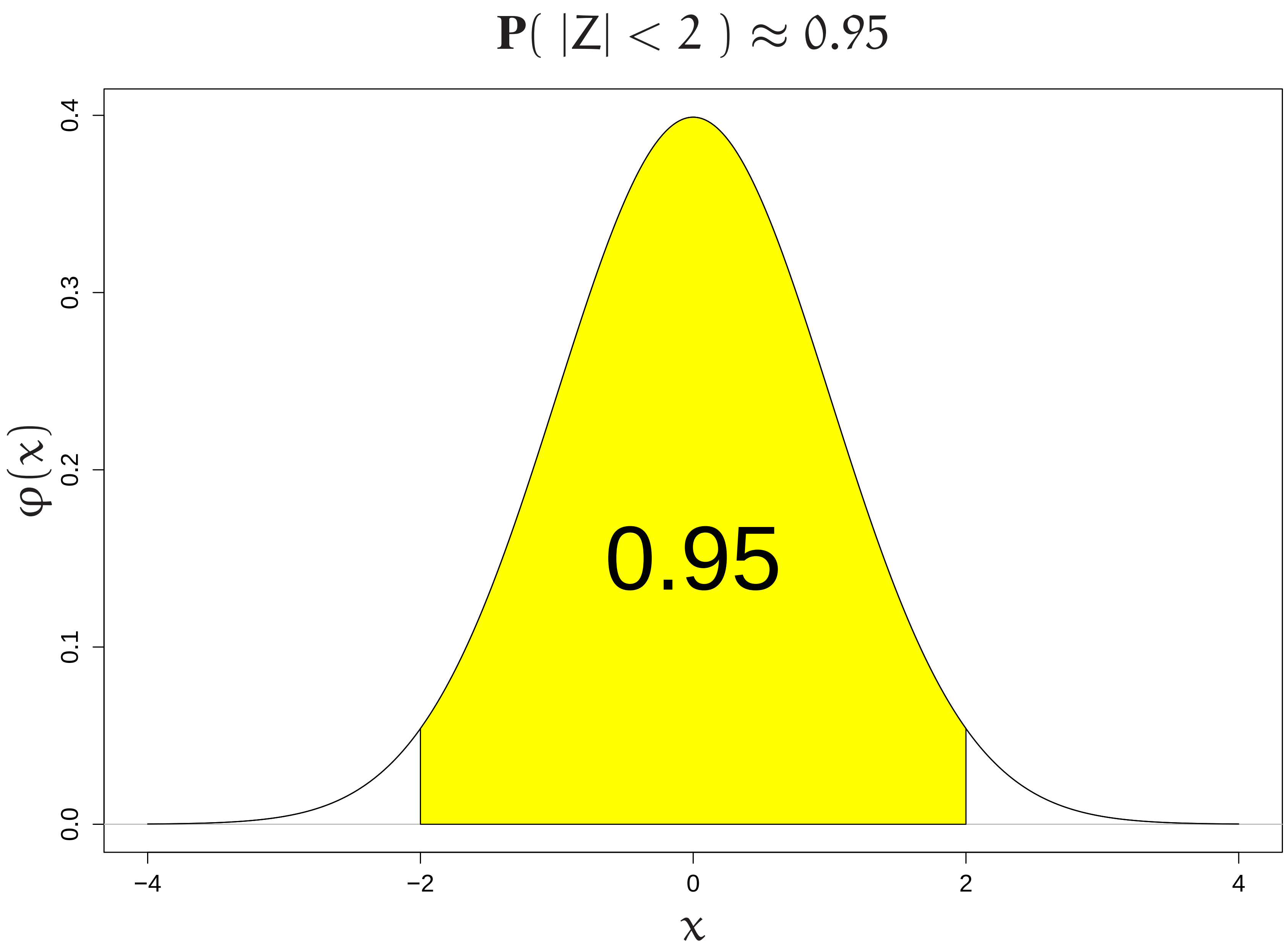




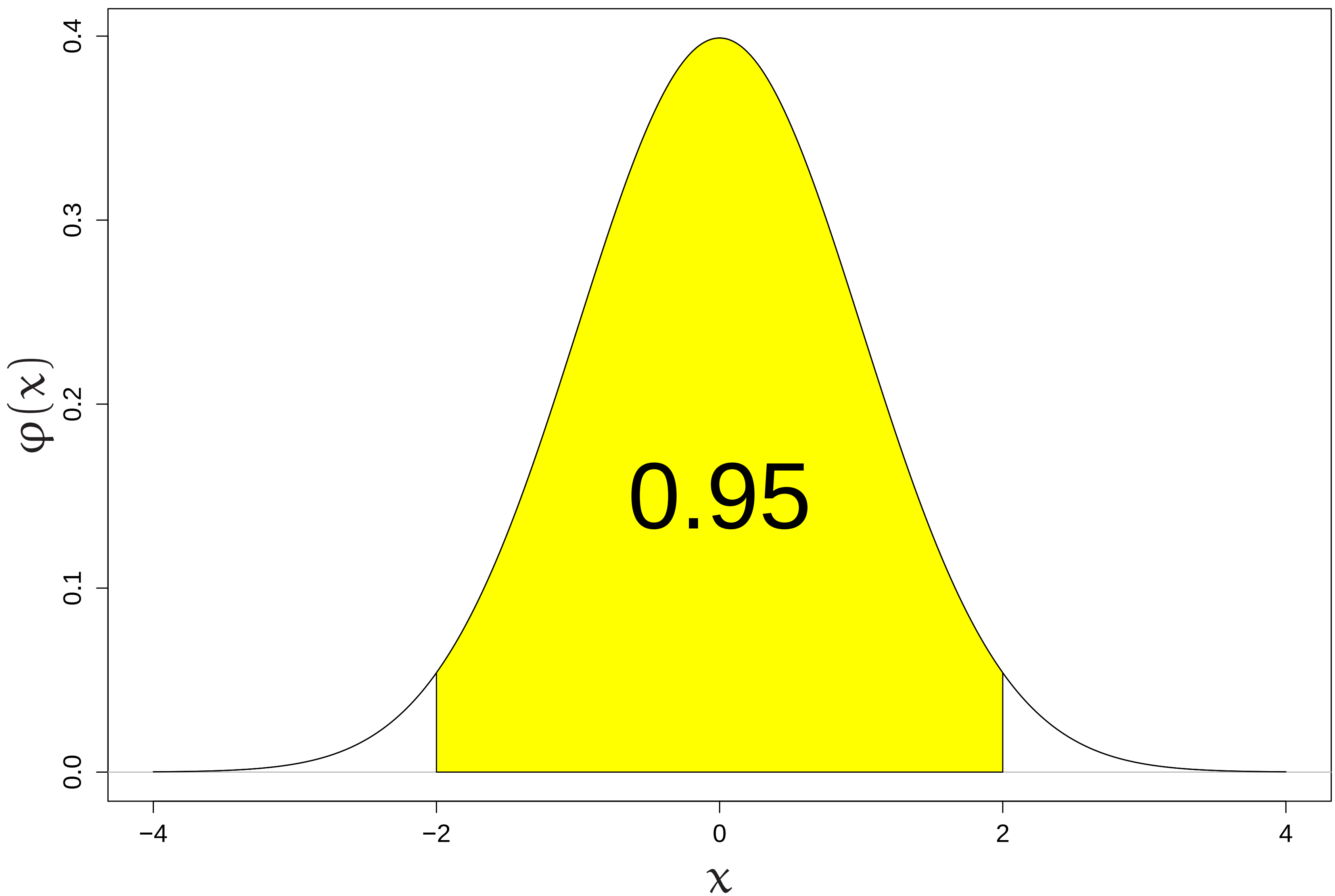
$\mathbf{P}(\ |Z| < 1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
x



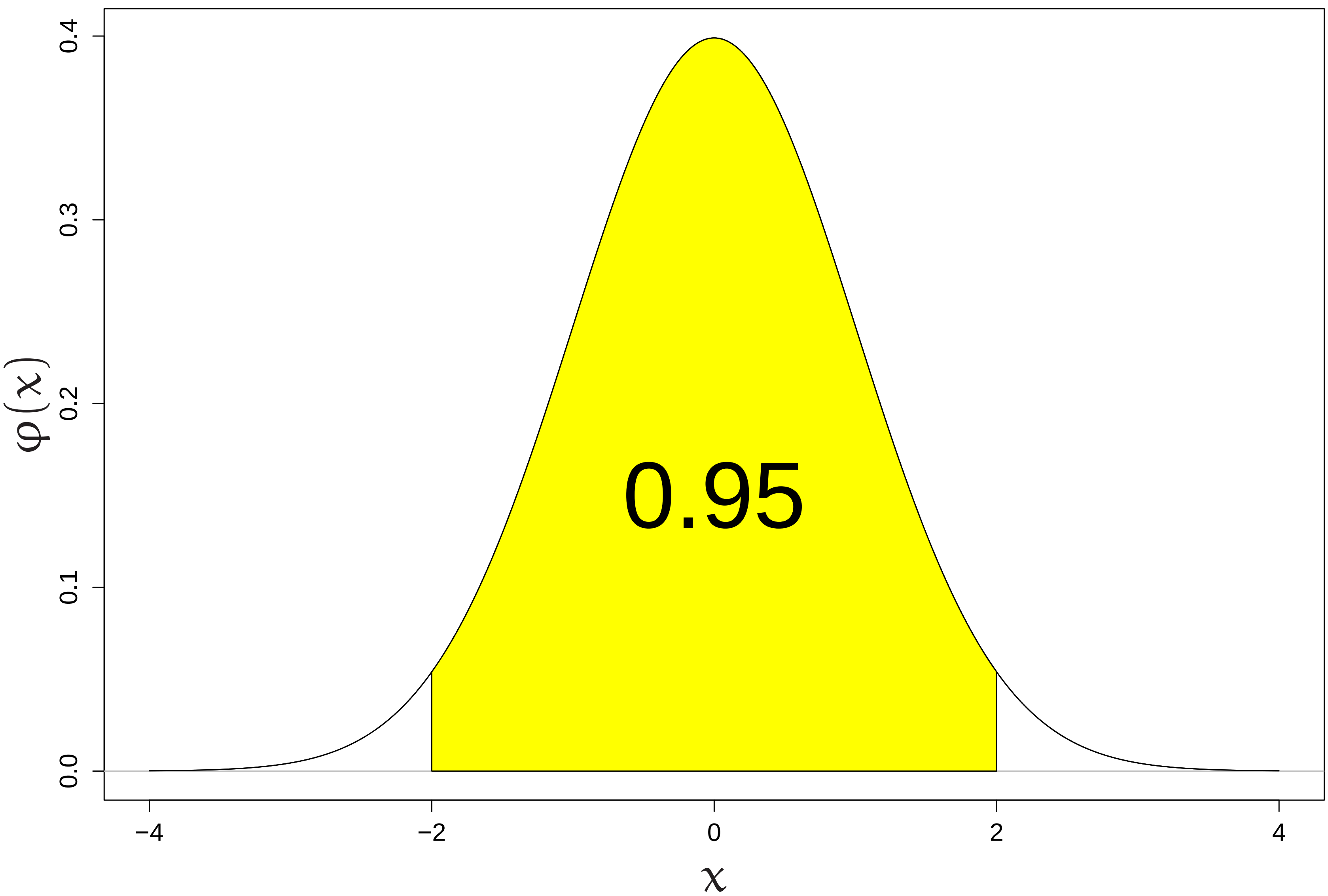
$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
x


$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$
0.95
$\varphi(x)$
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

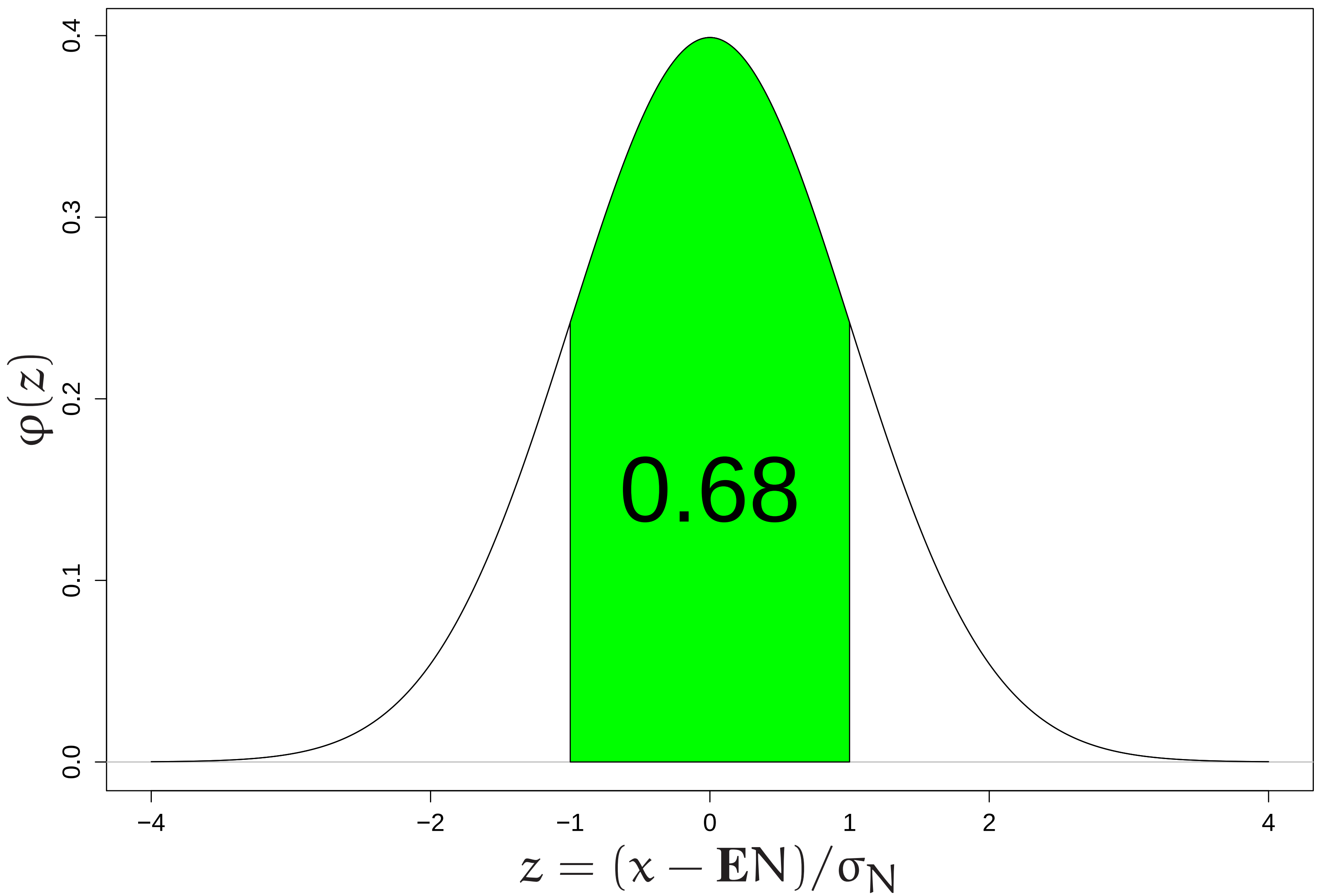
Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen $\mathcal{N}$?

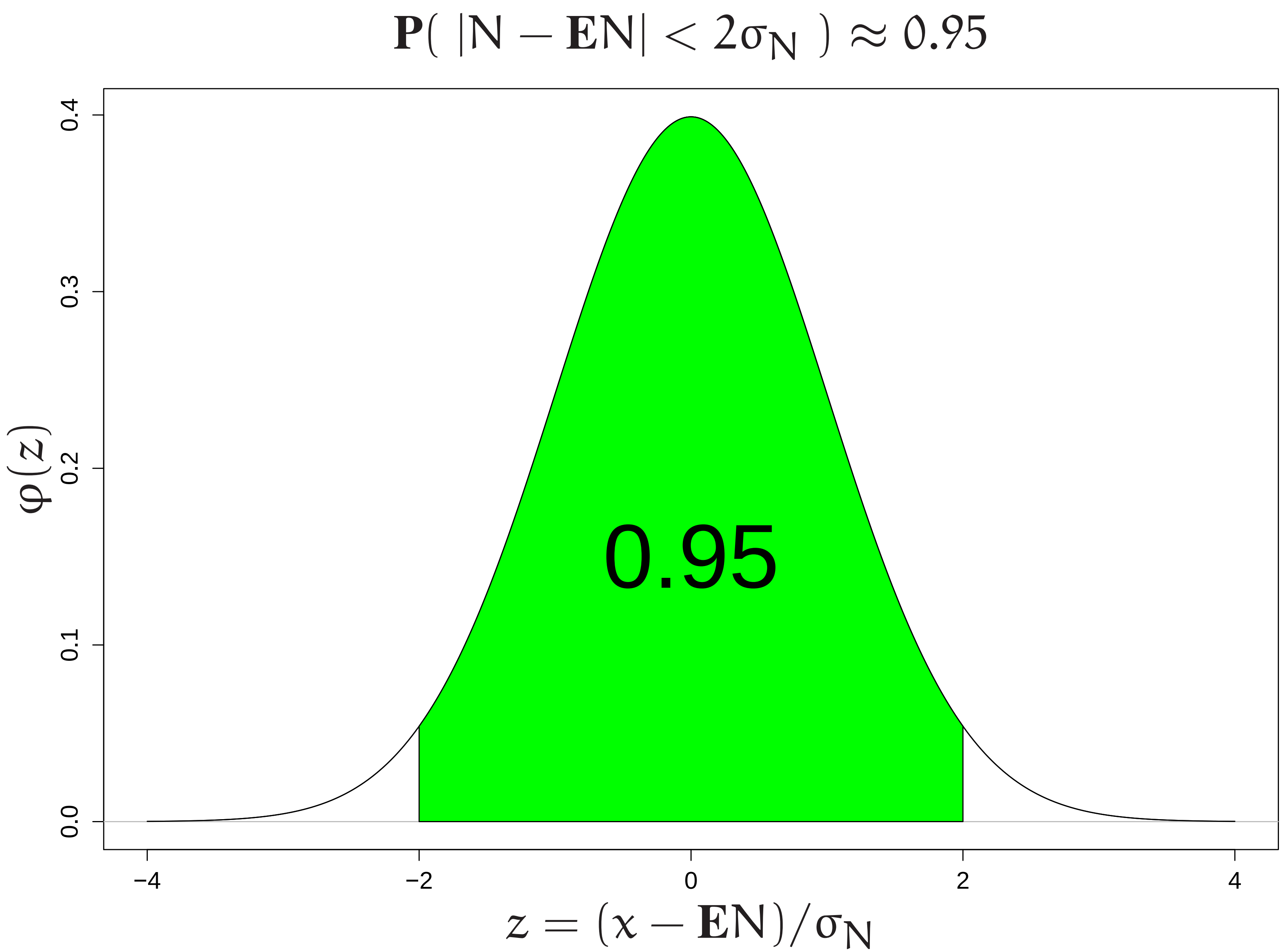


Dasselbe in grün.



$$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < \sigma_N\ ) \approx 0.68$$





$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < 2\sigma_N\ ) \approx 0.95$
0.95
$\varphi(z)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
$z = (x - \mathbf{E}N)/\sigma_N$

1. Unabhängige normalverteilte Zufallsvariable
und deren Summen

Zur Erinnerung:

$(Z_1, \ldots, Z_n)$ heißt standard-normalverteilt im $\mathbb{R}^n$

$$:\Longleftrightarrow$$

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0,1)-verteilt

Aus der

Rotationssymmetrie der Standard-Normalverteilung im $\mathbb{R}^n$

hatten wir gefolgert:

Für Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$ gilt

$\tau_1 Z_1 + \cdots \tau_n Z_n$ ist N(0,1)-verteilt.

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von

unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen

ist wieder normalverteilt.

Denn:

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2 \right)$$

ist $N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt, und

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2).$$

Insbesondere ergibt sich:

Die standardisierte Summe von unabhängigen, identisch normalverteilten Zufallsvariablen ist standard-normalverteilt

Mit anderen Worten: Sind $N_1, N_2, \ldots, N_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt, dann ist

$$\frac{N_1 + \cdots + N_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$ standard-normalverteilt.

2. Der Zentrale Grenzwertsatz: Die Botschaft

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert

eine gewaltige Weiterung der vorigen Aussage

(asymptotisch für große n):

Zentraler Grenzwertsatz:

"Die standardisierte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

ist annähernd standard-normalverteilt"

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

In Worten:

Die standardisierte Summe von n unabhängigen,

identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

konvergiert für $n \to \infty$ in Verteilung

gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Ein (erster) Hinweis darauf, dass die standardisierte Summe
von n unabhängigen, identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen
etwas mit asymptotischer Normalität zu tun haben könnte:

Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[X] = 0$ und $\mathbf{Var}[X] = 1$.

$$X_1, X_2, \ldots, \quad X_1', X_2', \ldots$$

seien unabhängige, identisch verteilte Kopien von X.

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n), \quad Z_n' := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1' + \cdots + X_n').$$

Dann ist $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_n + Z_n')$ so verteilt wie Z_{2n}.

Und für unabhängige, N(0,1)-verteilte Zufallsvariable Z, Z' wissen wir:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(Z + Z')$ ist so verteilt wie Z

weil ja, wie wir gesehen haben, (Z, Z') rotationssymmetrisch verteilt ist!

Vielleicht ist für große n auch

(Z_n, Z_n') annähernd rotationssymmetrisch verteilt?

3. Zentraler Grenzwertsatz:

Meilensteine in seiner Geschichte

Abraham de Moivre:

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace:

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev:

Skizze eines Beweises für den allgemeinen Fall (1887)

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov:

Noch allgemeiner (1906)

Allgemeiner zentraler Grenzwertsatz (1901)

Andrei Andreyevich Markov:

weitere Verallgemeinerungen (~ 1910)

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten <u>wir</u> ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

4. Ein Beispiel: Summen von unabhängigen uniform verteilten Zufallsvariablen

Wir denken an

Rundungsfehler bei Addition

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\ldots$$

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx ?$$

Ein Beispiel:

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig

und uniform auf $[-0.5, 0.5]$ verteilt

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

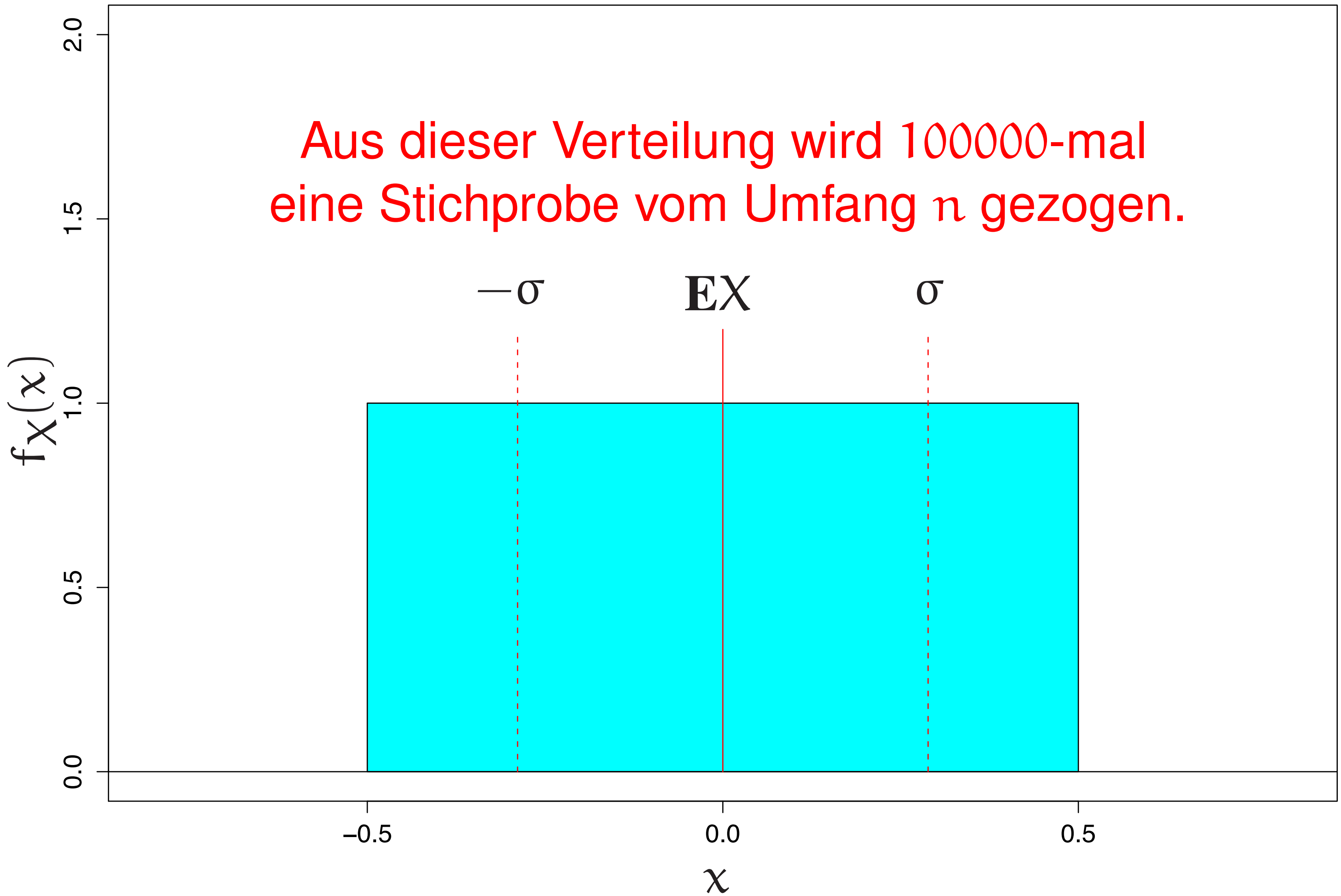
100000 Simulationen

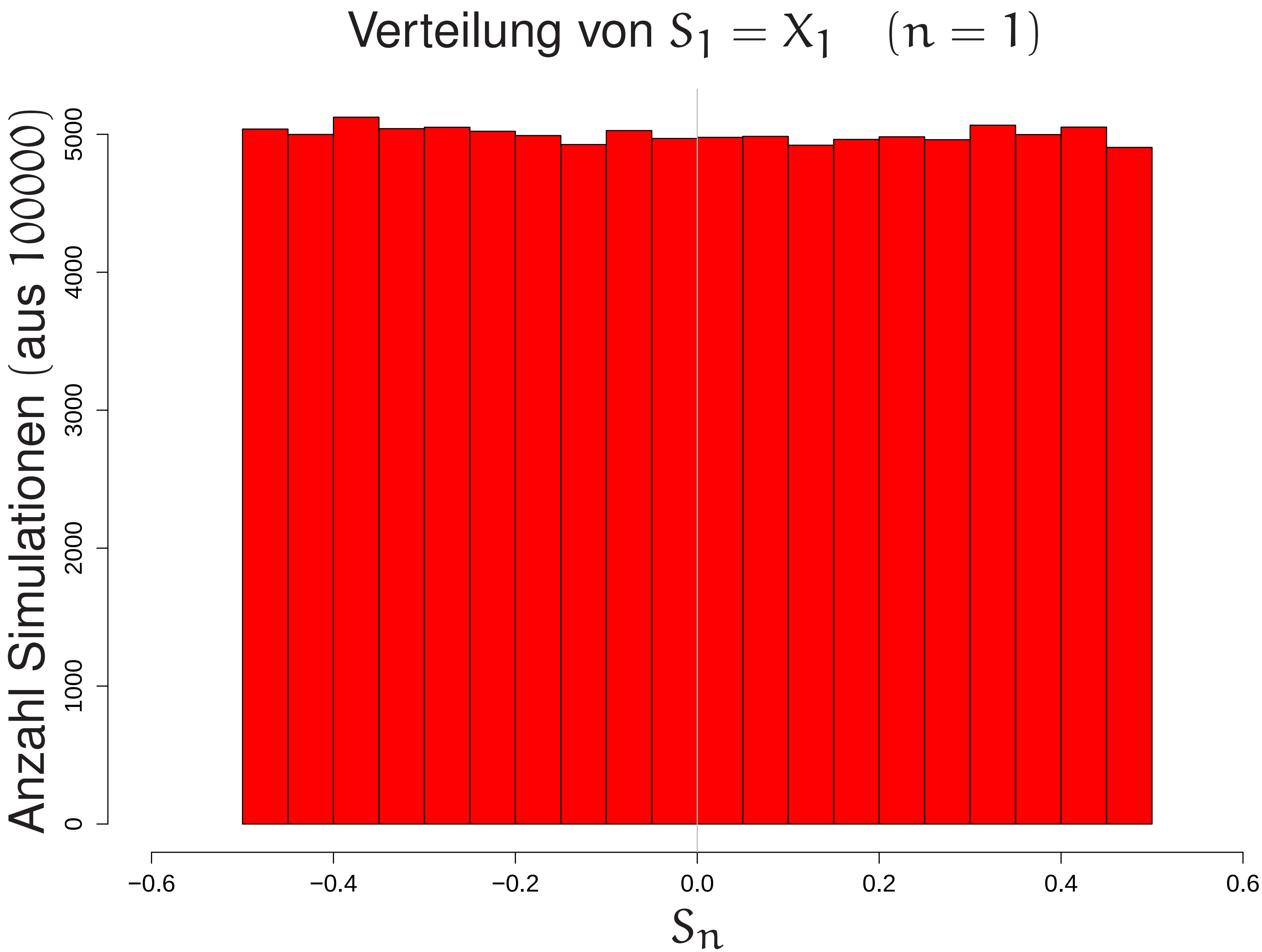
jeweils für

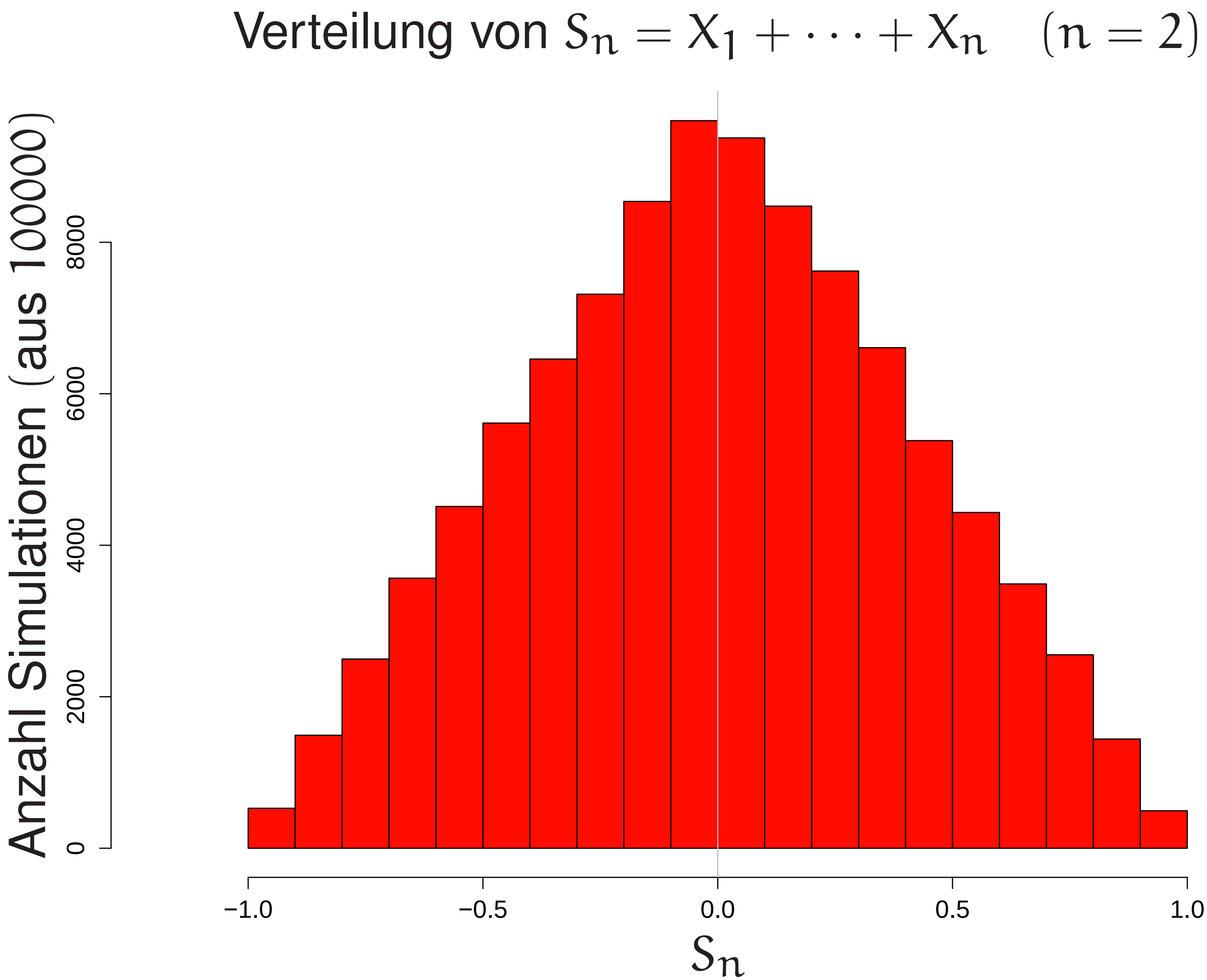
$$n = 1, 2, ..., 10$$

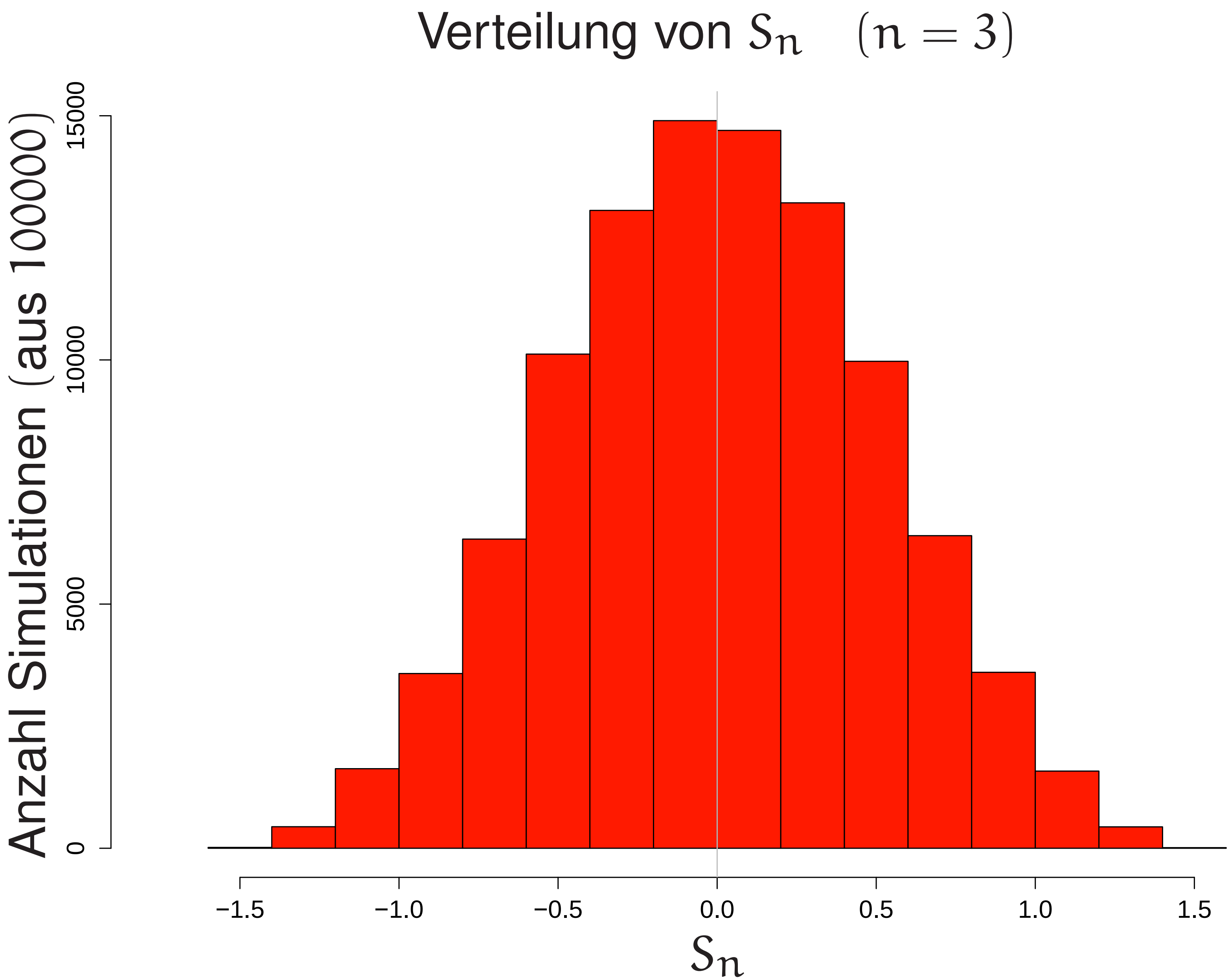
$$n = 15, 20, ..., 100$$

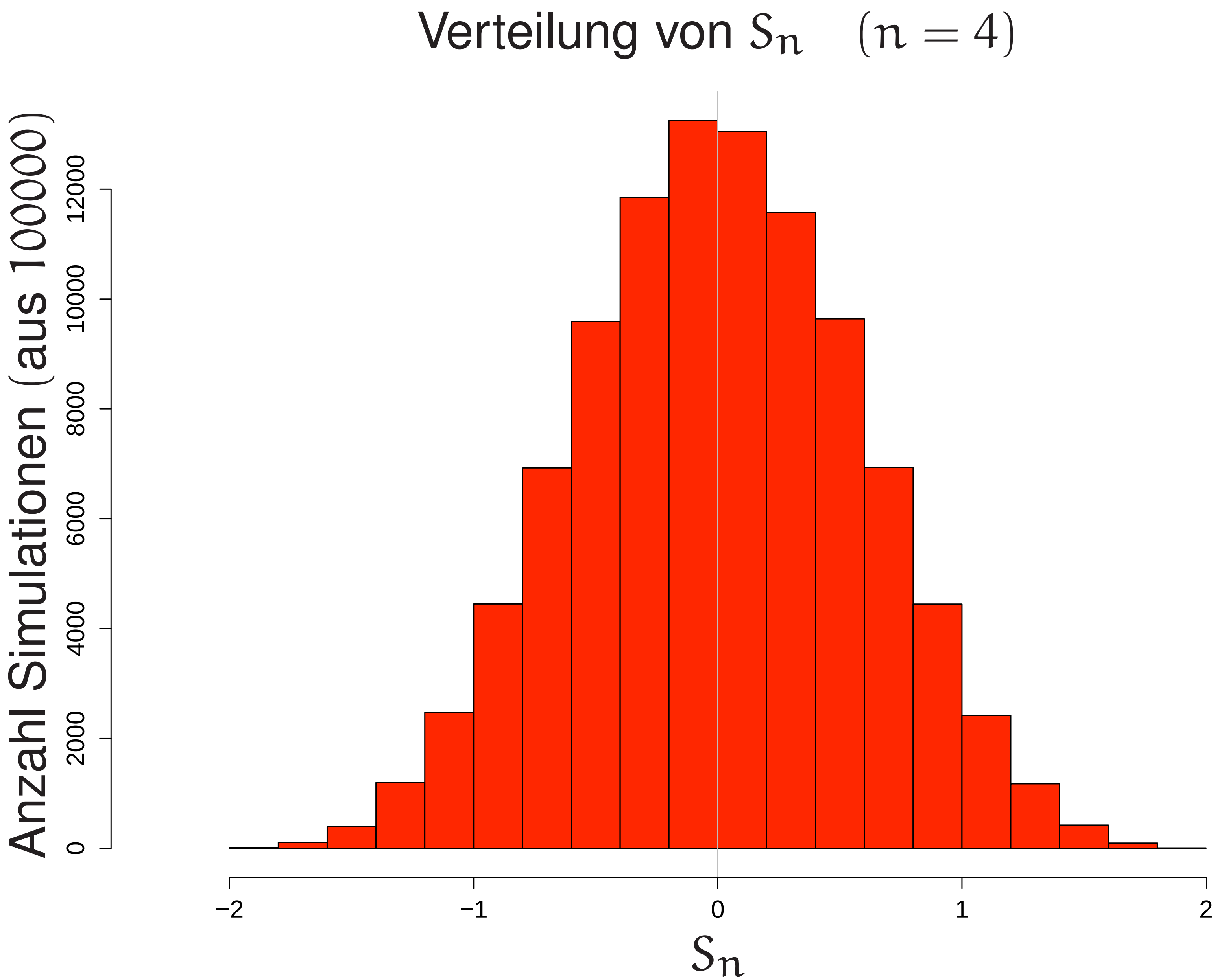
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X



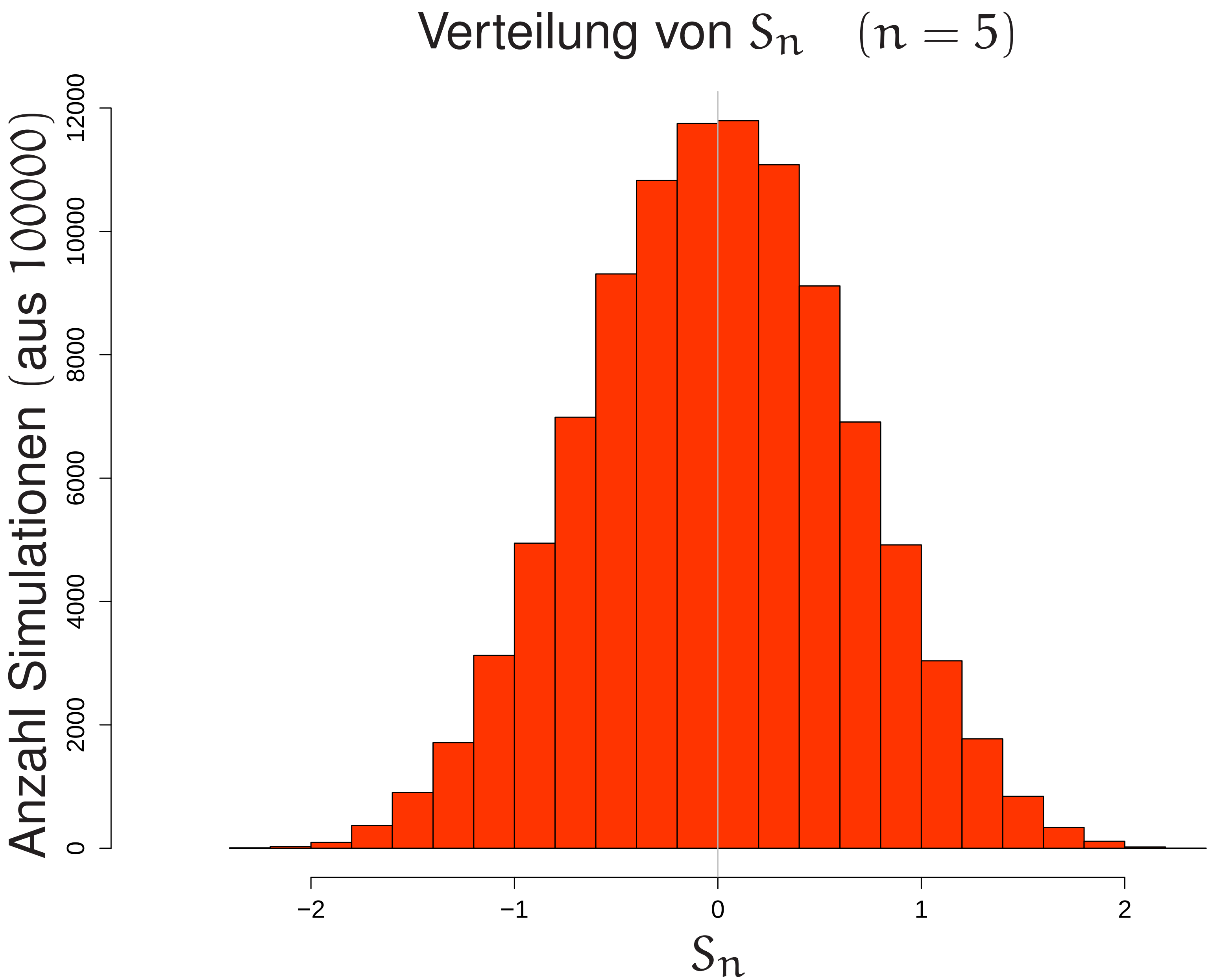

Verteilung von $S_1 = X_1 \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
1000
2000
3000
4000
5000
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
S_n


Verteilung von $S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
S_n

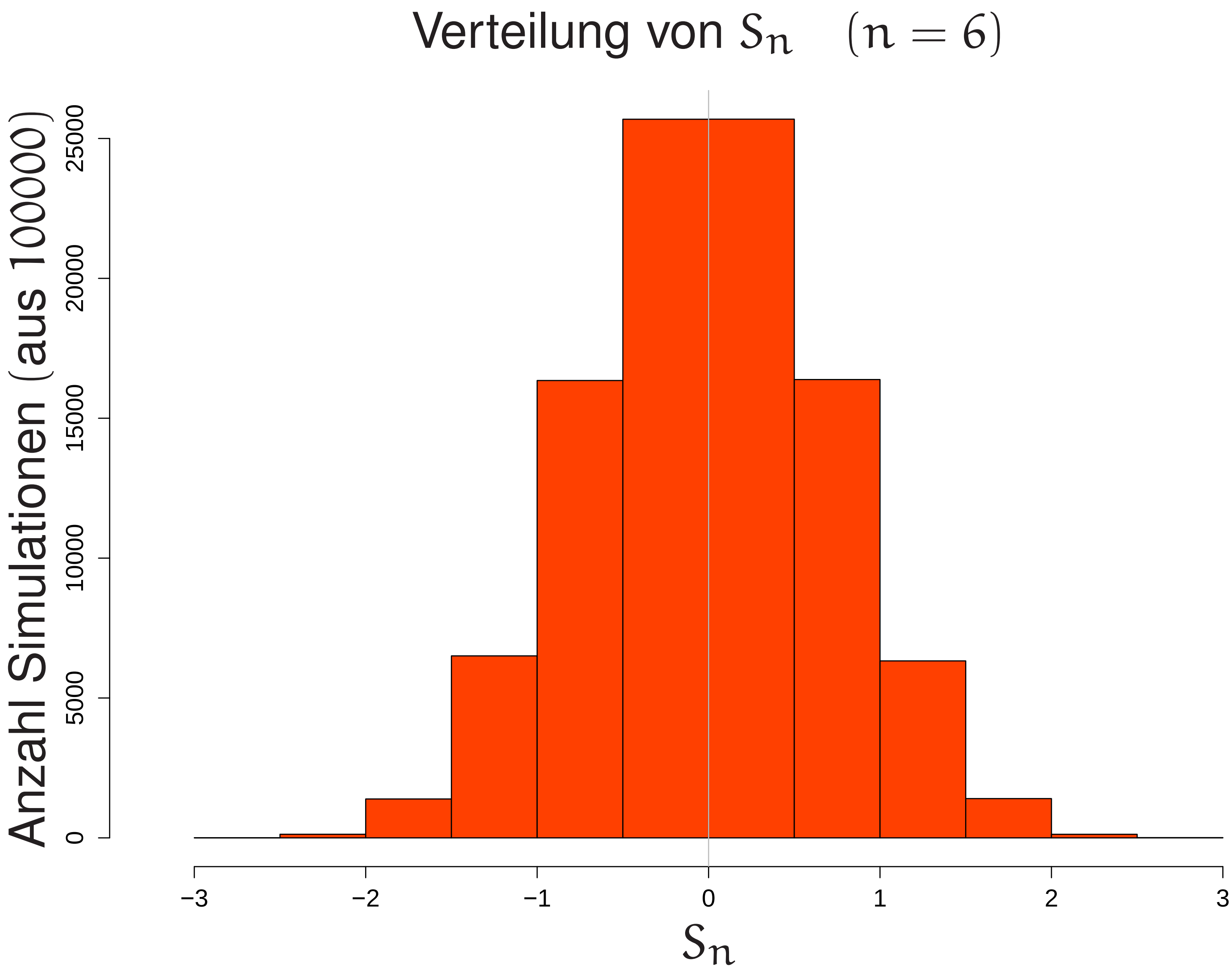

Verteilung von S_n $(n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
S_n



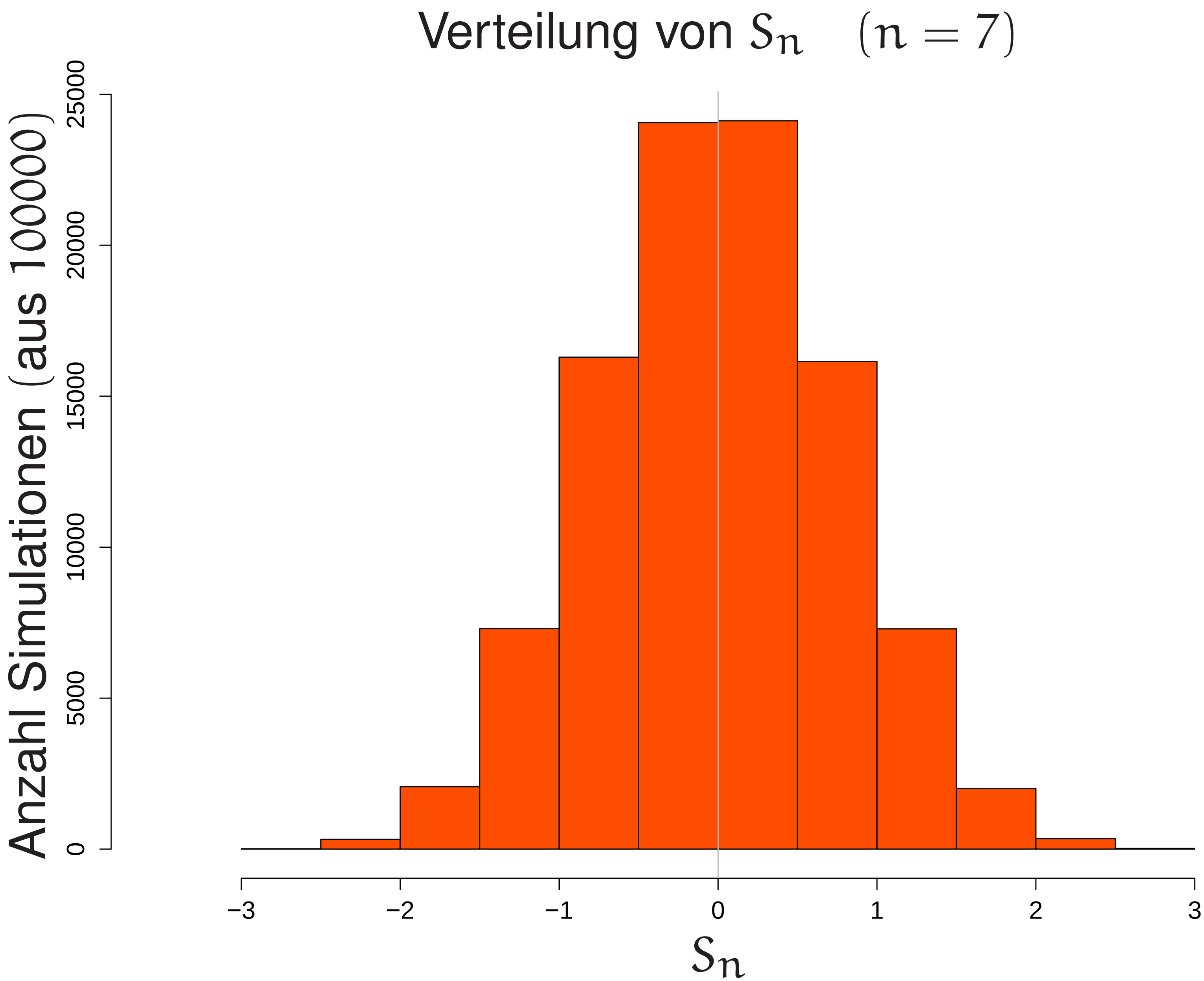
Verteilung von S_n $(n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n



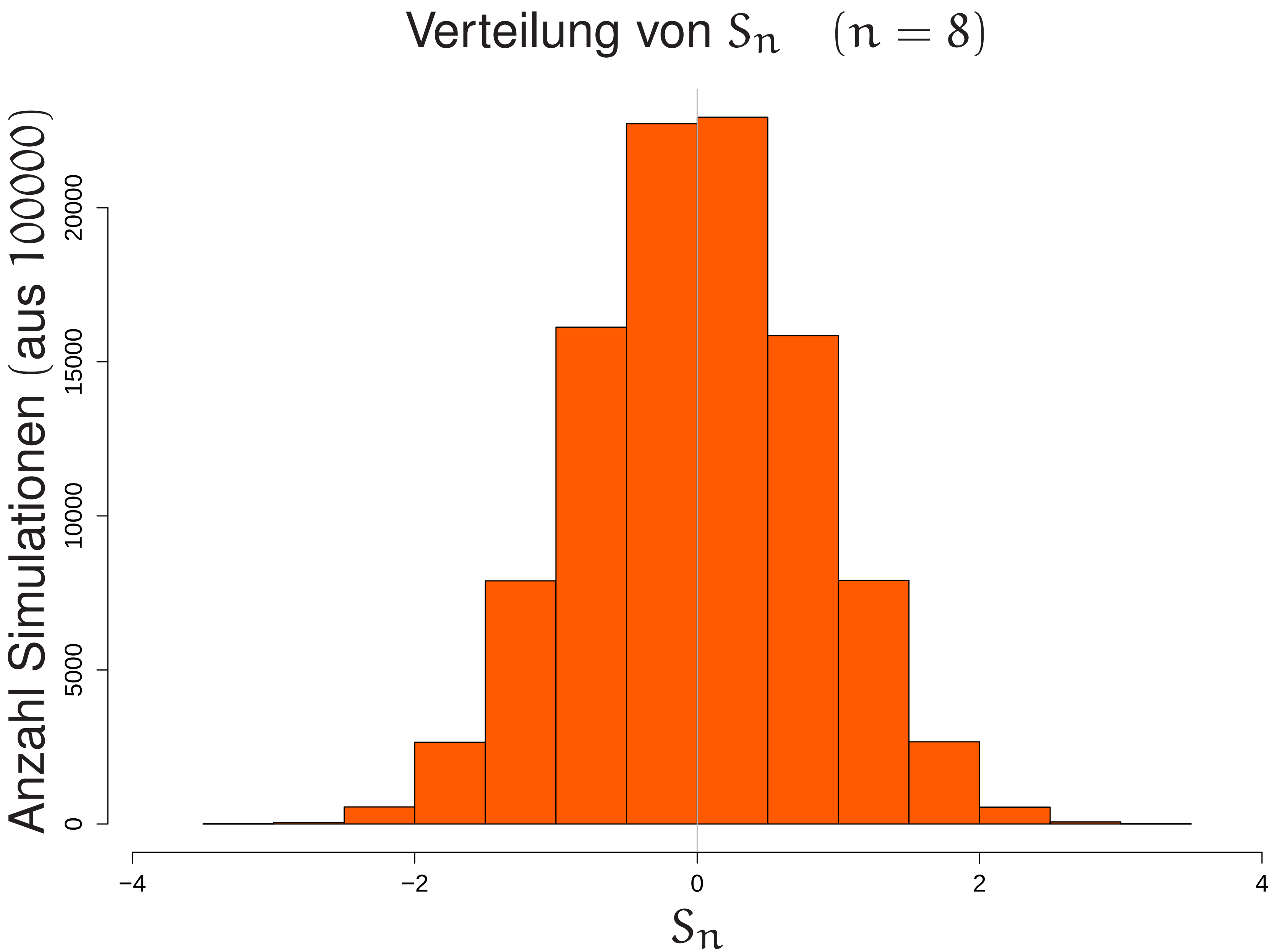
Verteilung von S_n $(n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

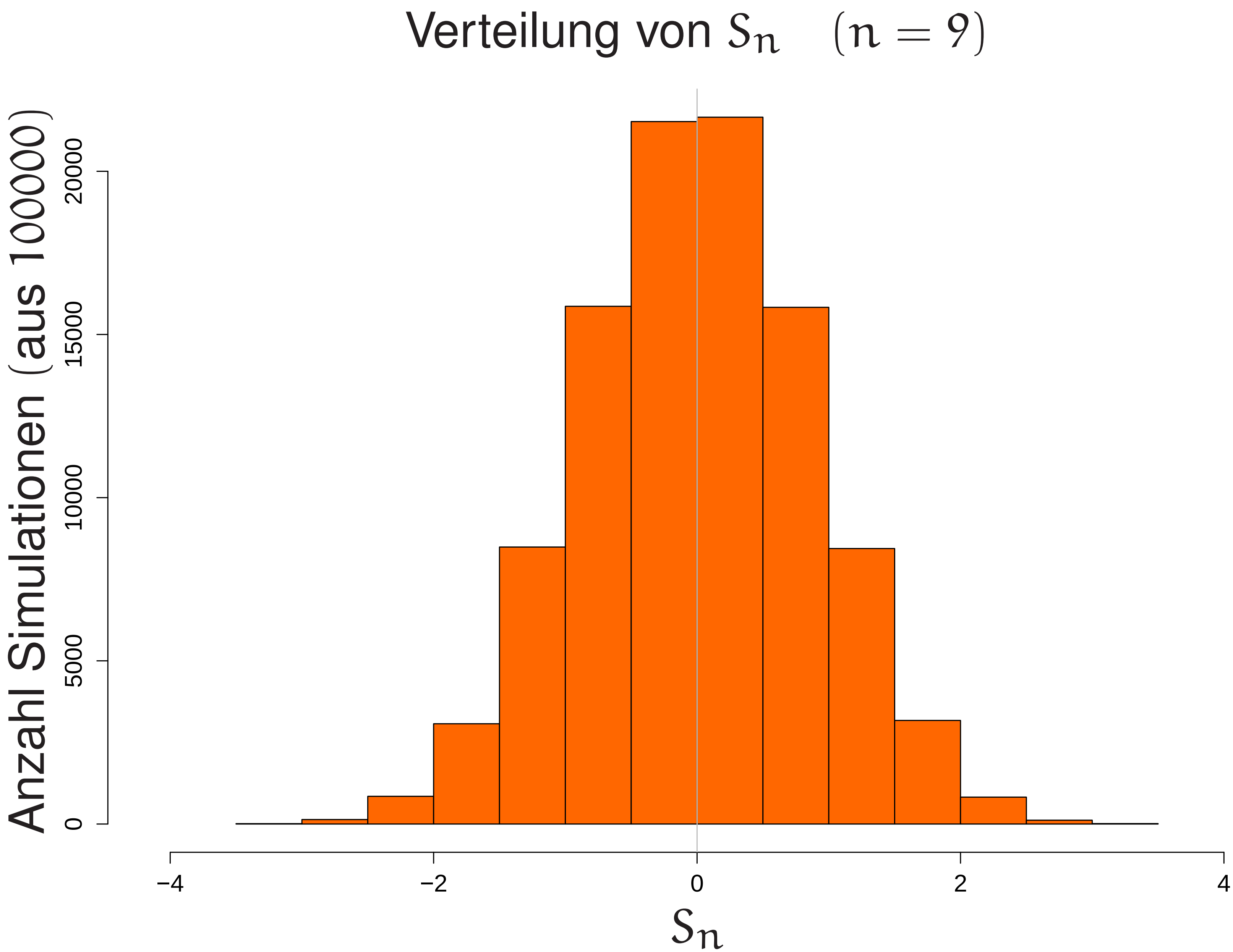


Verteilung von S_n $(n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

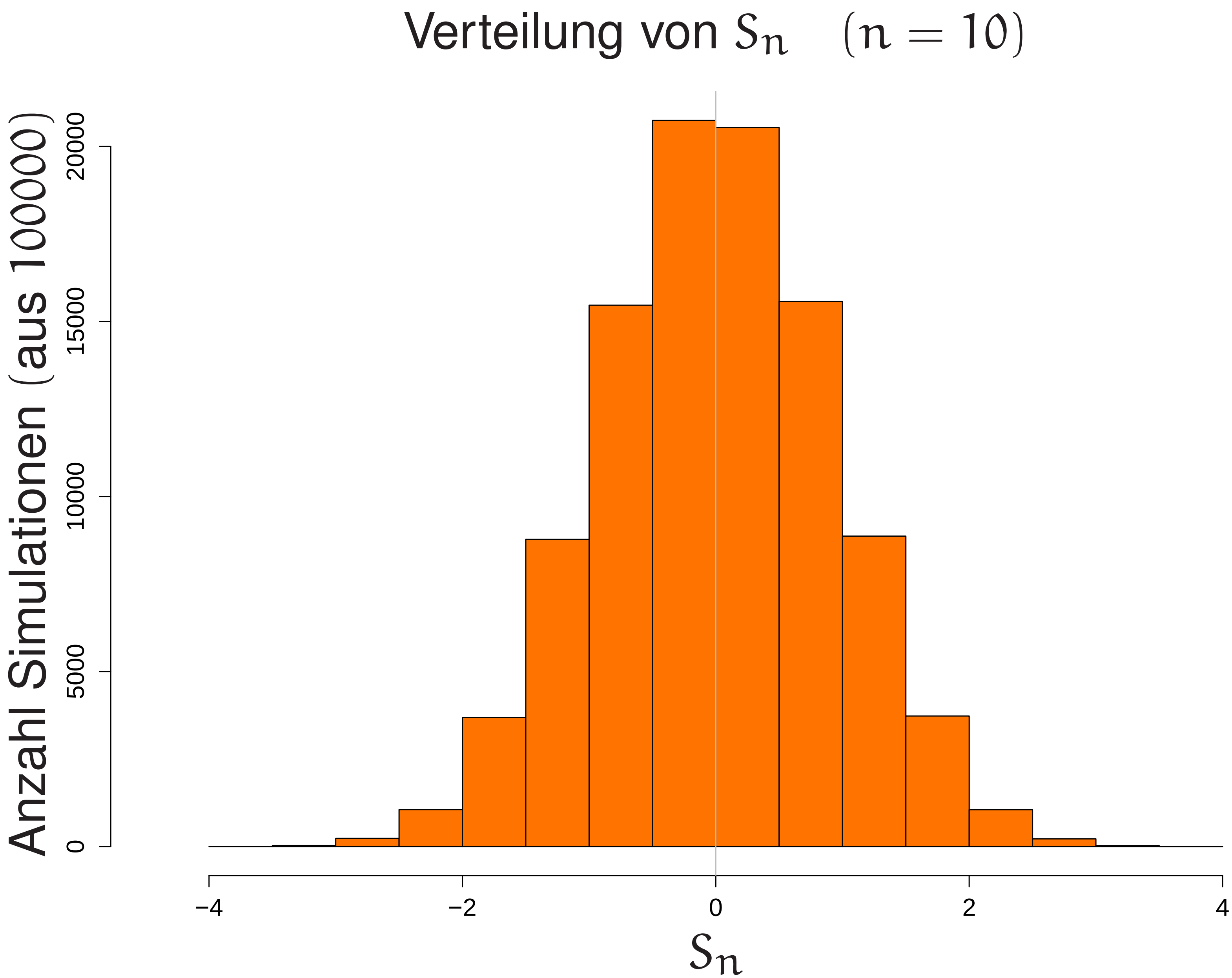


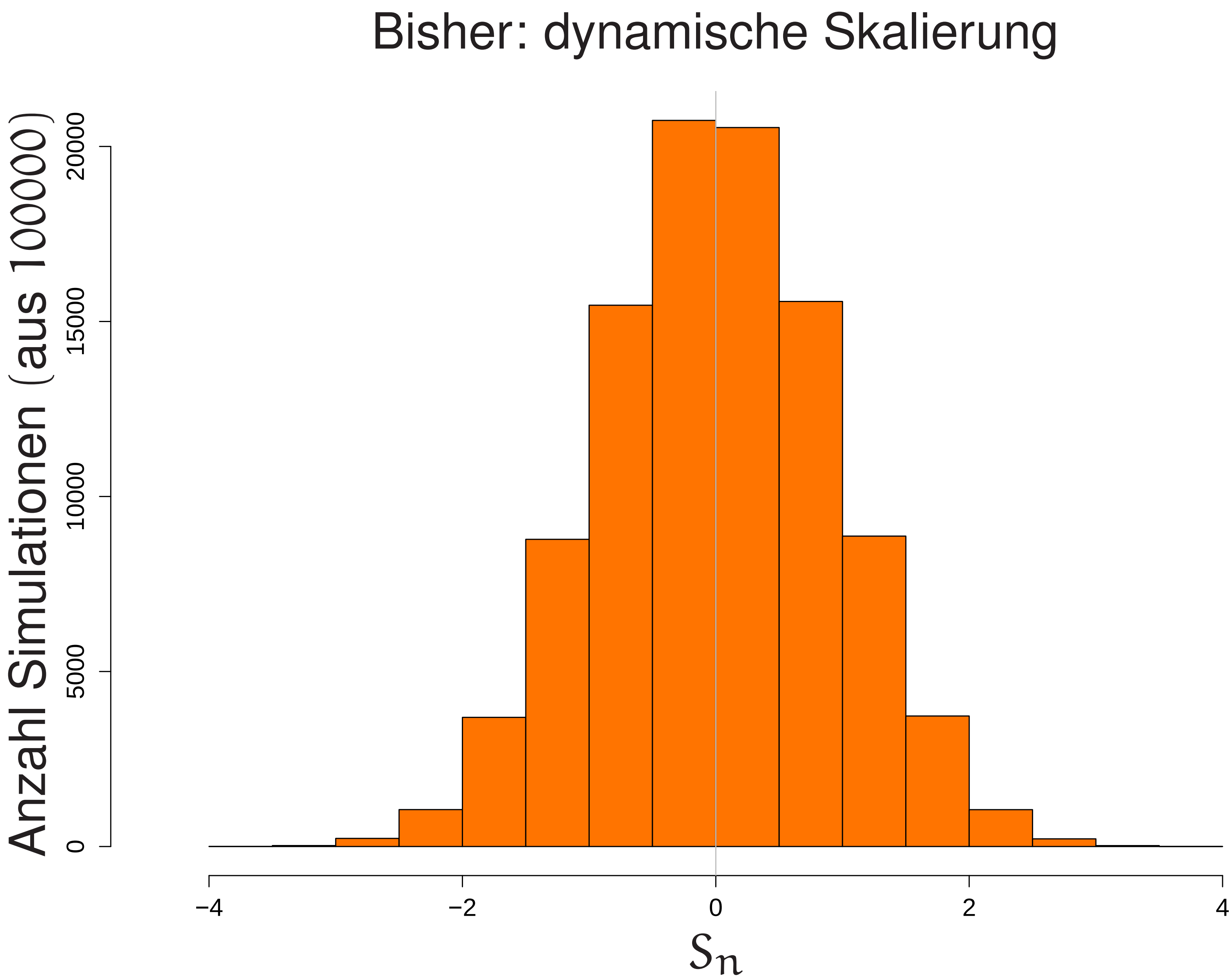
Verteilung von S_n $(n = 7)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

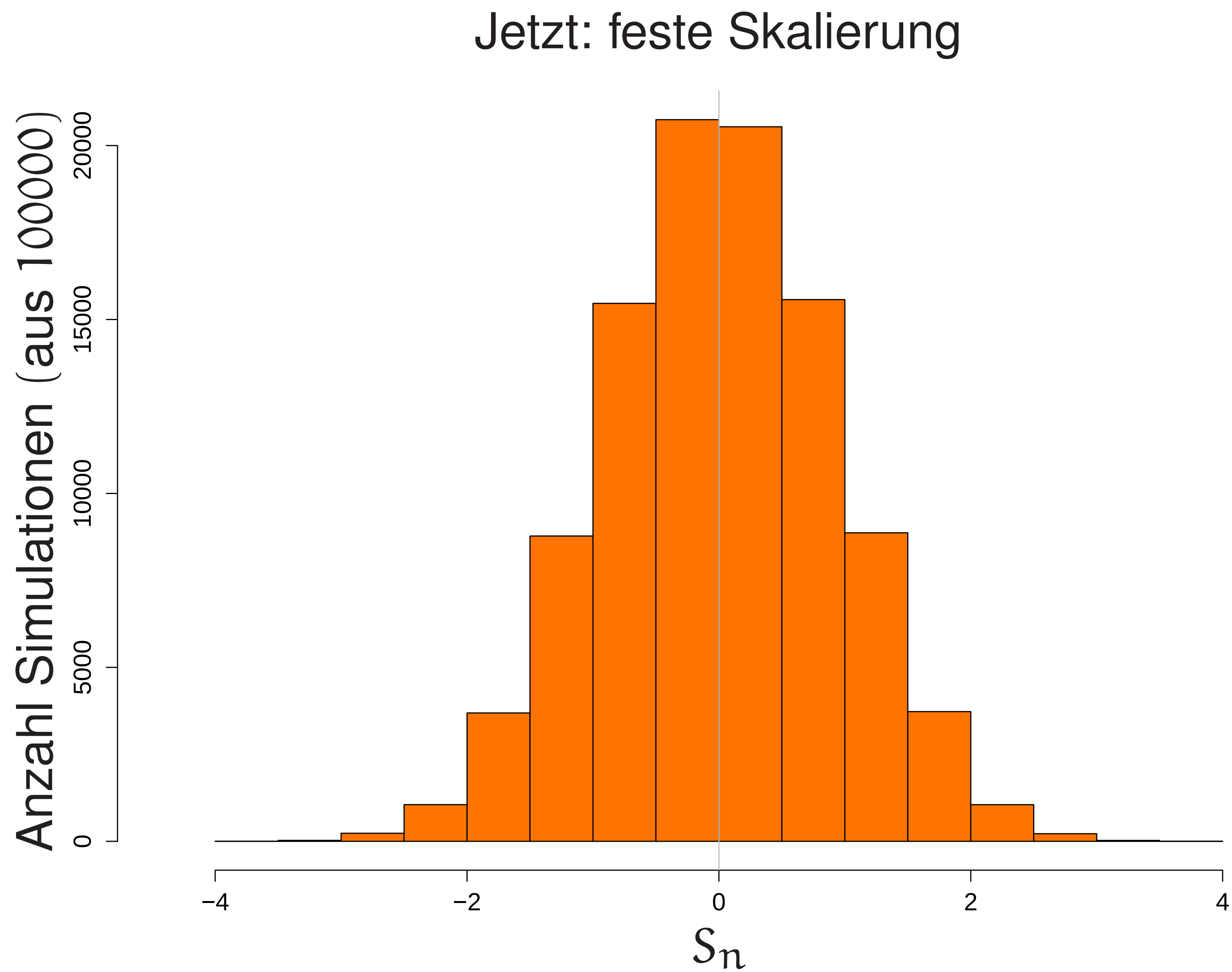

Verteilung von S_n $(n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

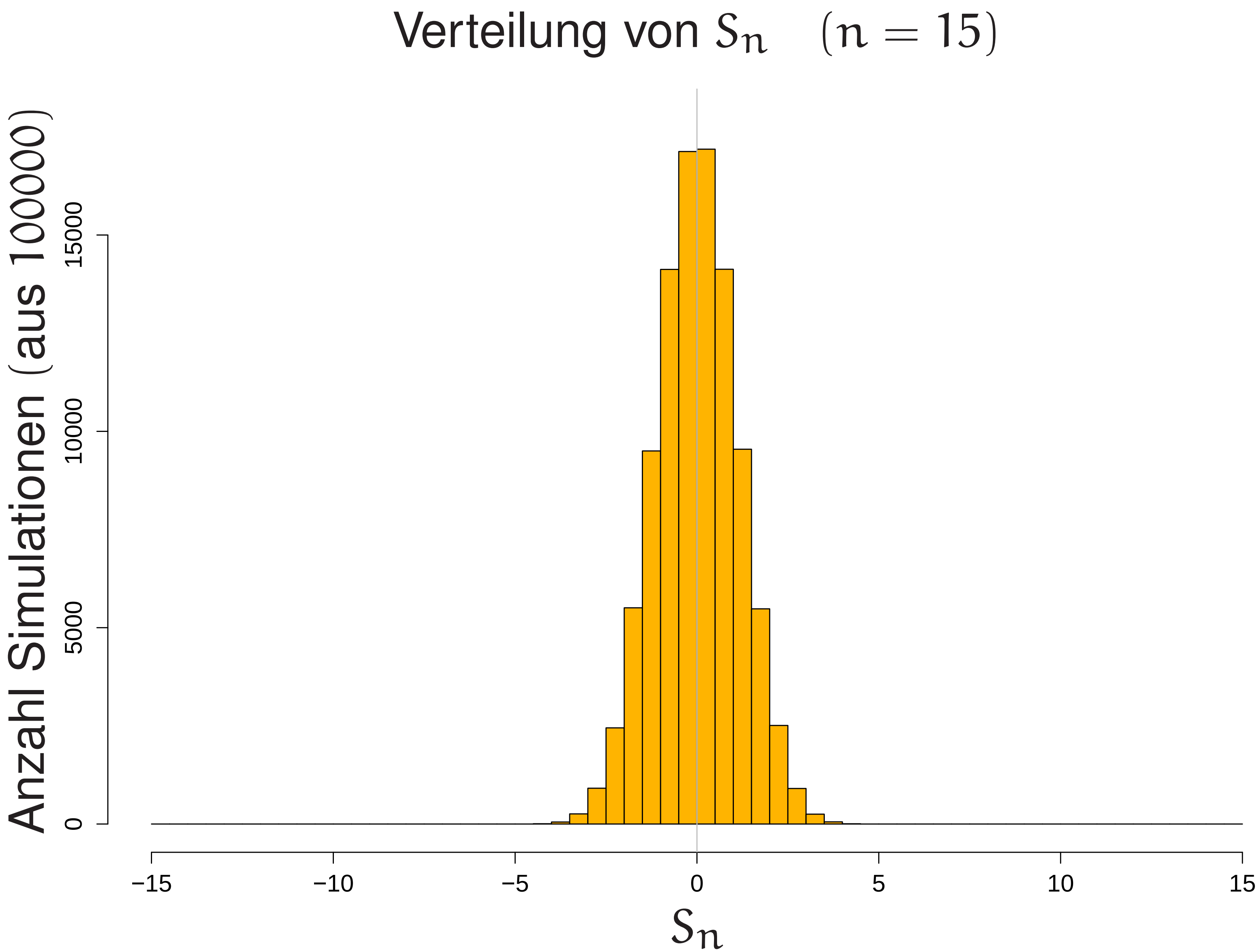


Verteilung von S_n $(n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

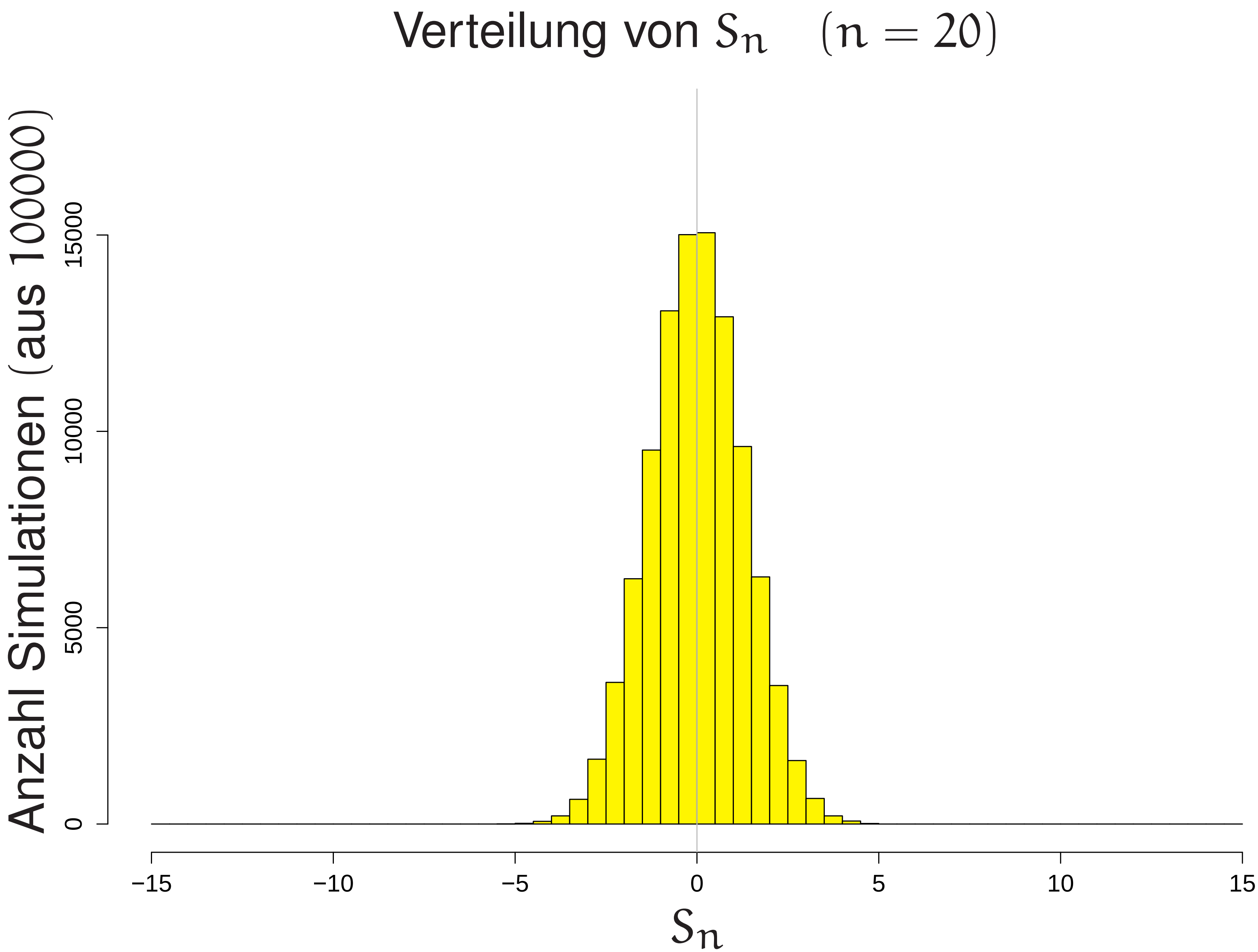

Verteilung von S_n $(n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

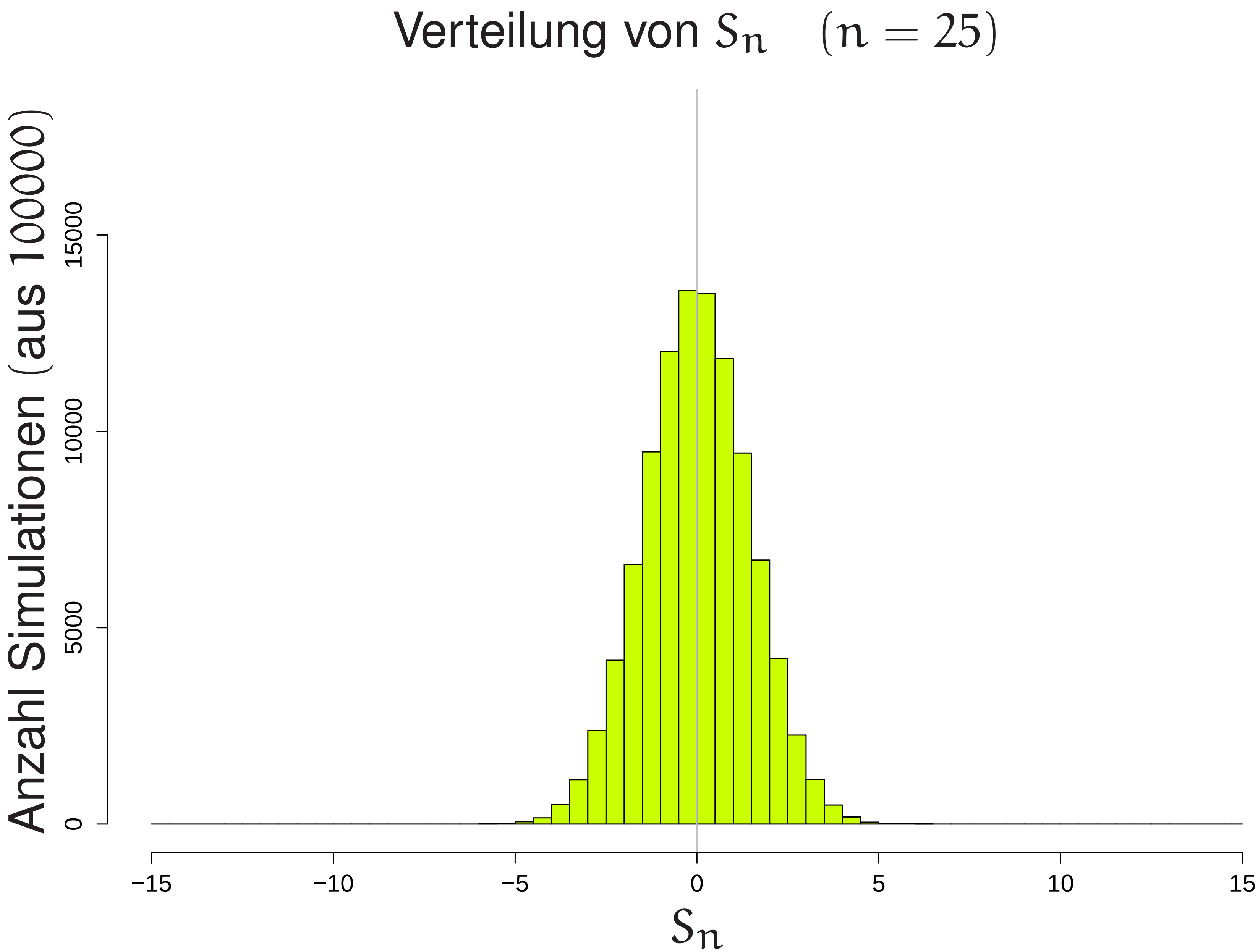

Bisher: dynamische Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n


Jetzt: feste Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

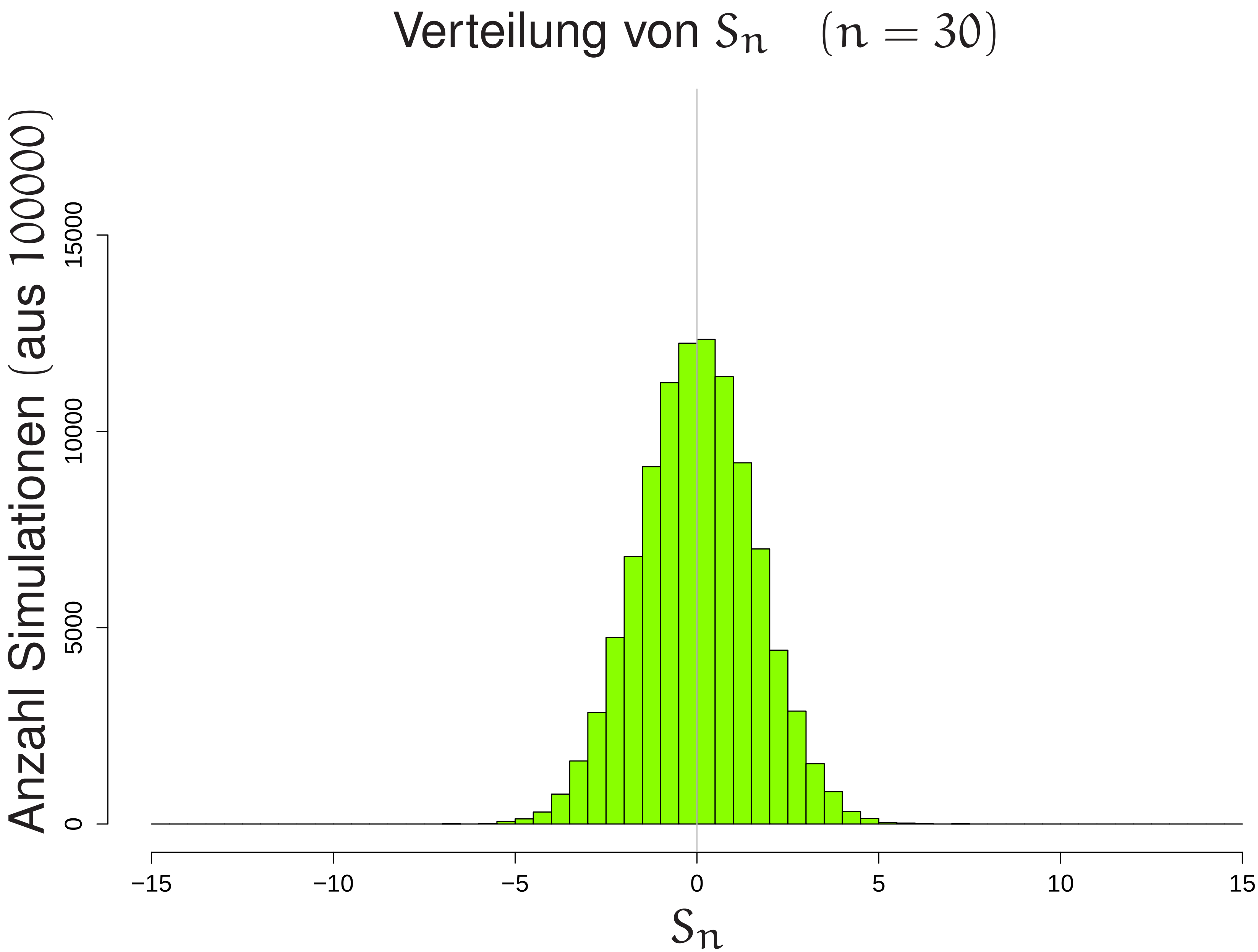


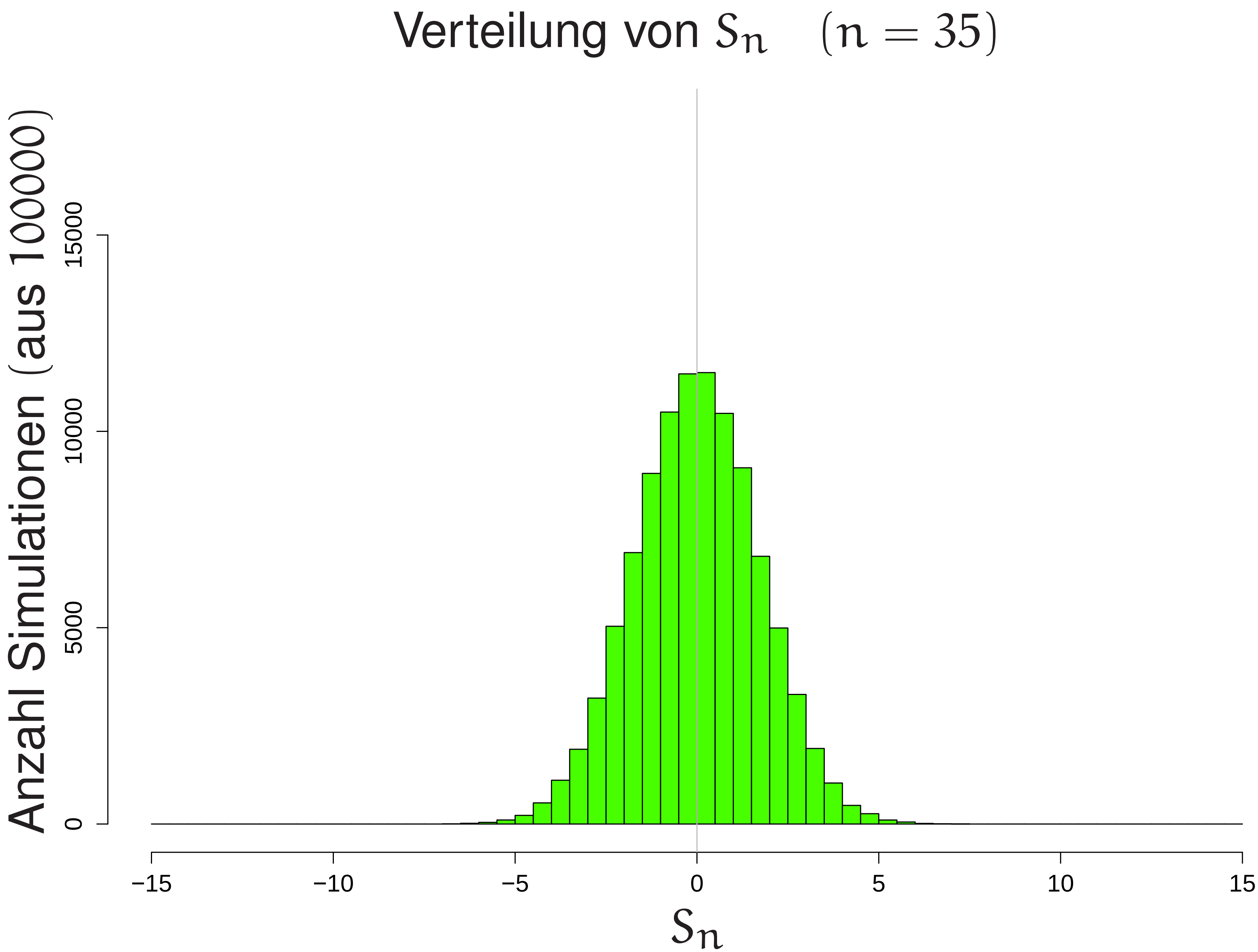
Verteilung von S_n $(n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

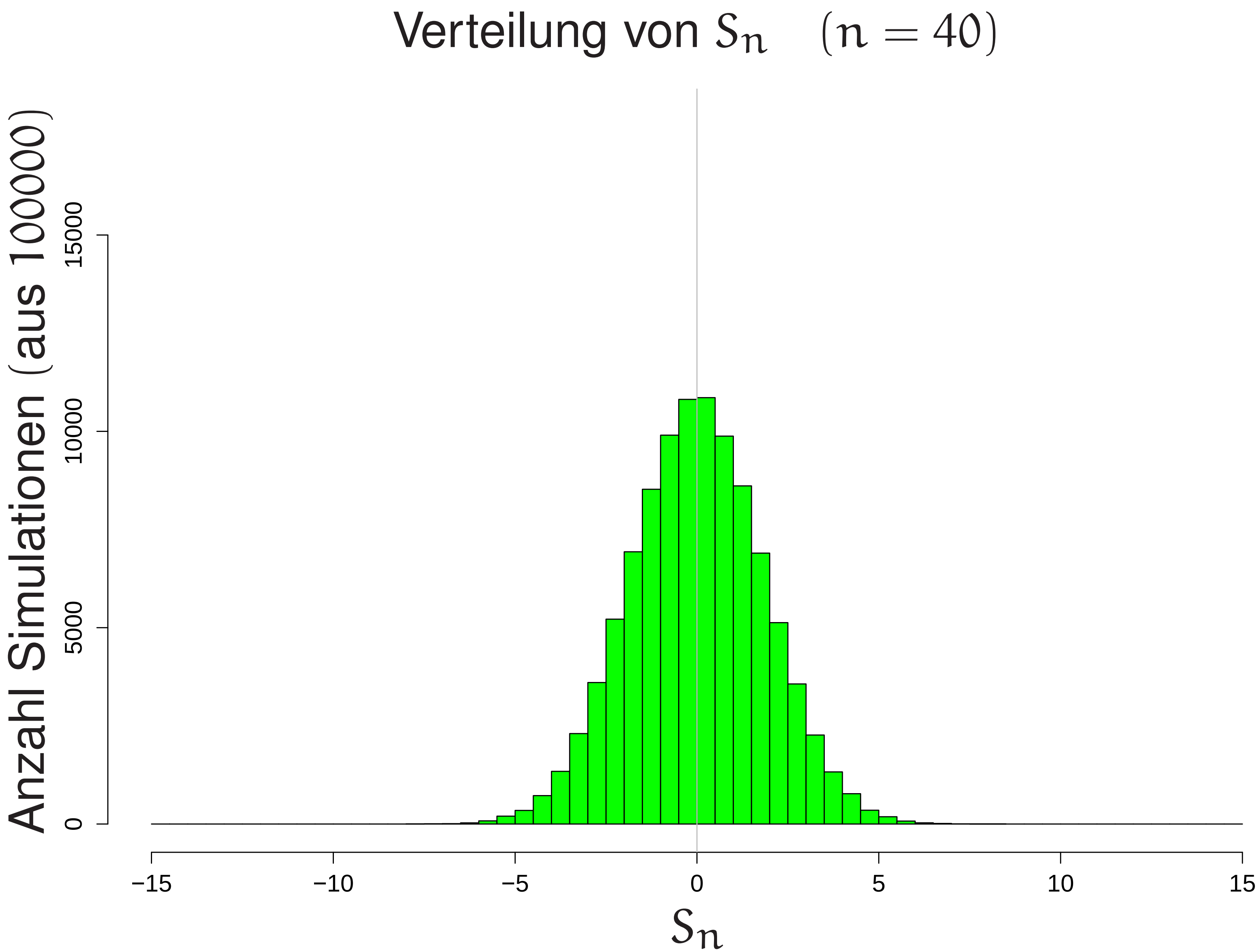


Verteilung von S_n $(n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

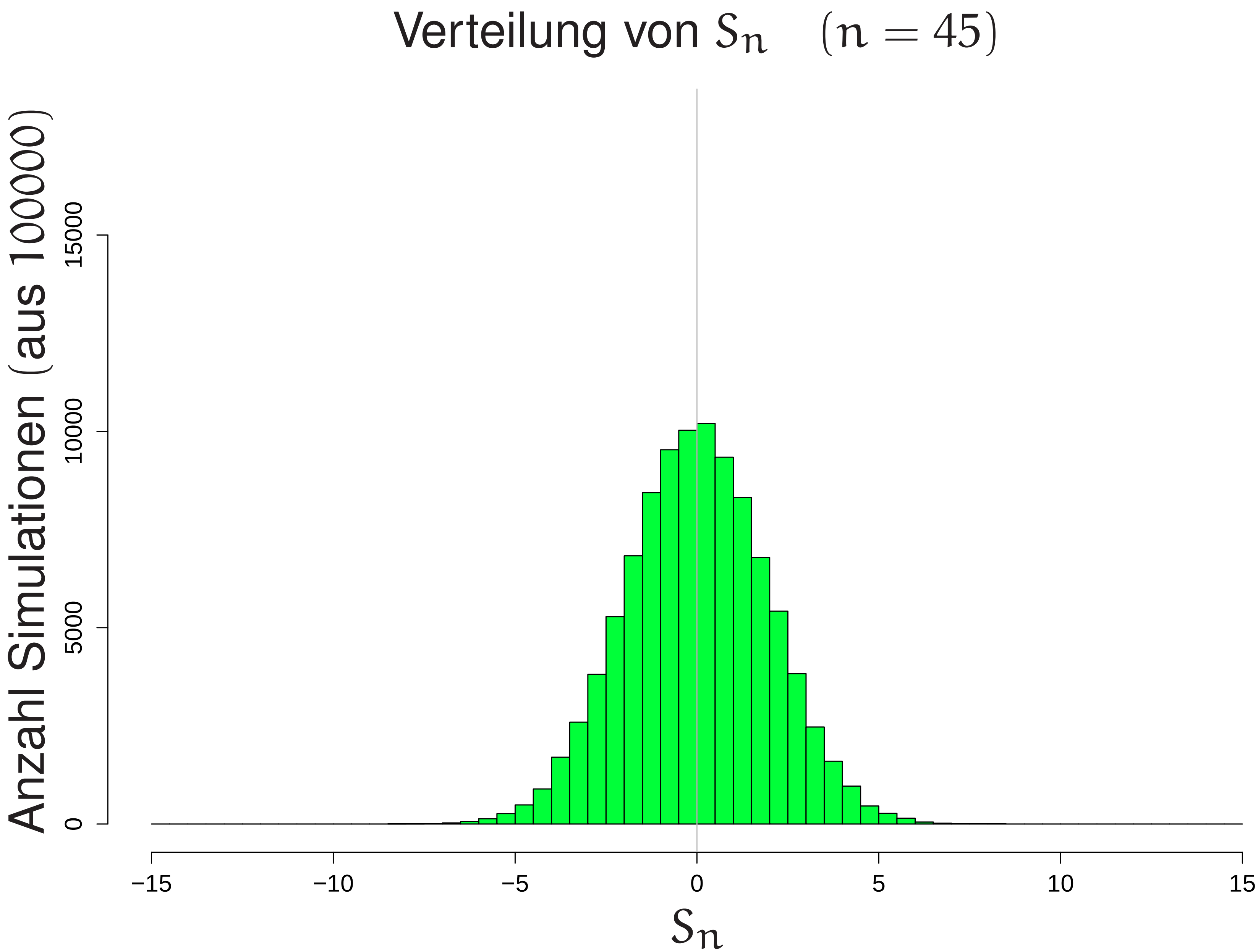

Verteilung von S_n $(n = 30)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



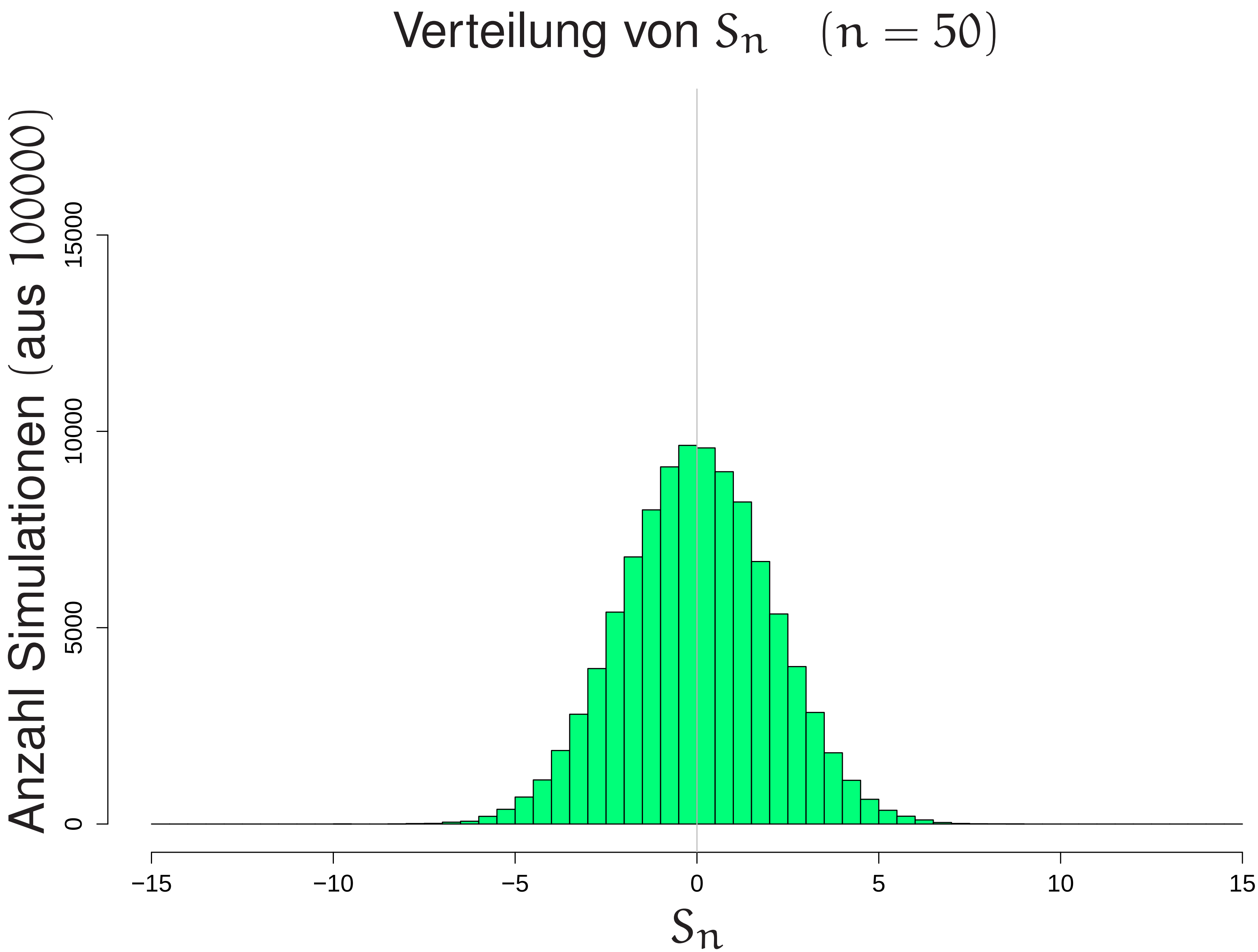
Verteilung von S_n $(n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



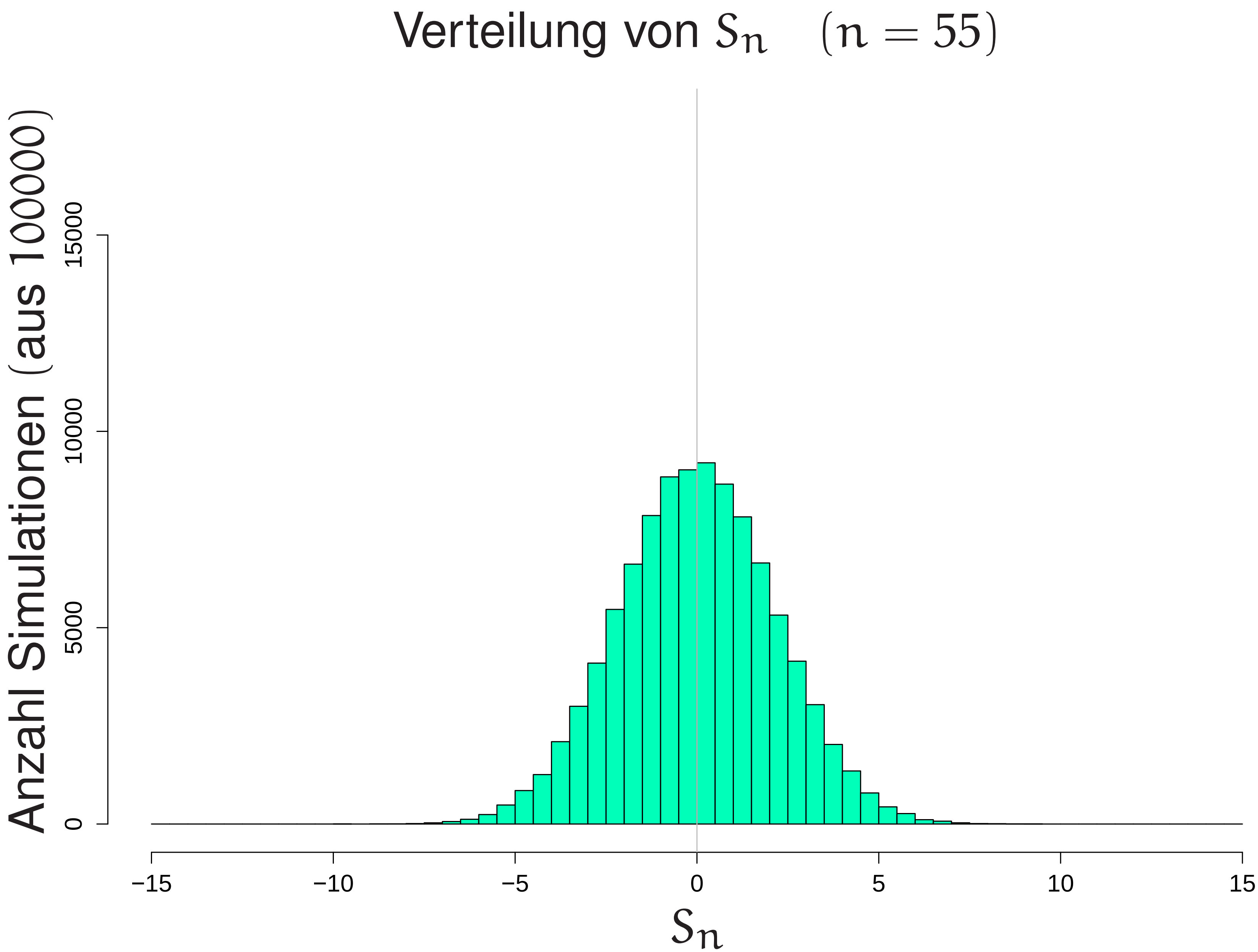
Verteilung von S_n $(n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



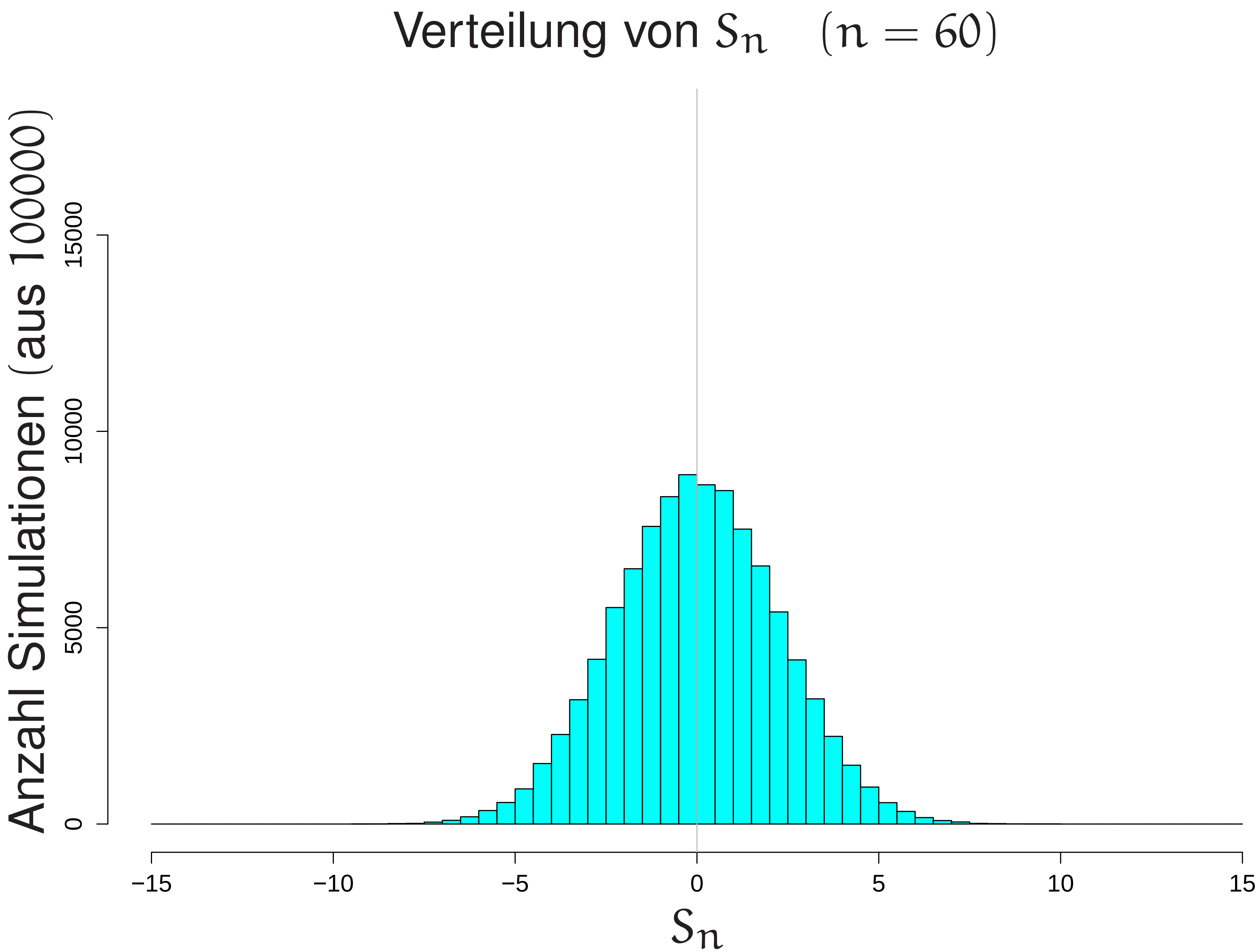
Verteilung von S_n $(n = 45)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



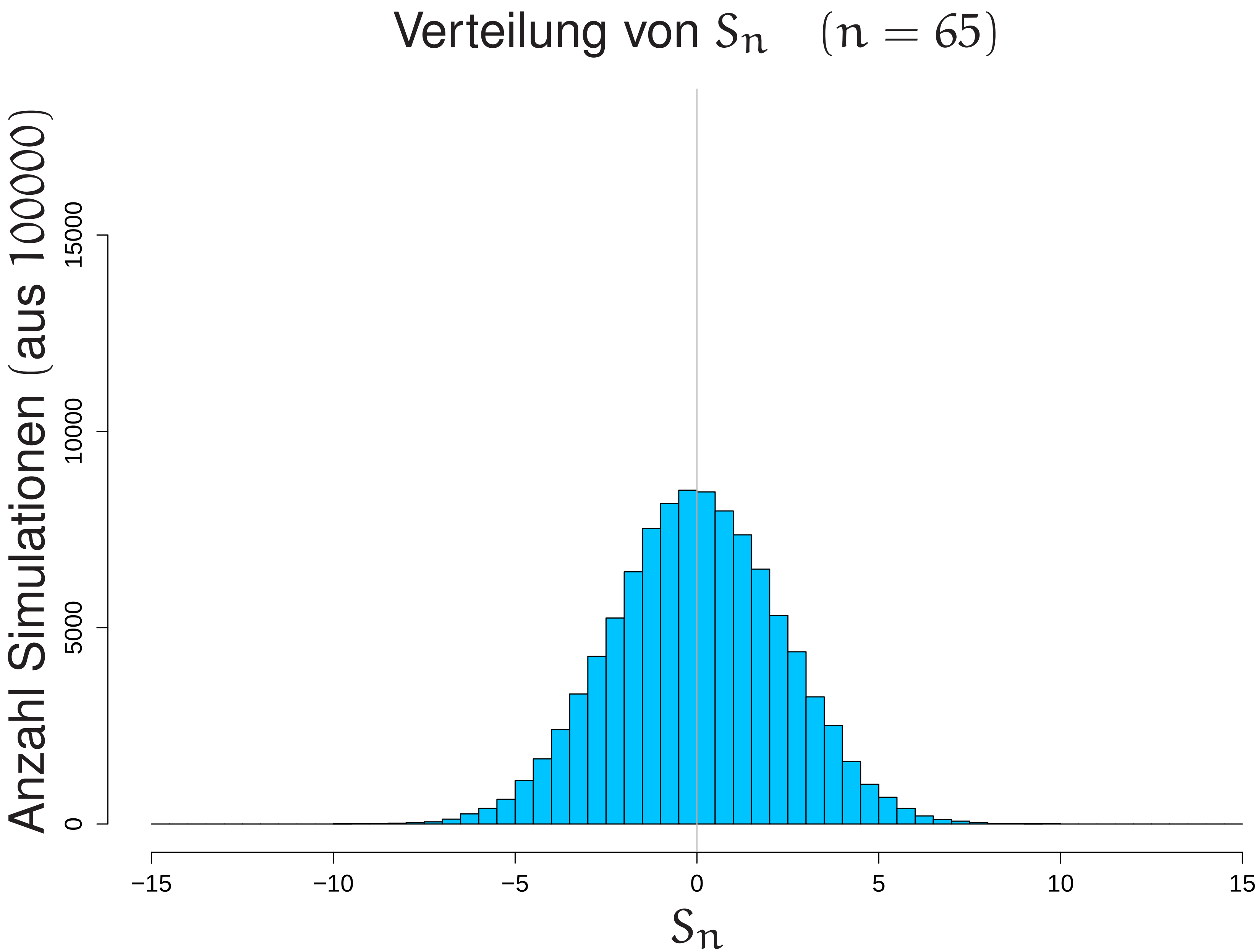
Verteilung von S_n $(n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

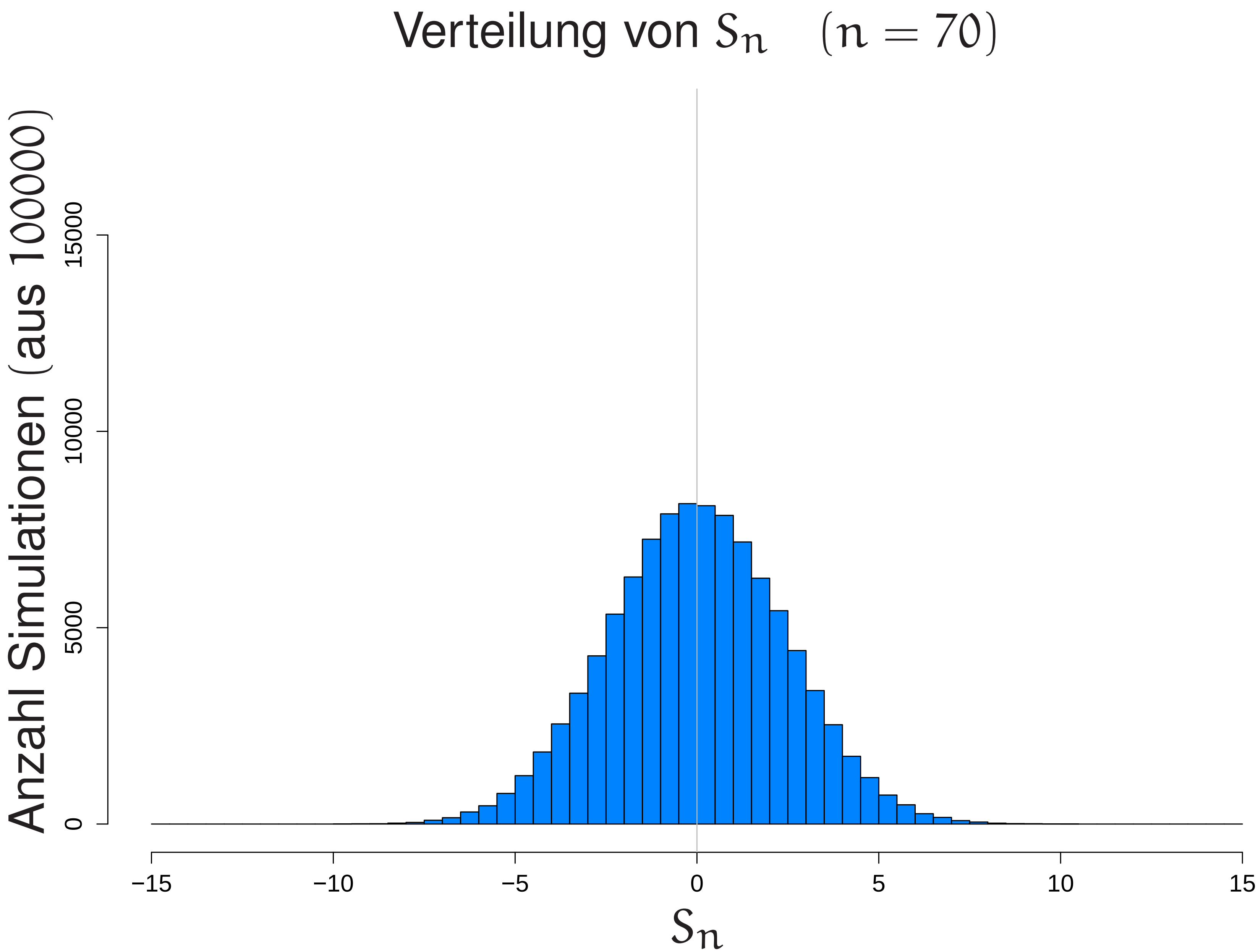


Verteilung von S_n $(n = 55)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

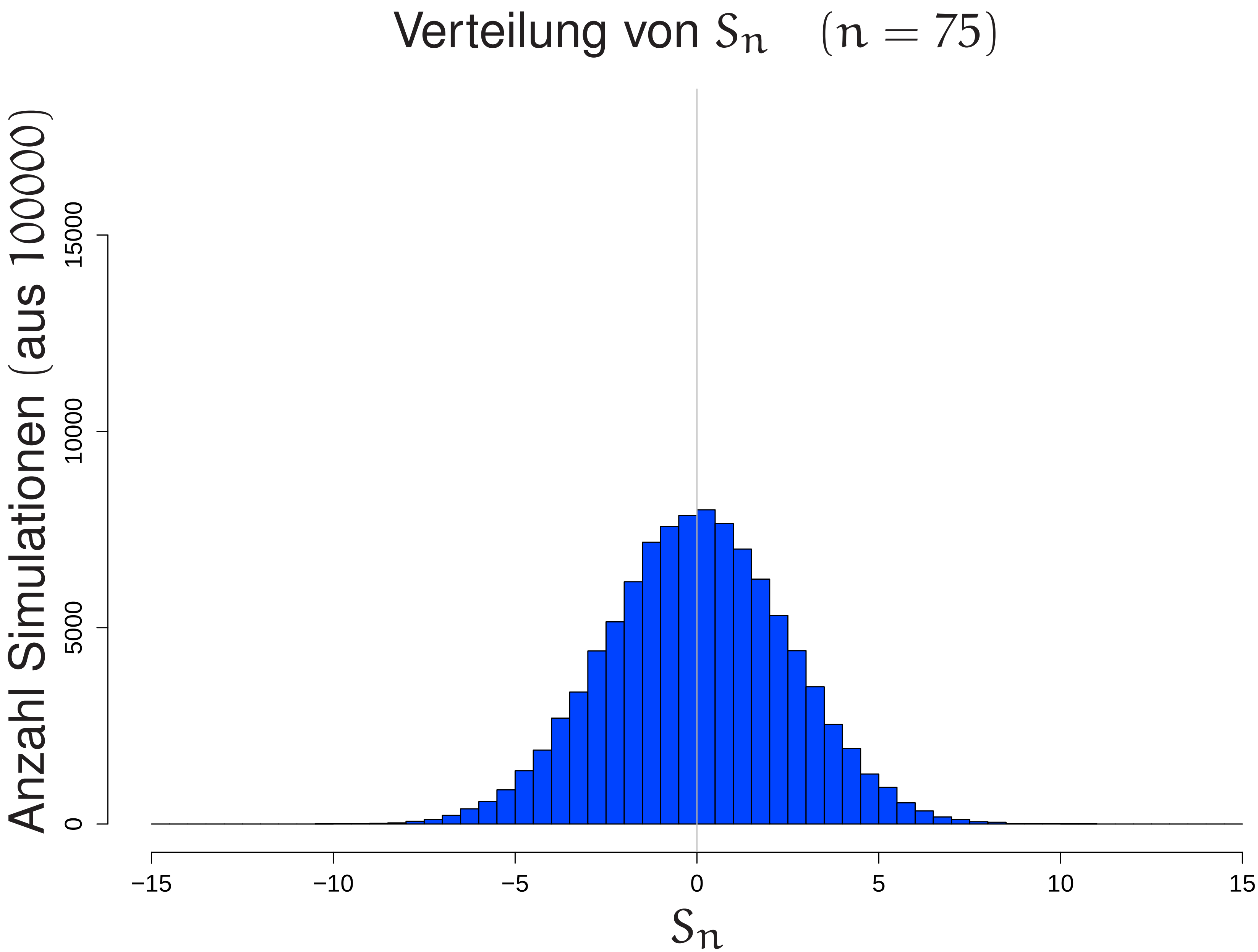


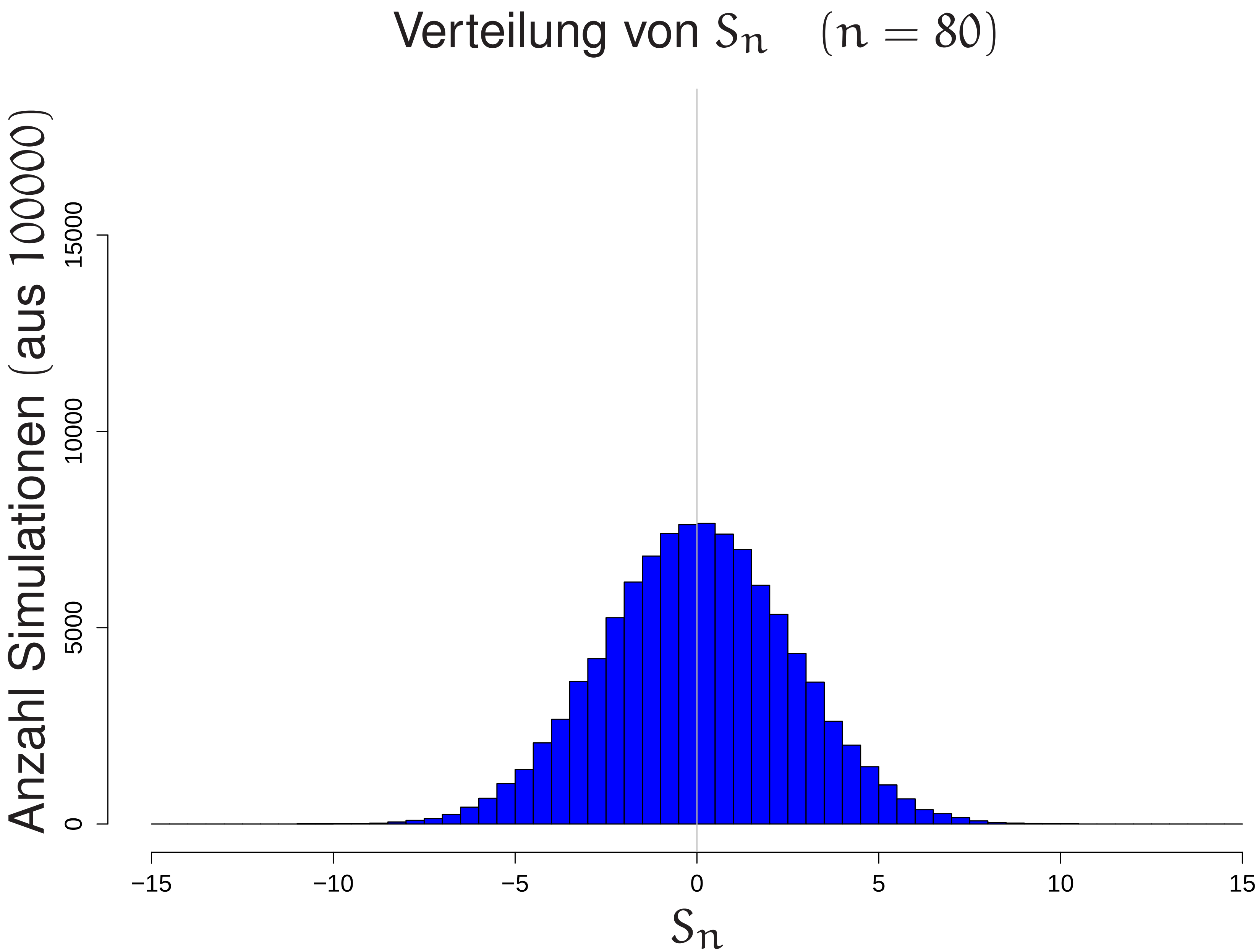
Verteilung von S_n $(n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

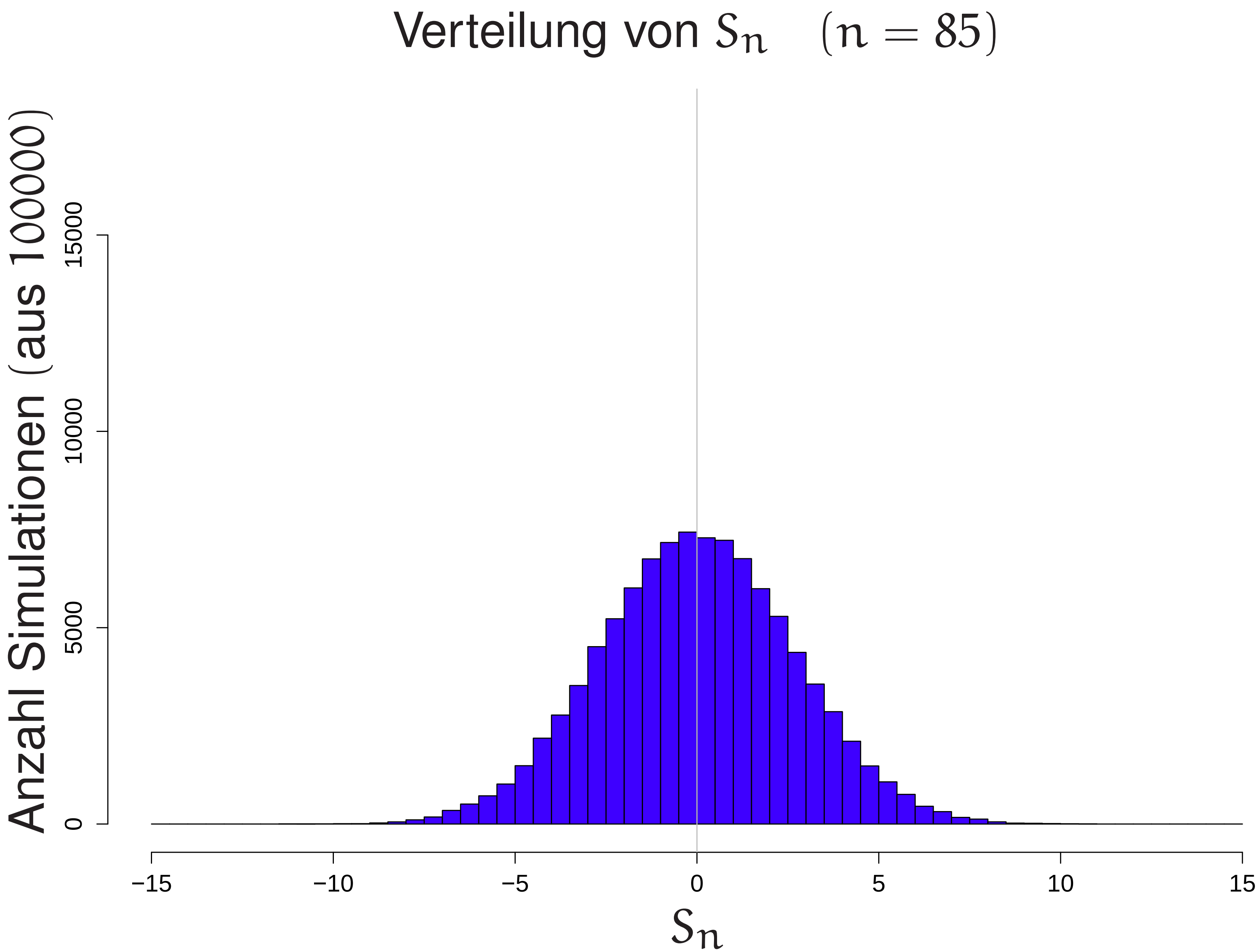

Verteilung von S_n $(n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

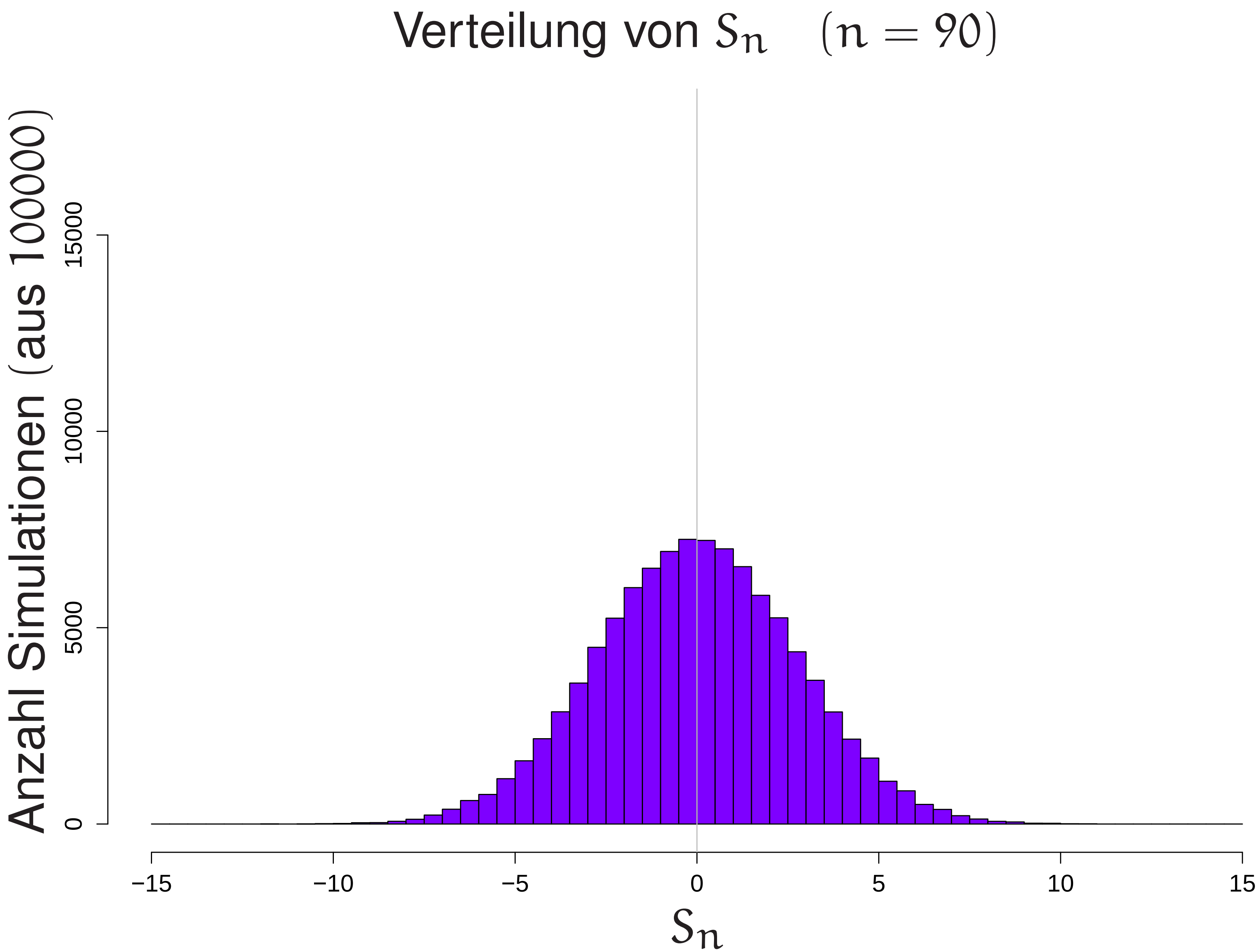


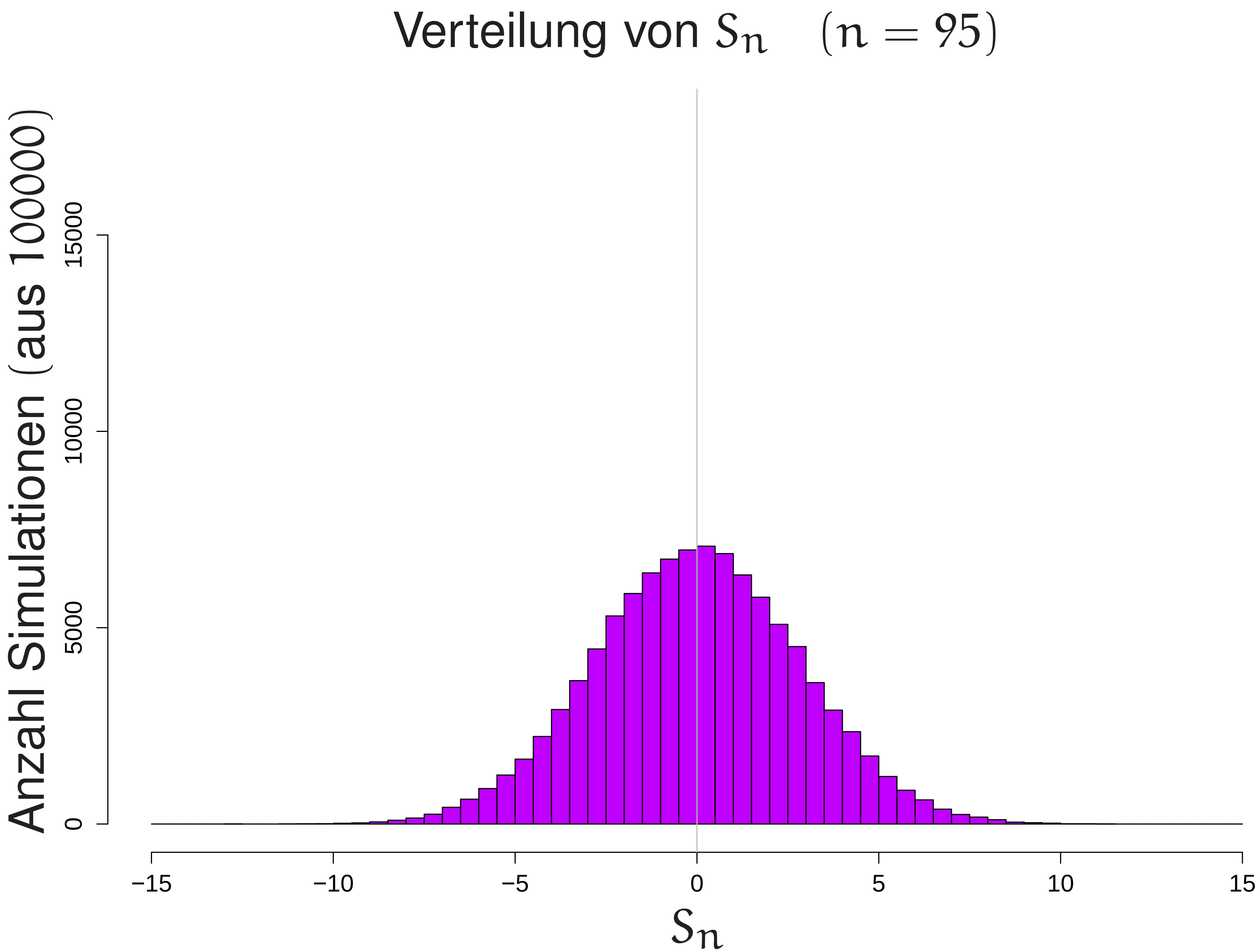
Verteilung von S_n $(n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 75)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

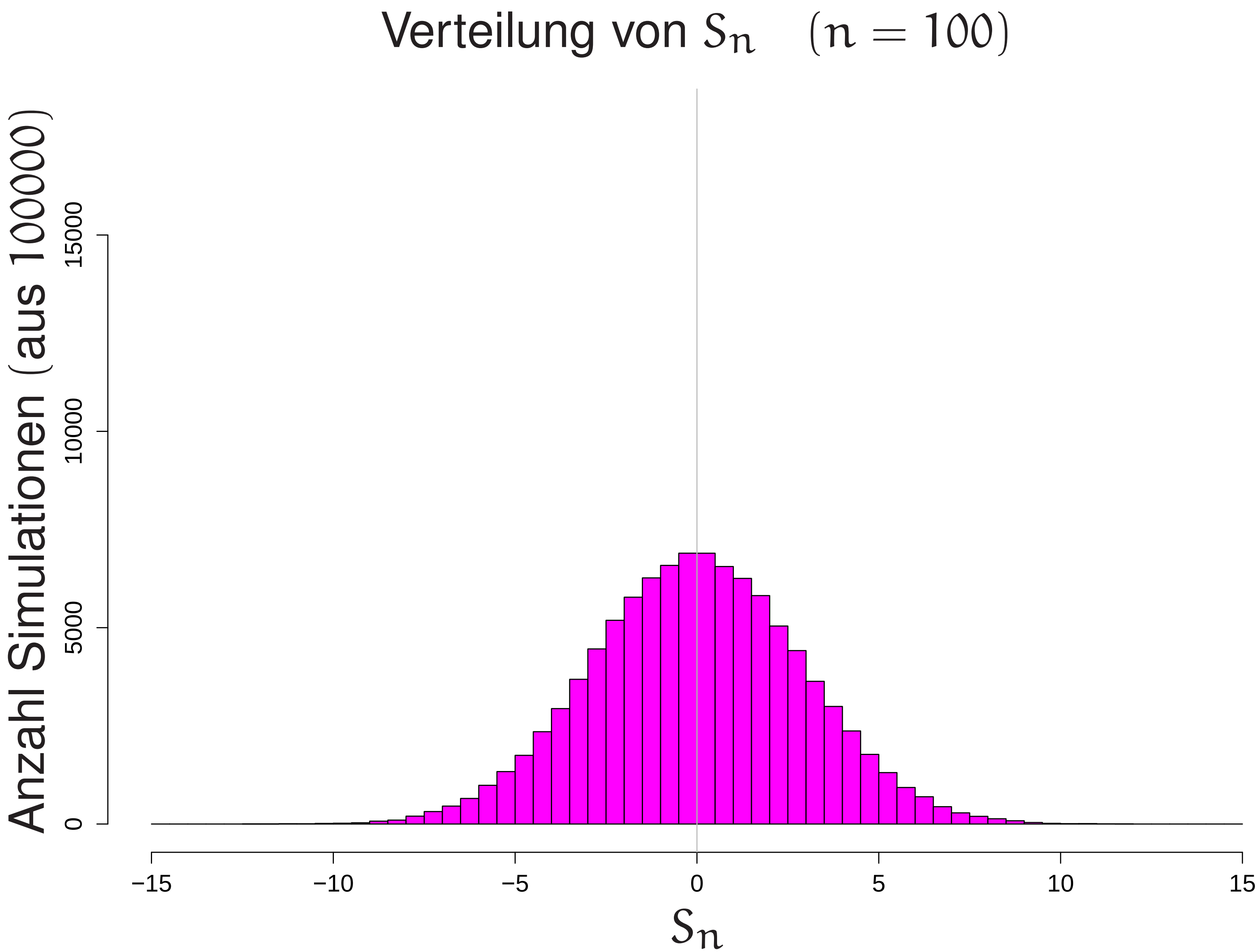

Verteilung von S_n $(n = 80)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

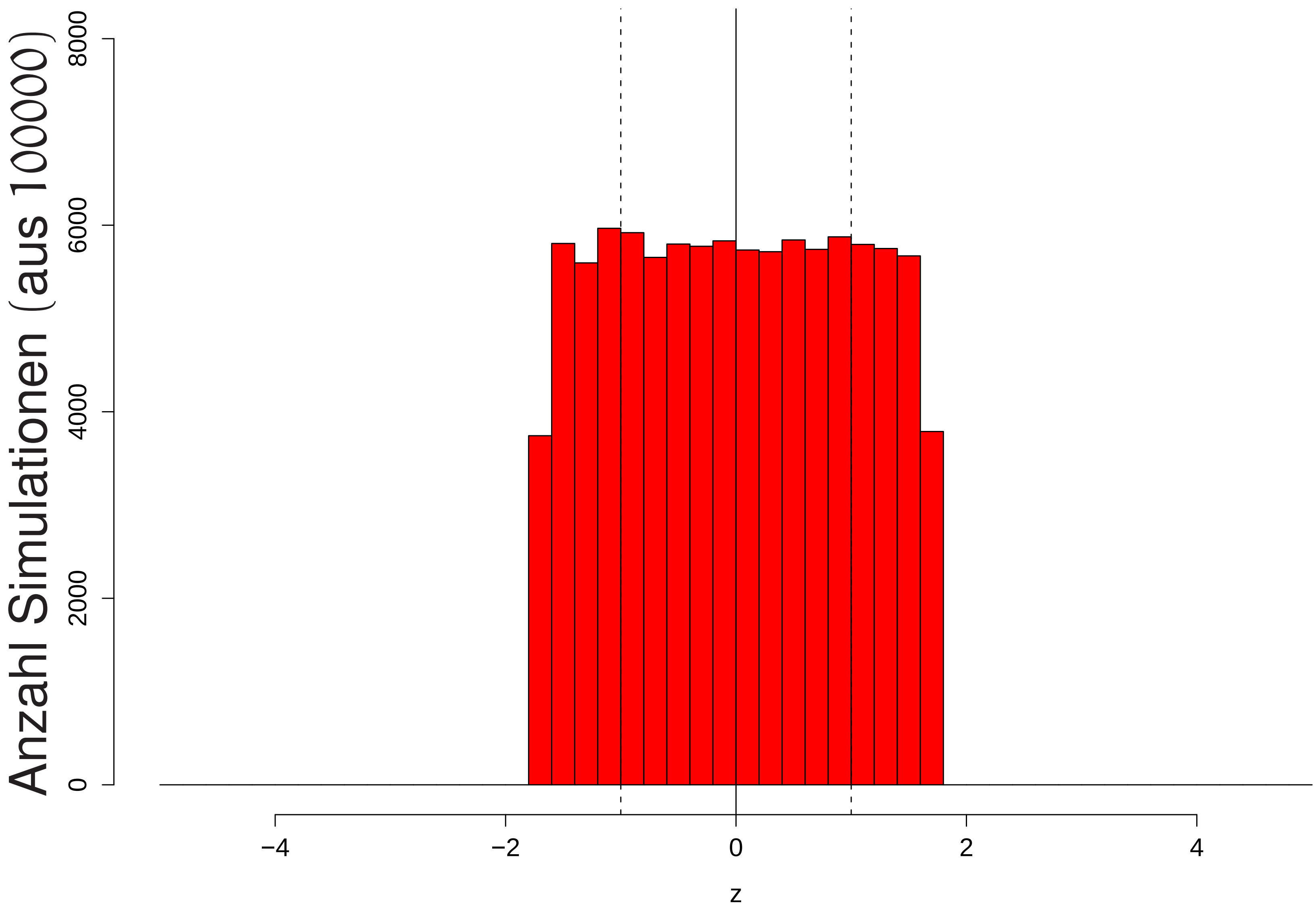

Verteilung von S_n $(n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

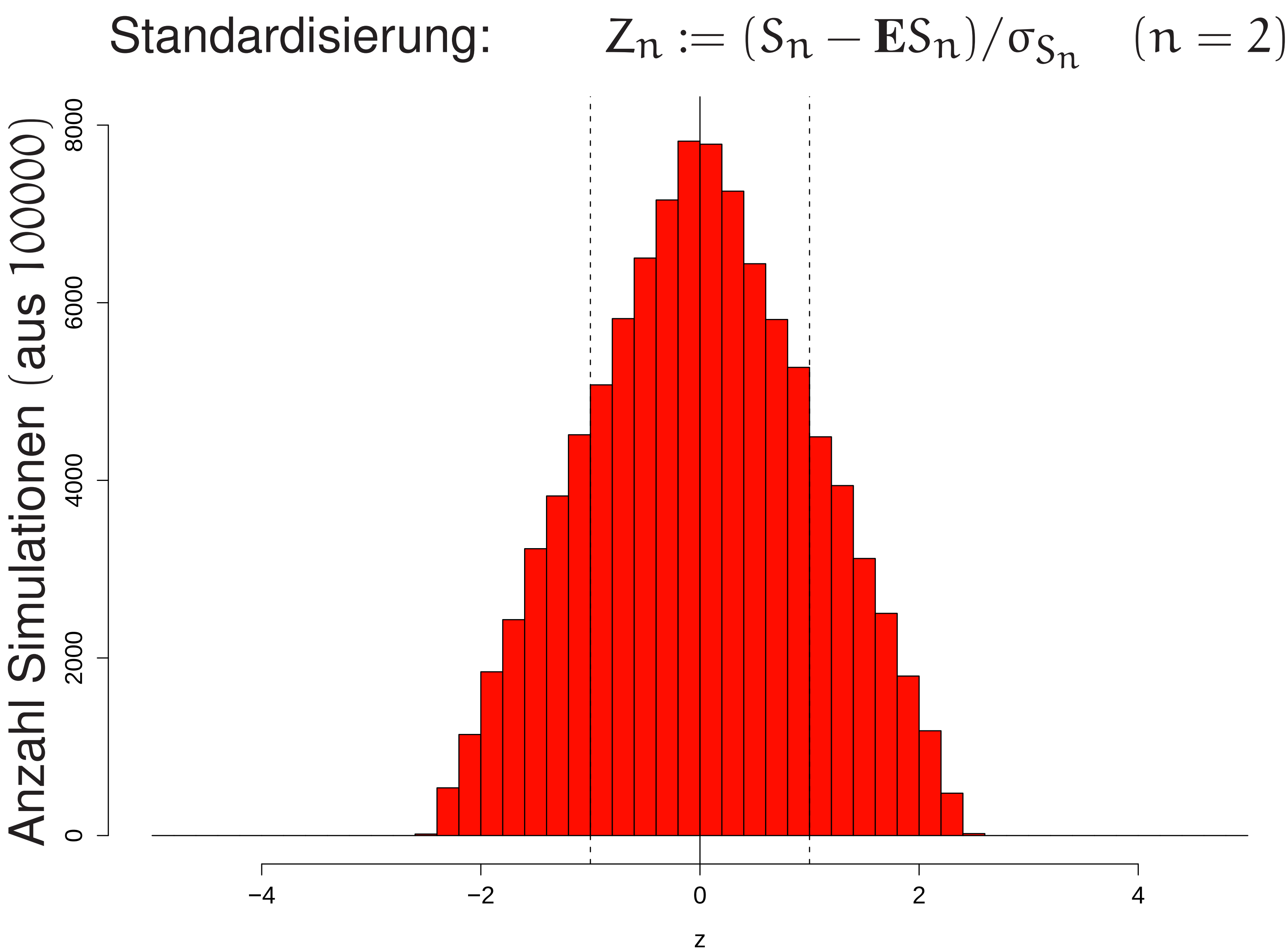


Verteilung von S_n $(n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

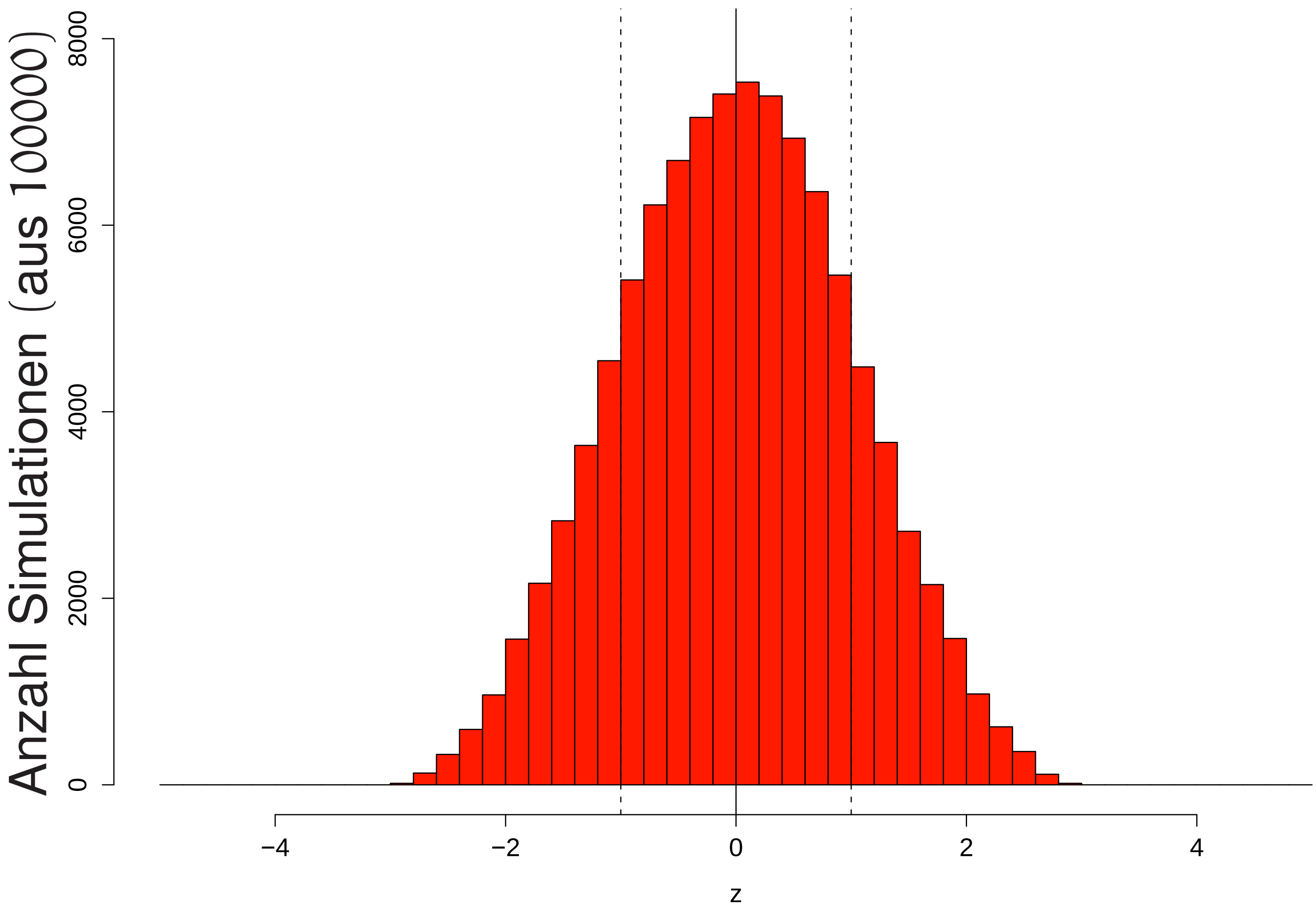
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$

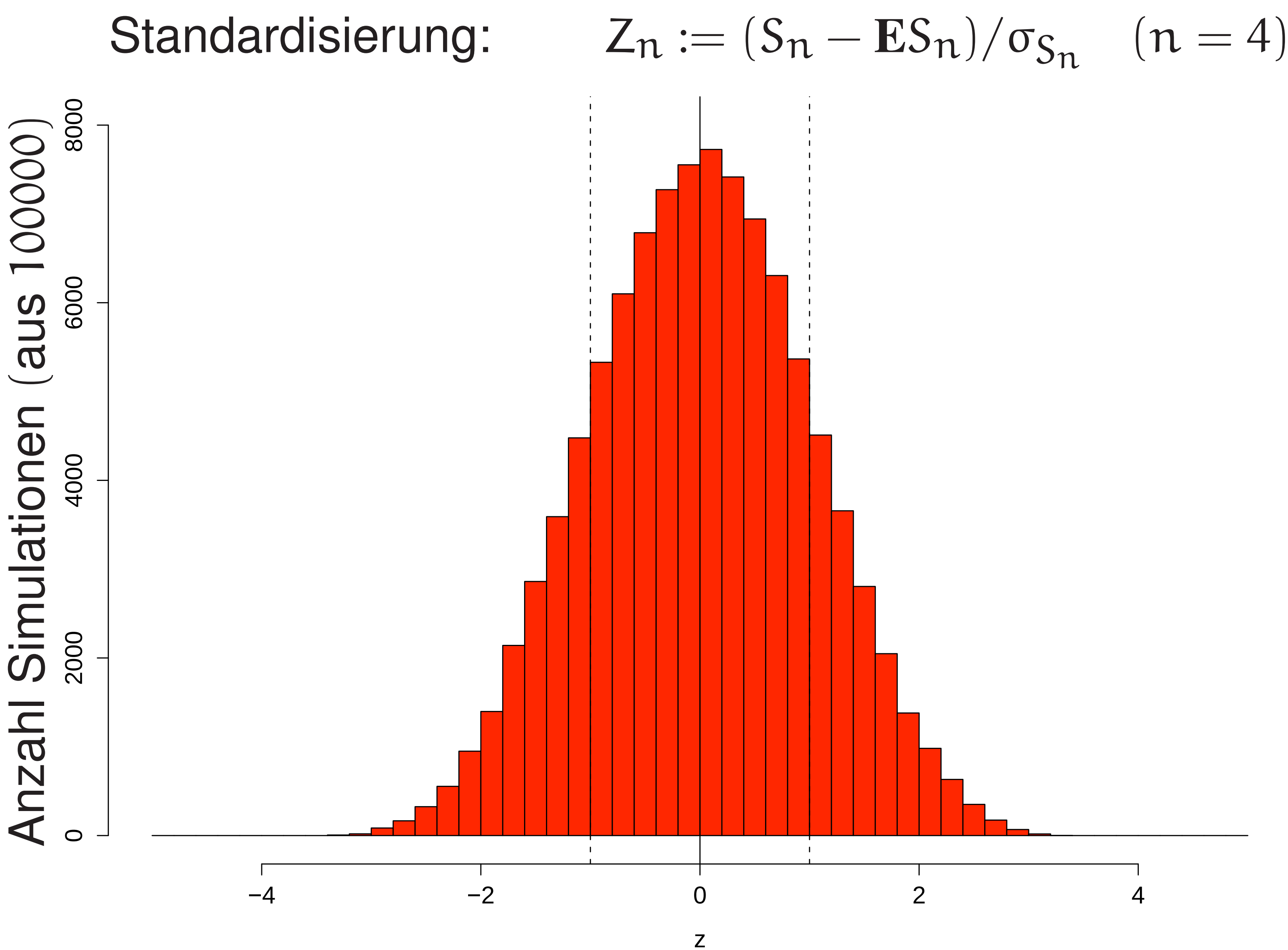




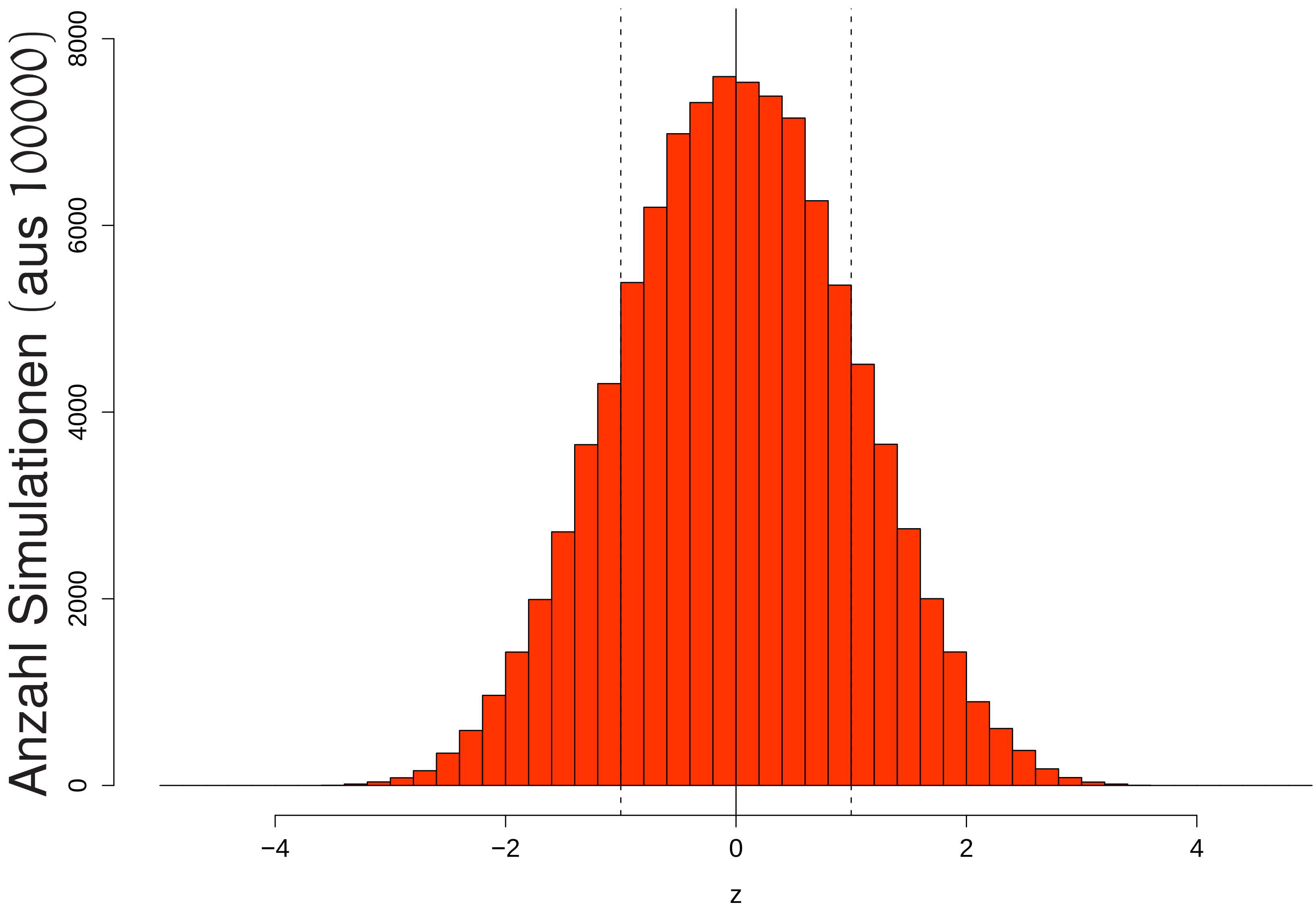
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

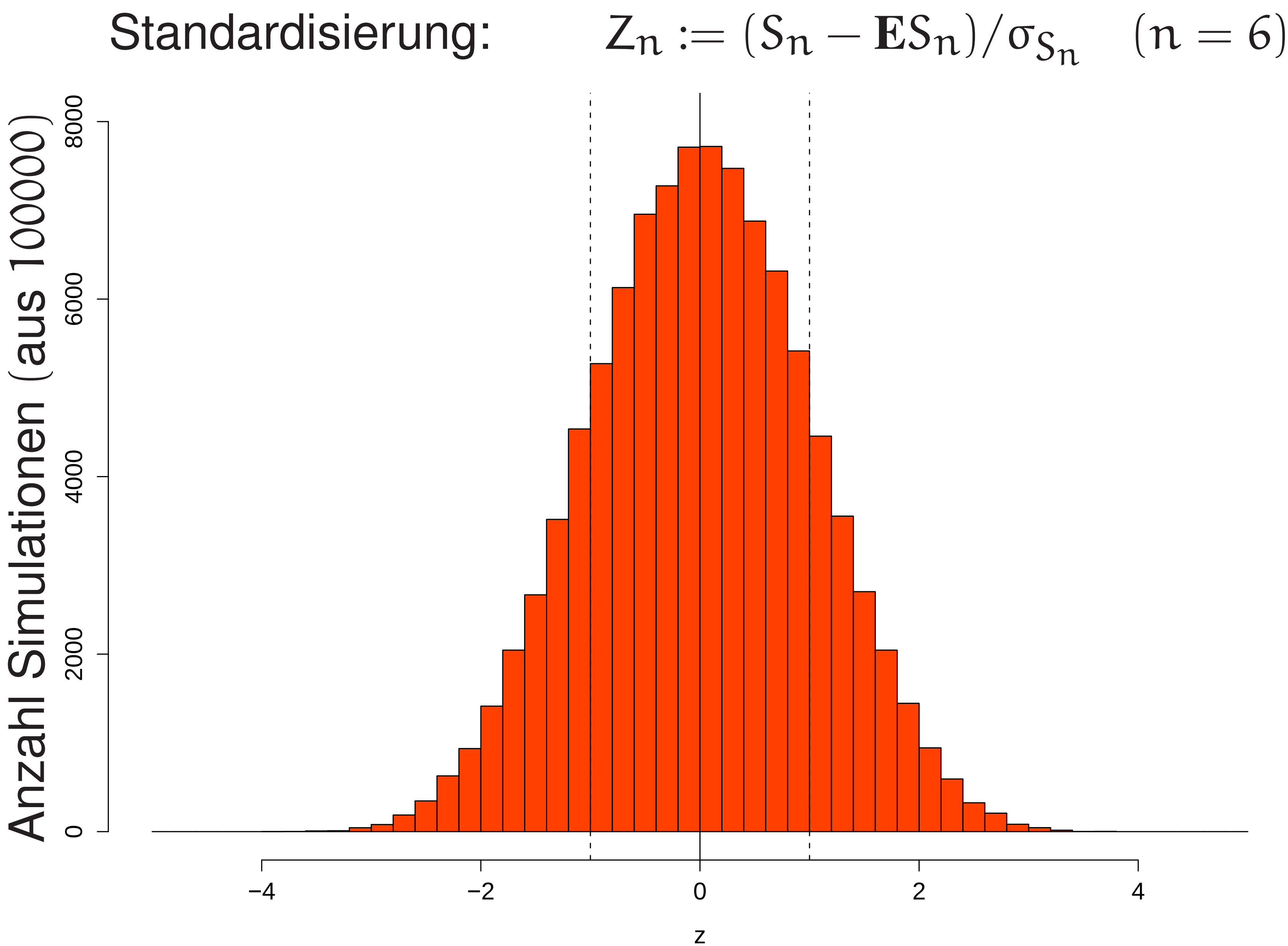
Standardisierung: $\quad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$



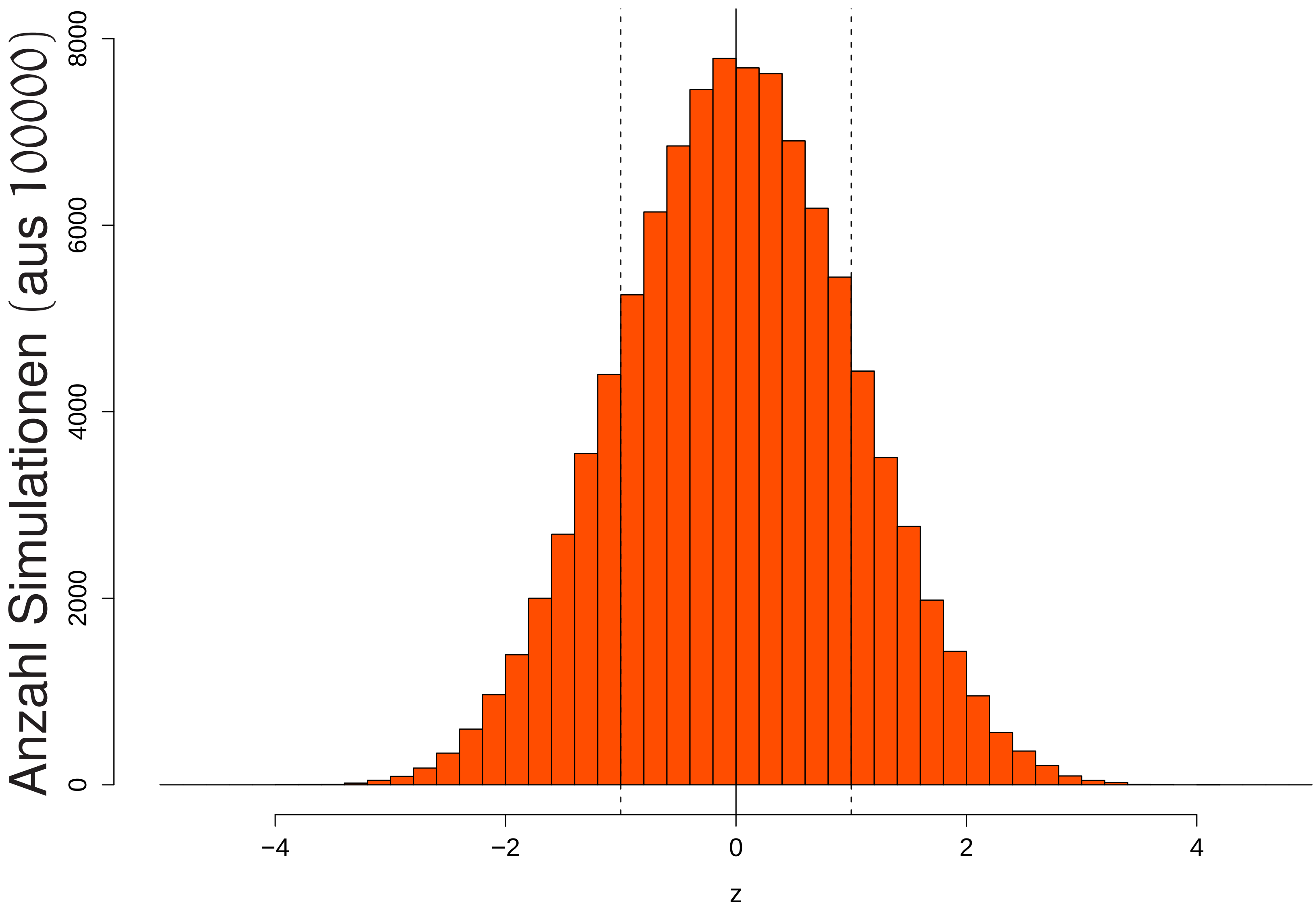

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

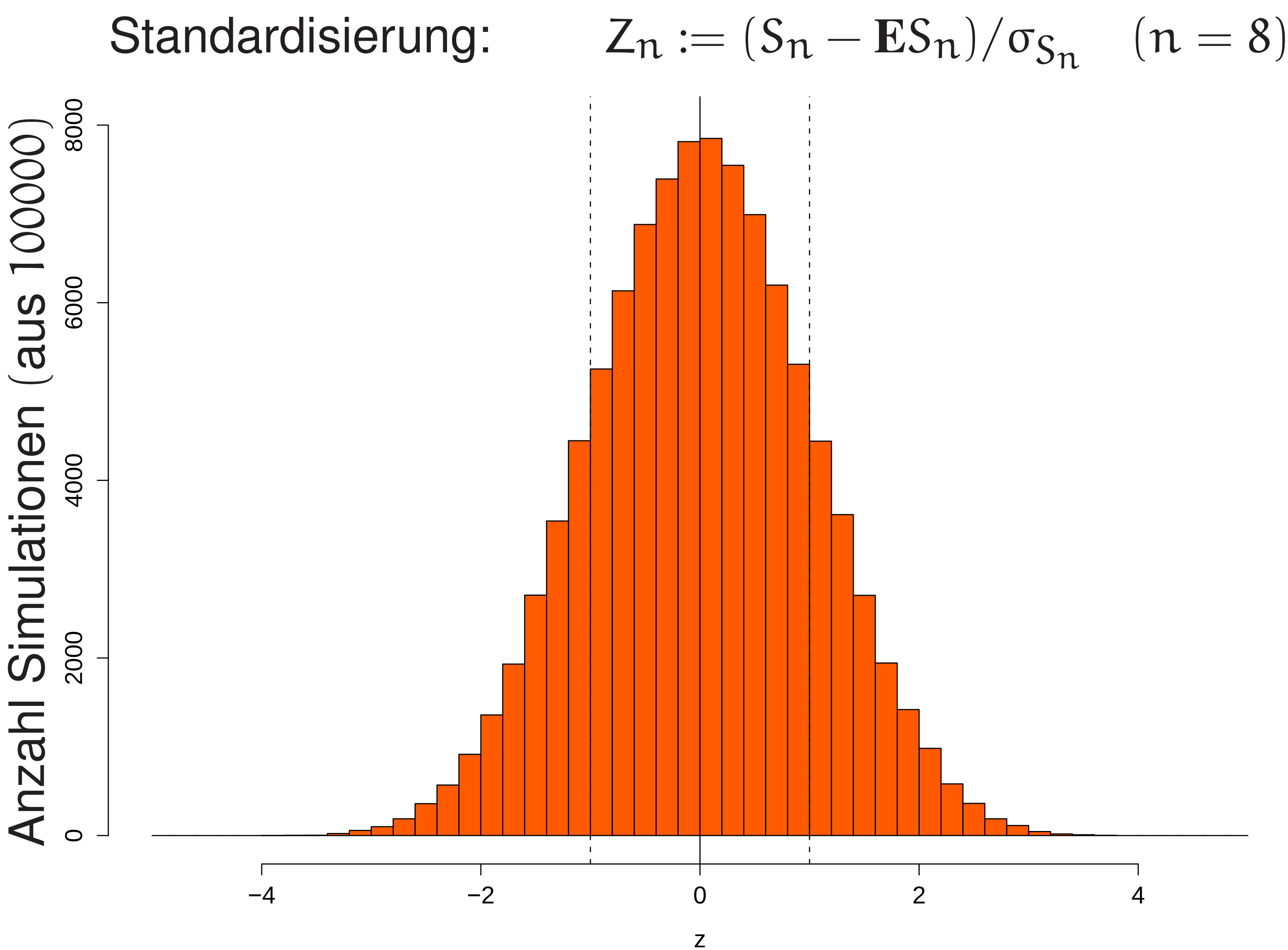
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 5)$




Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

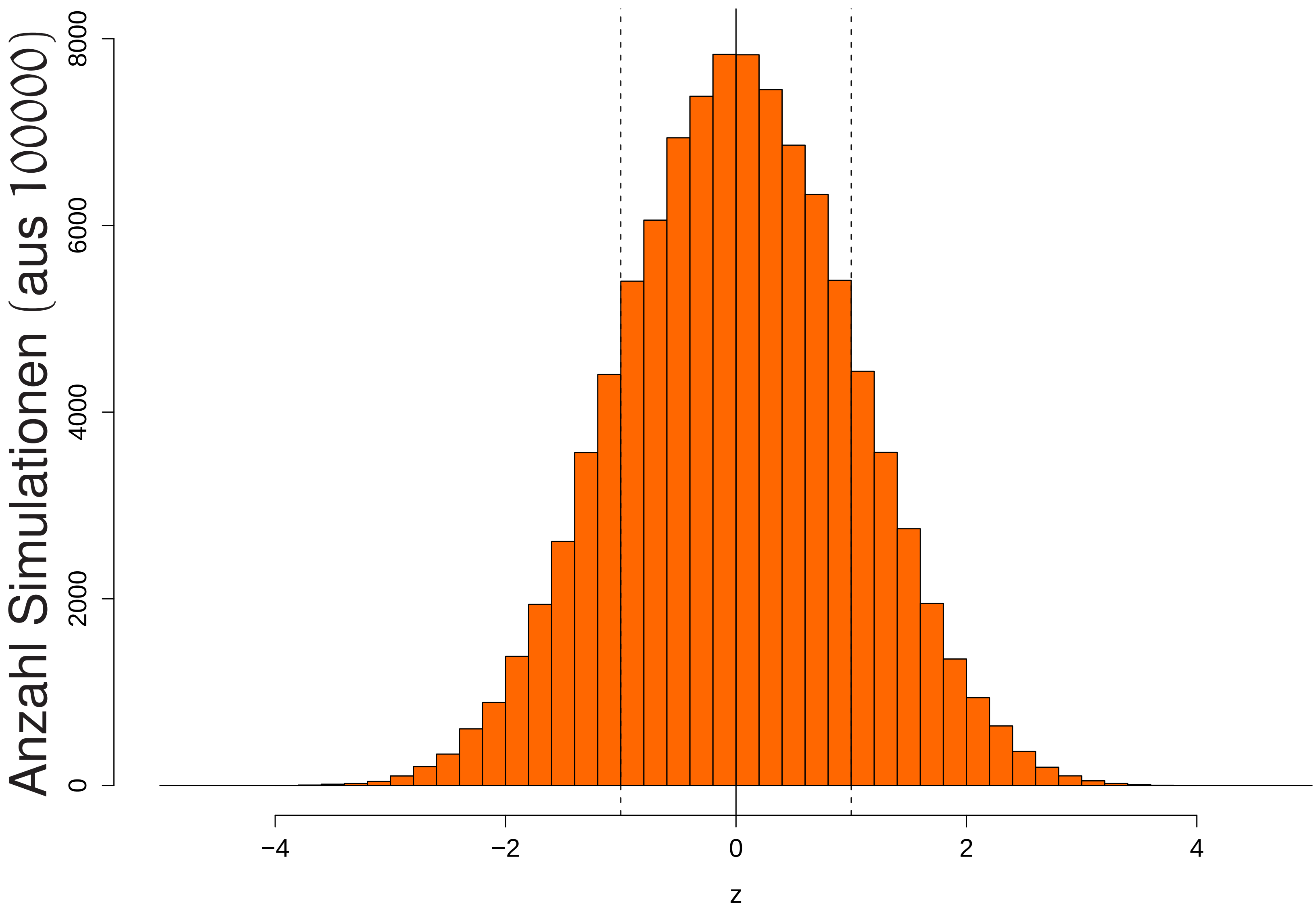
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 7)$



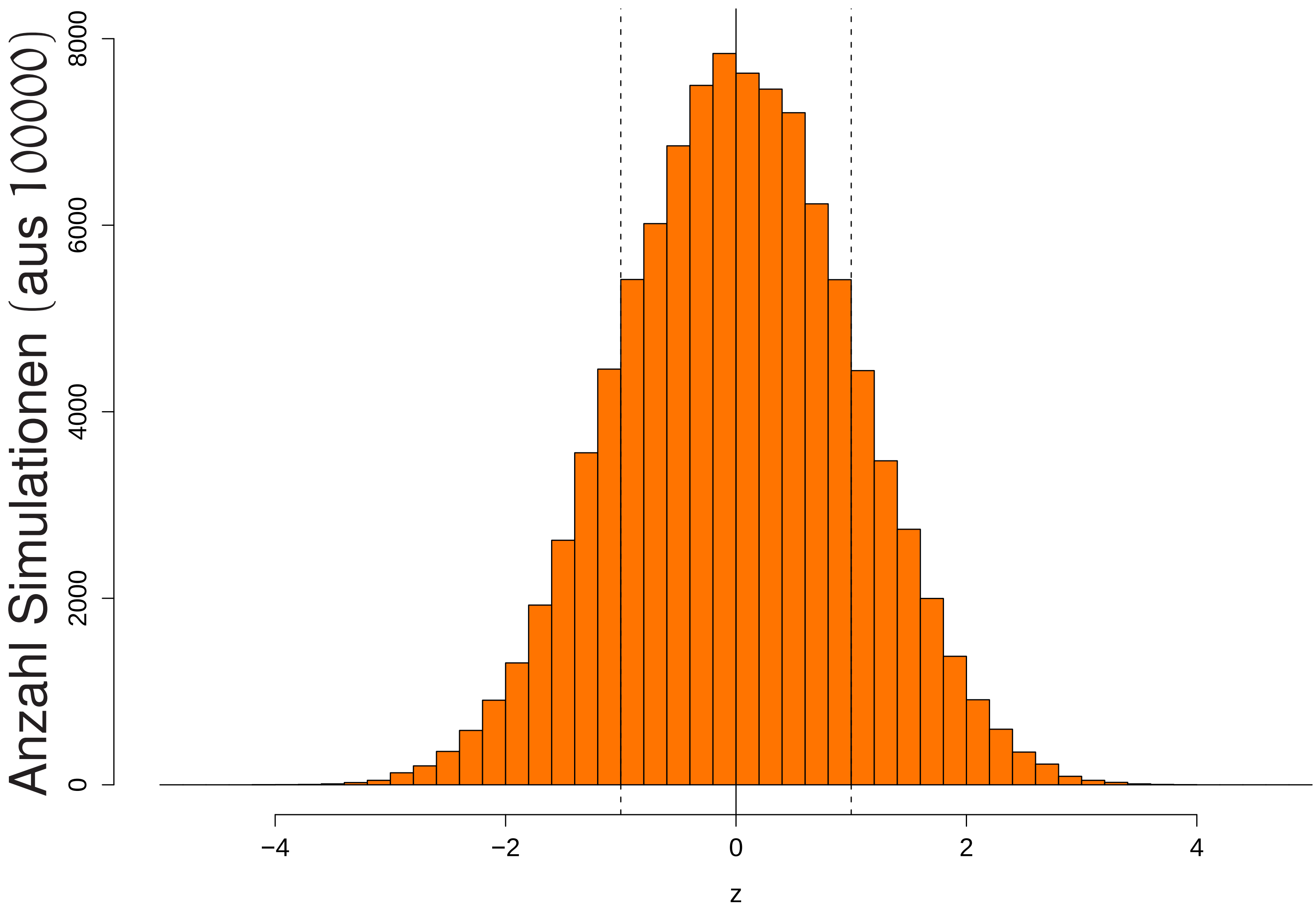


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

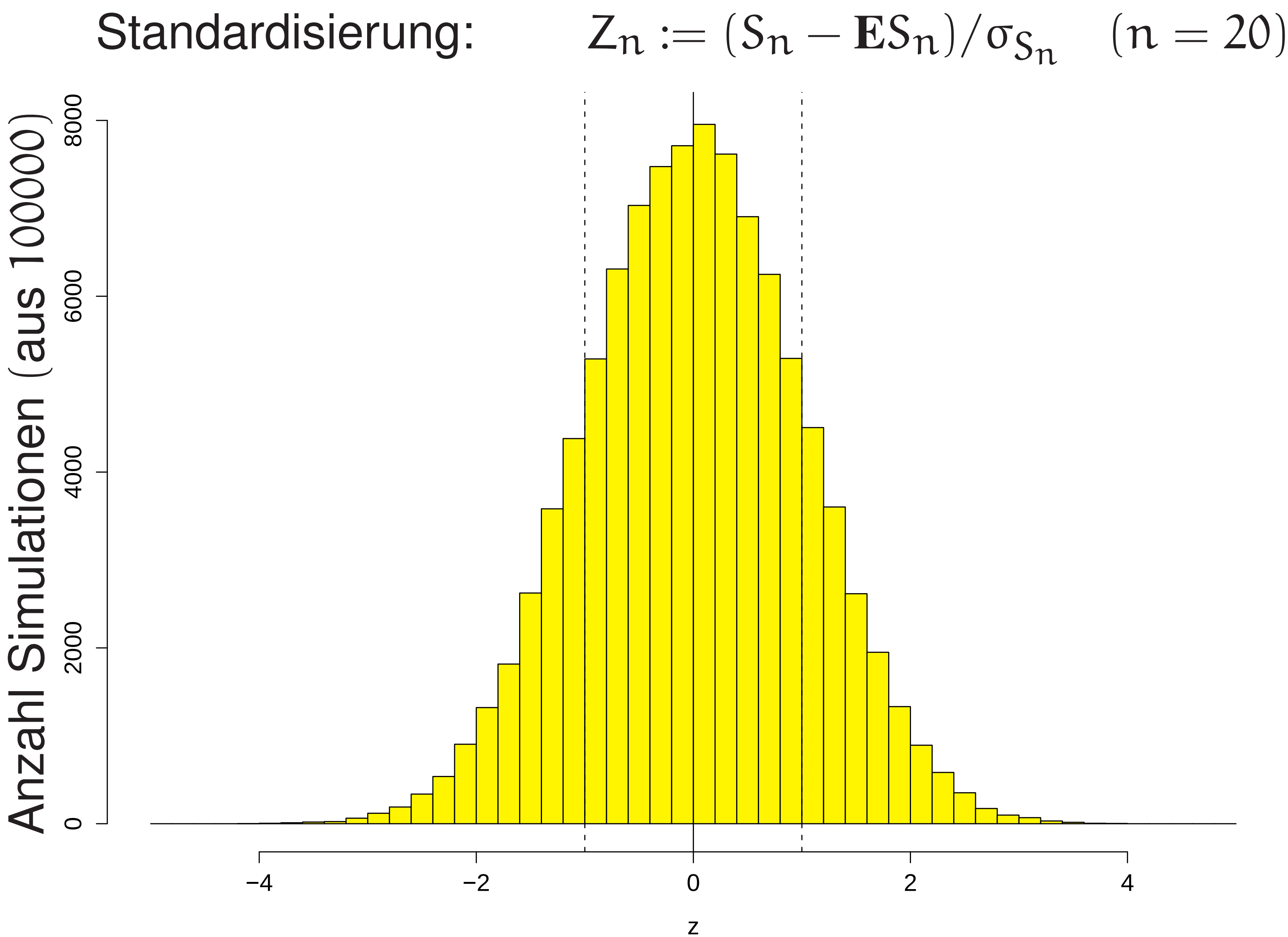
Standardisierung: $\quad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 9)$



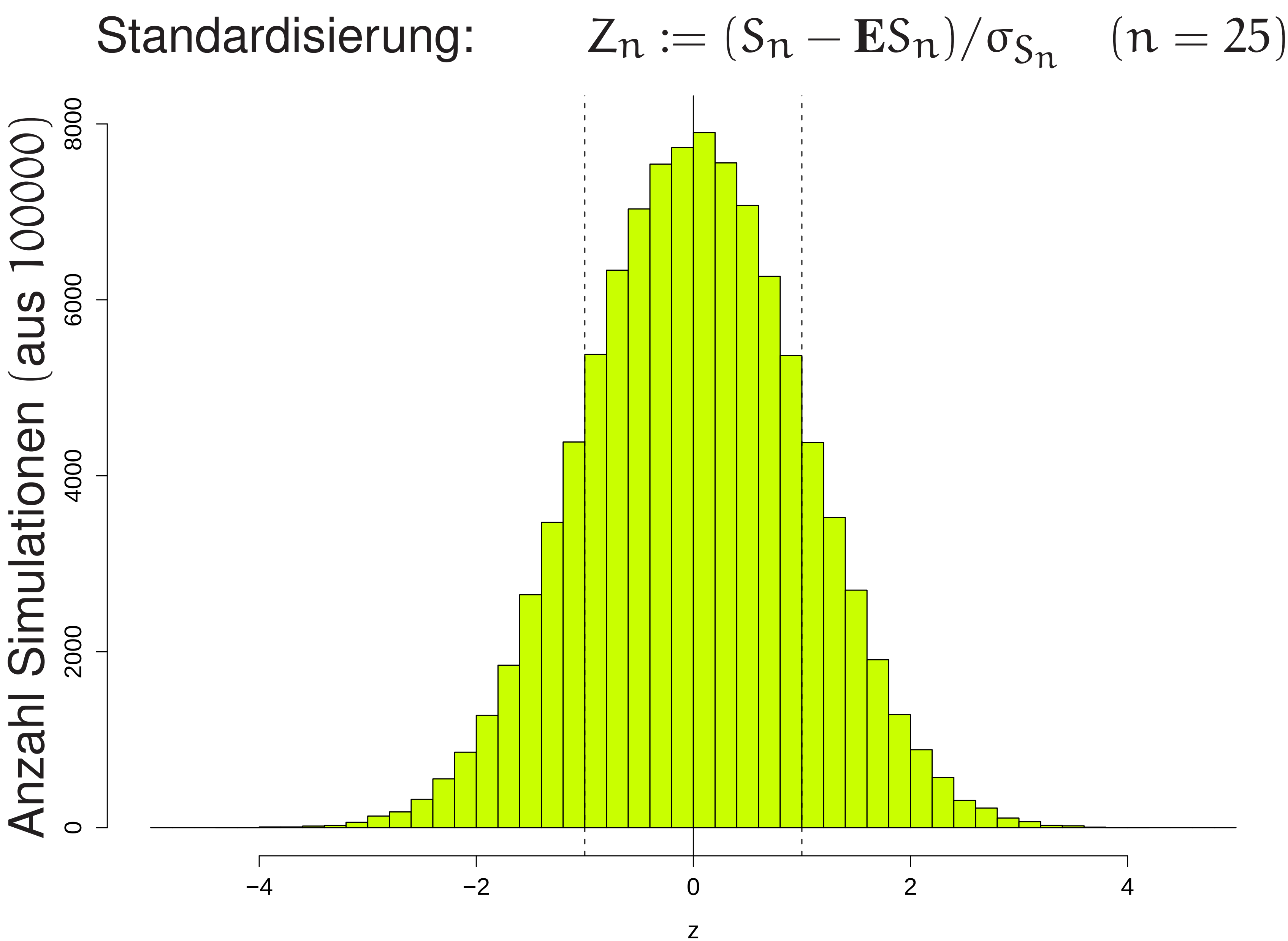
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 10)$



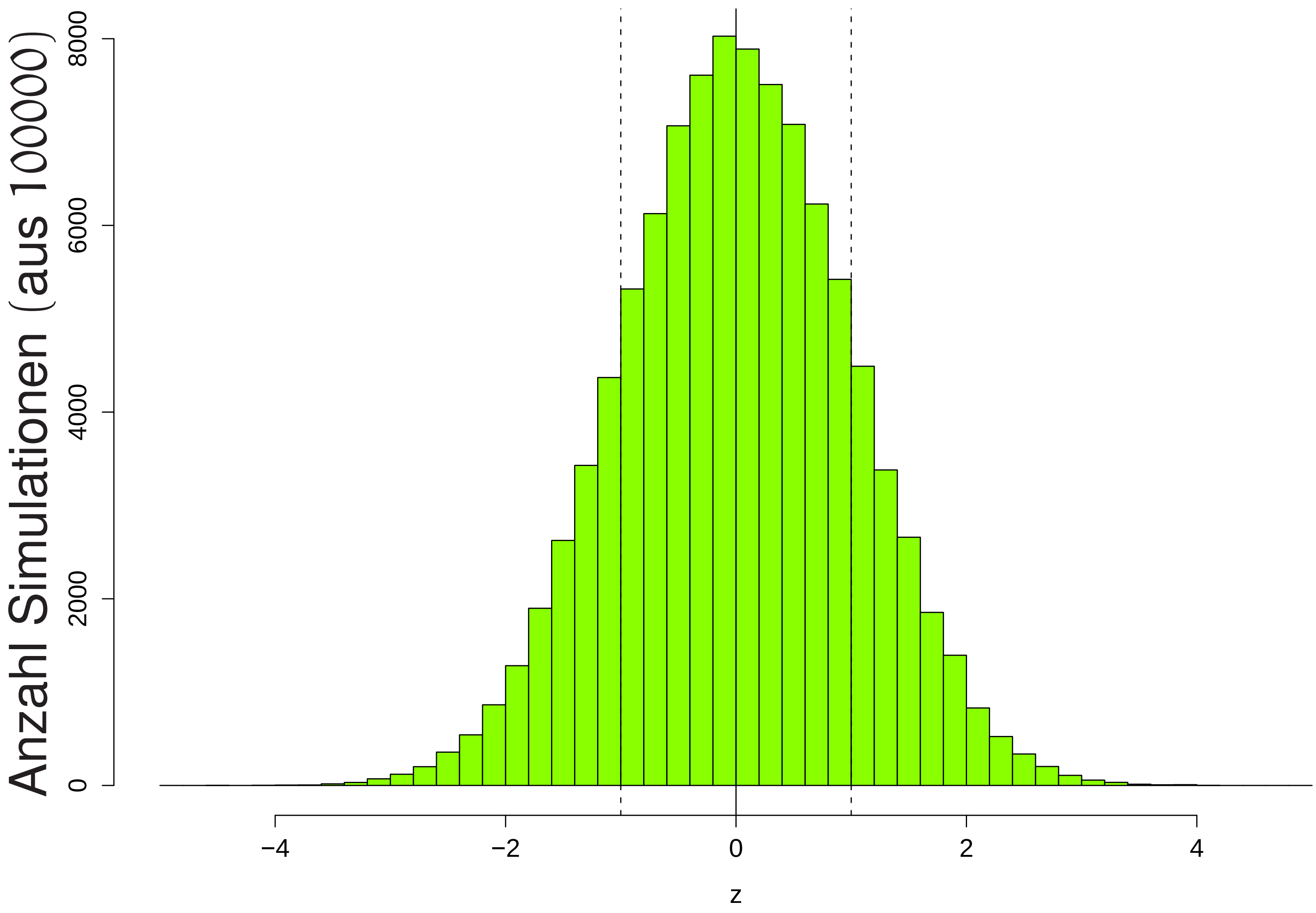
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 15)$

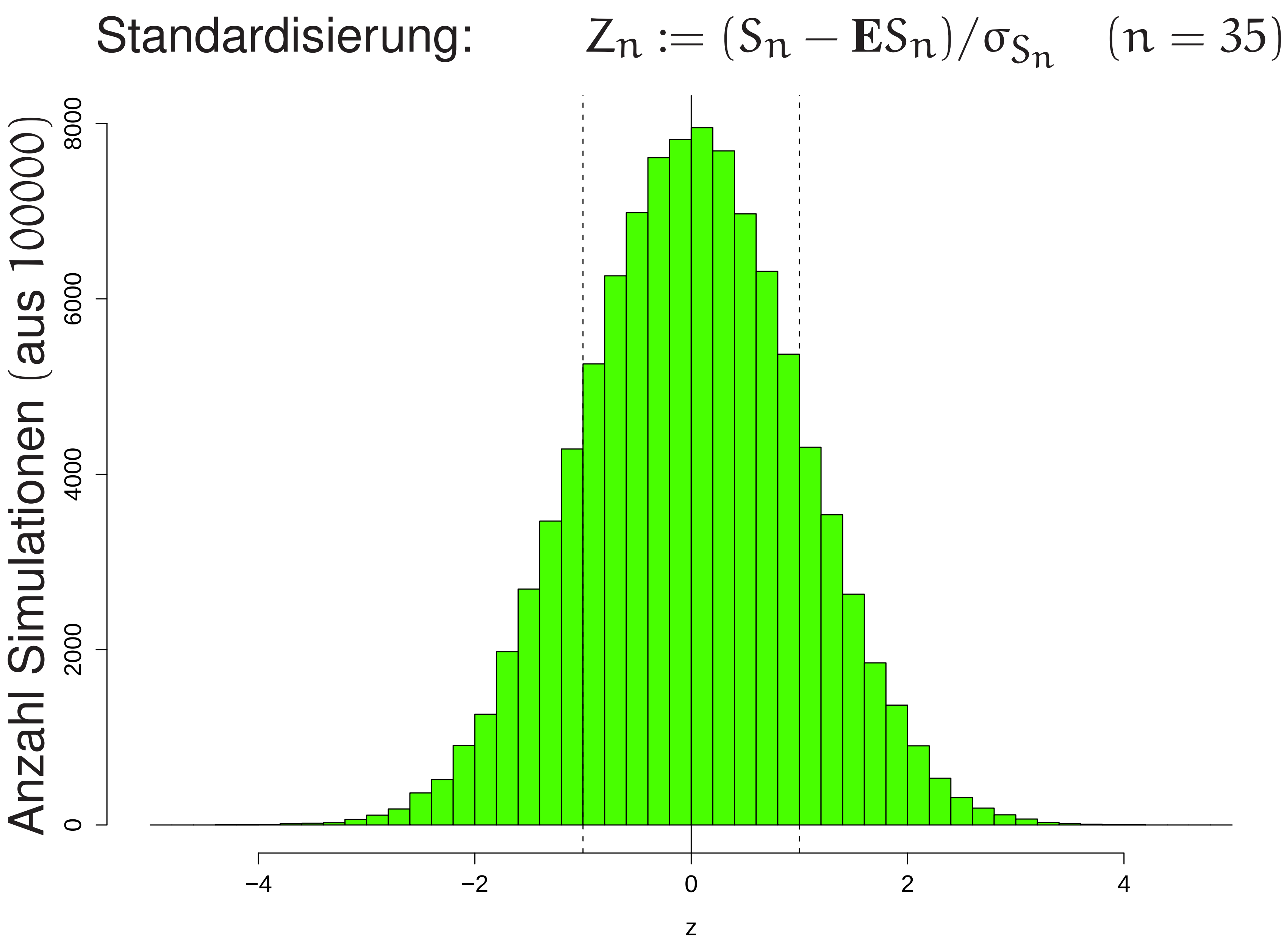


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

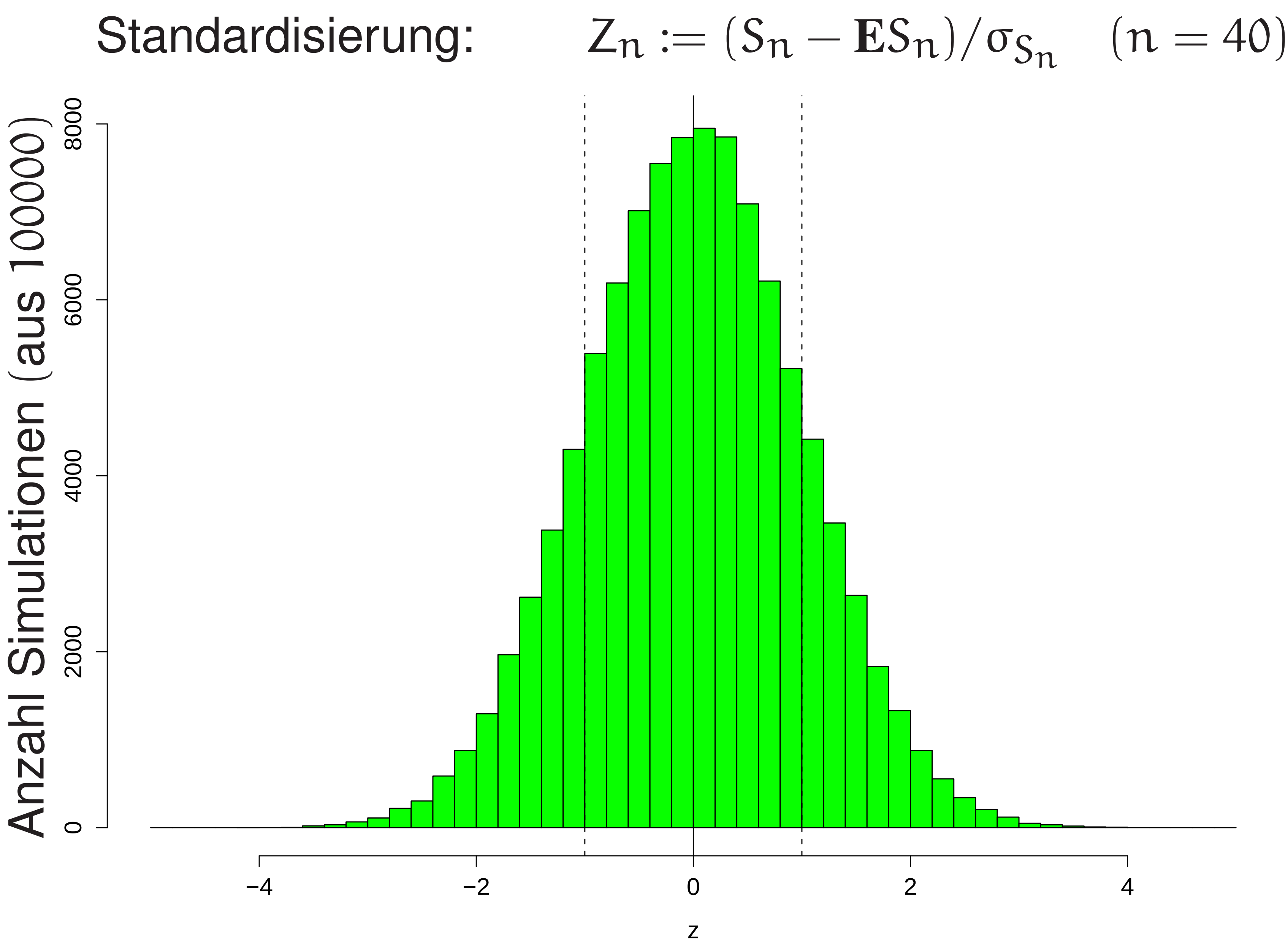

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

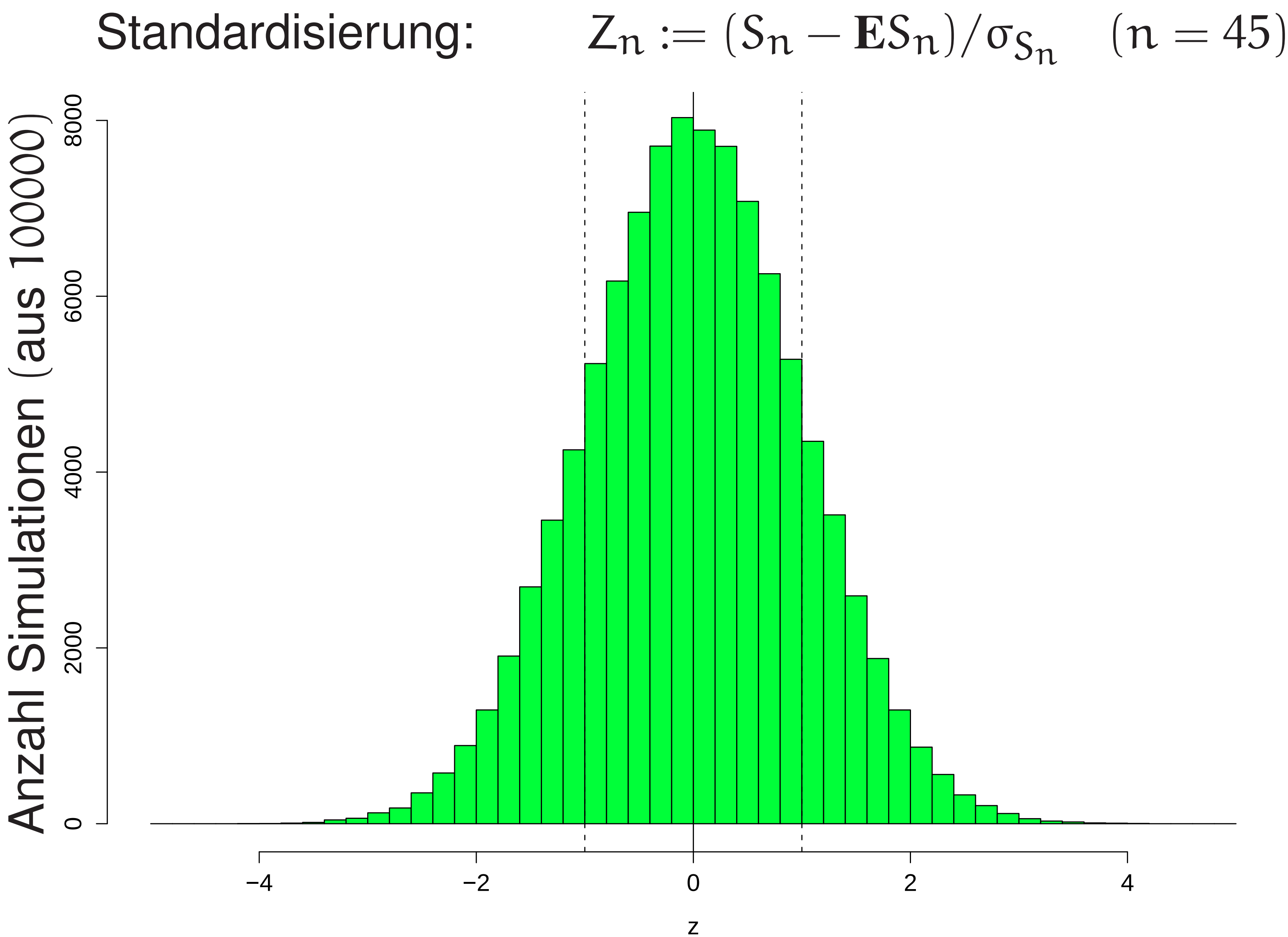
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 30)$





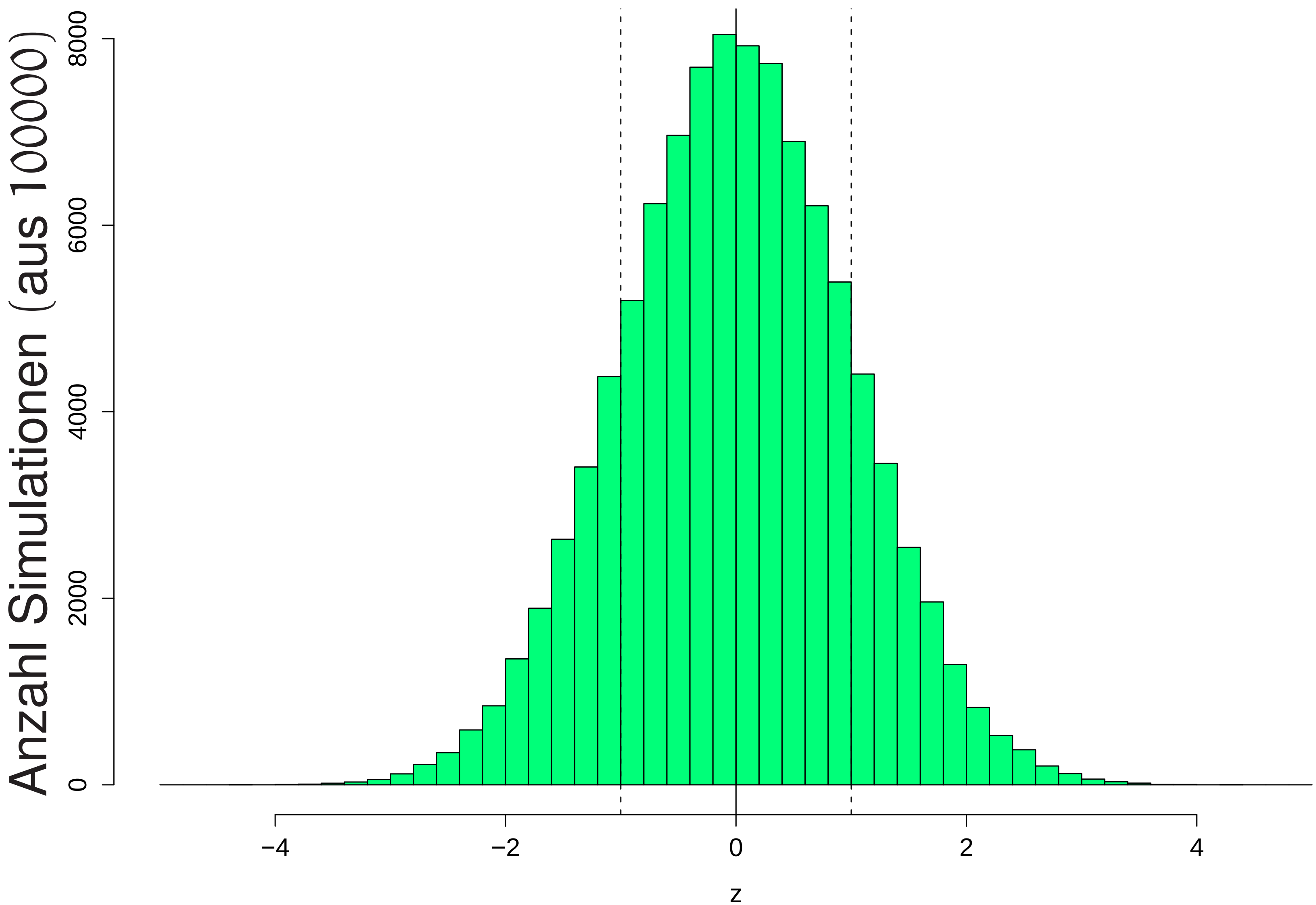
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

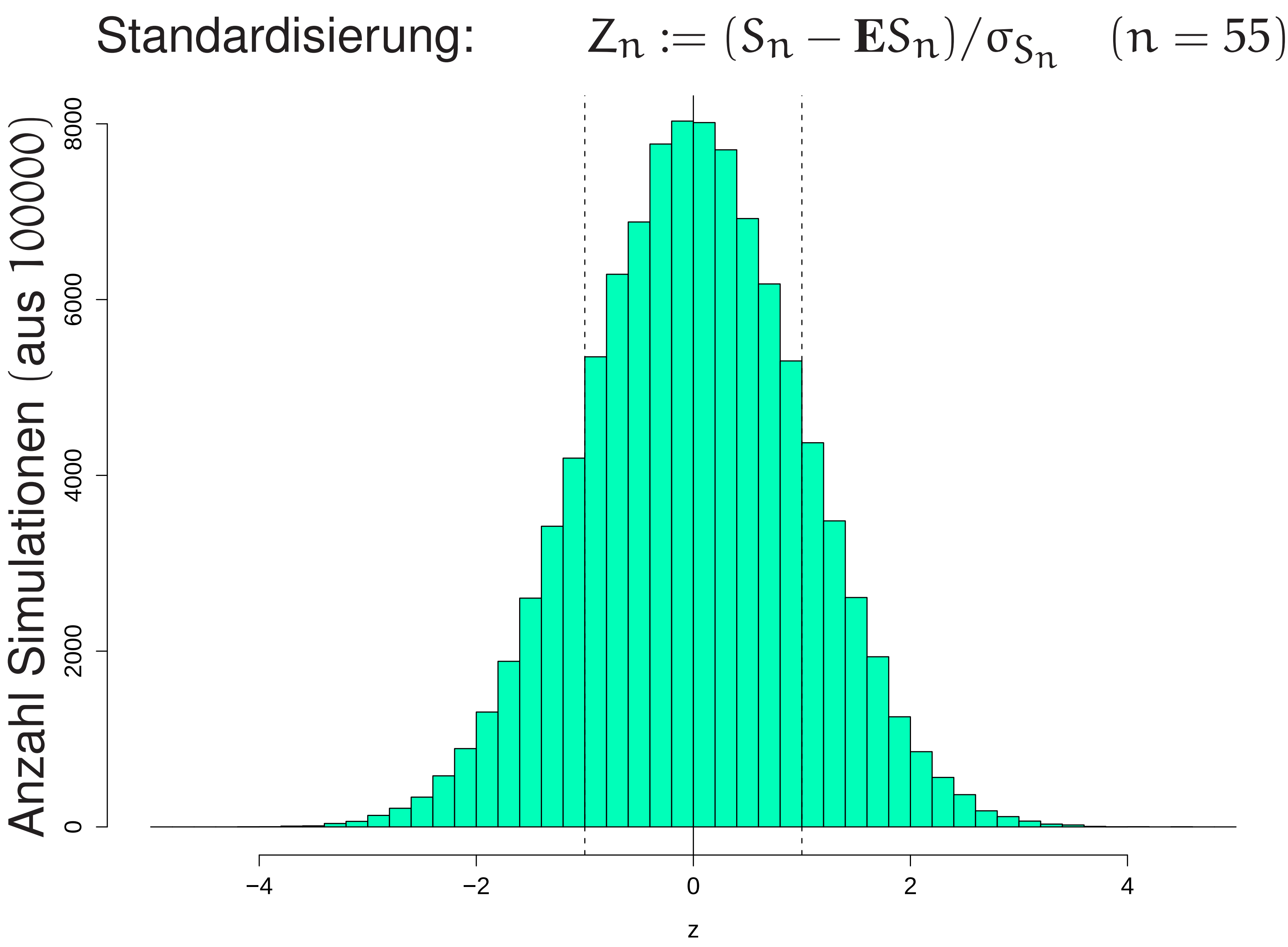

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

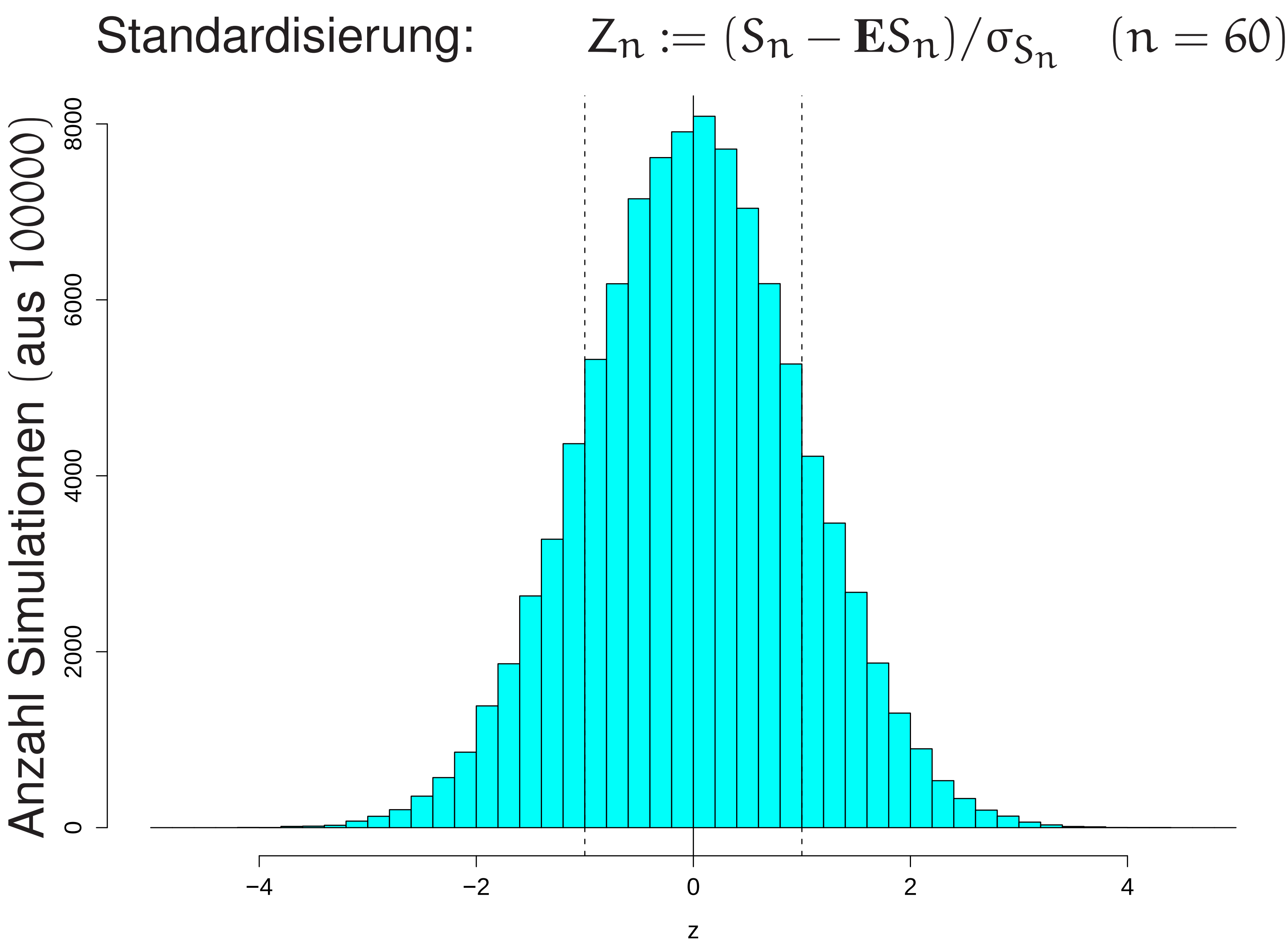


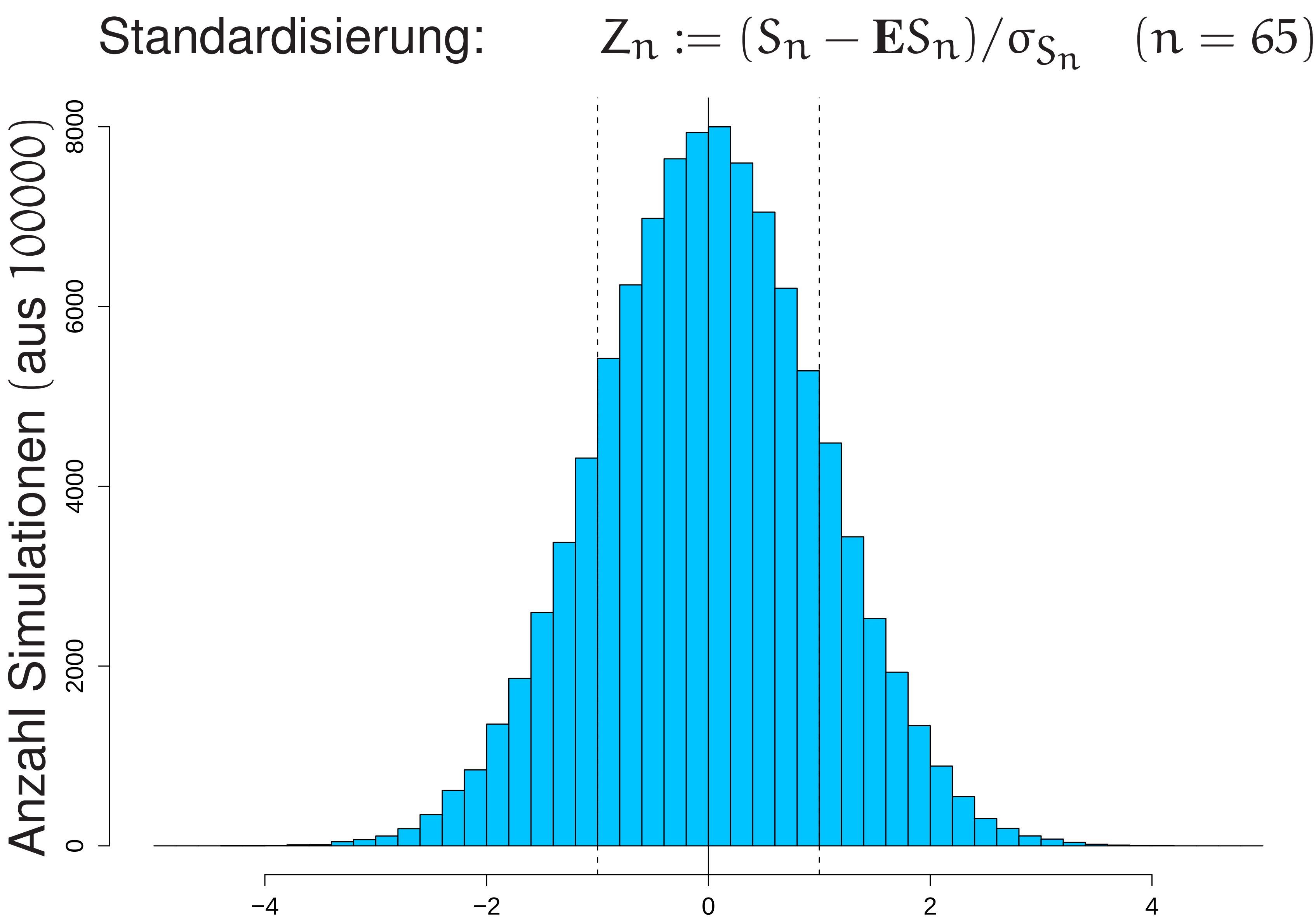
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 45)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

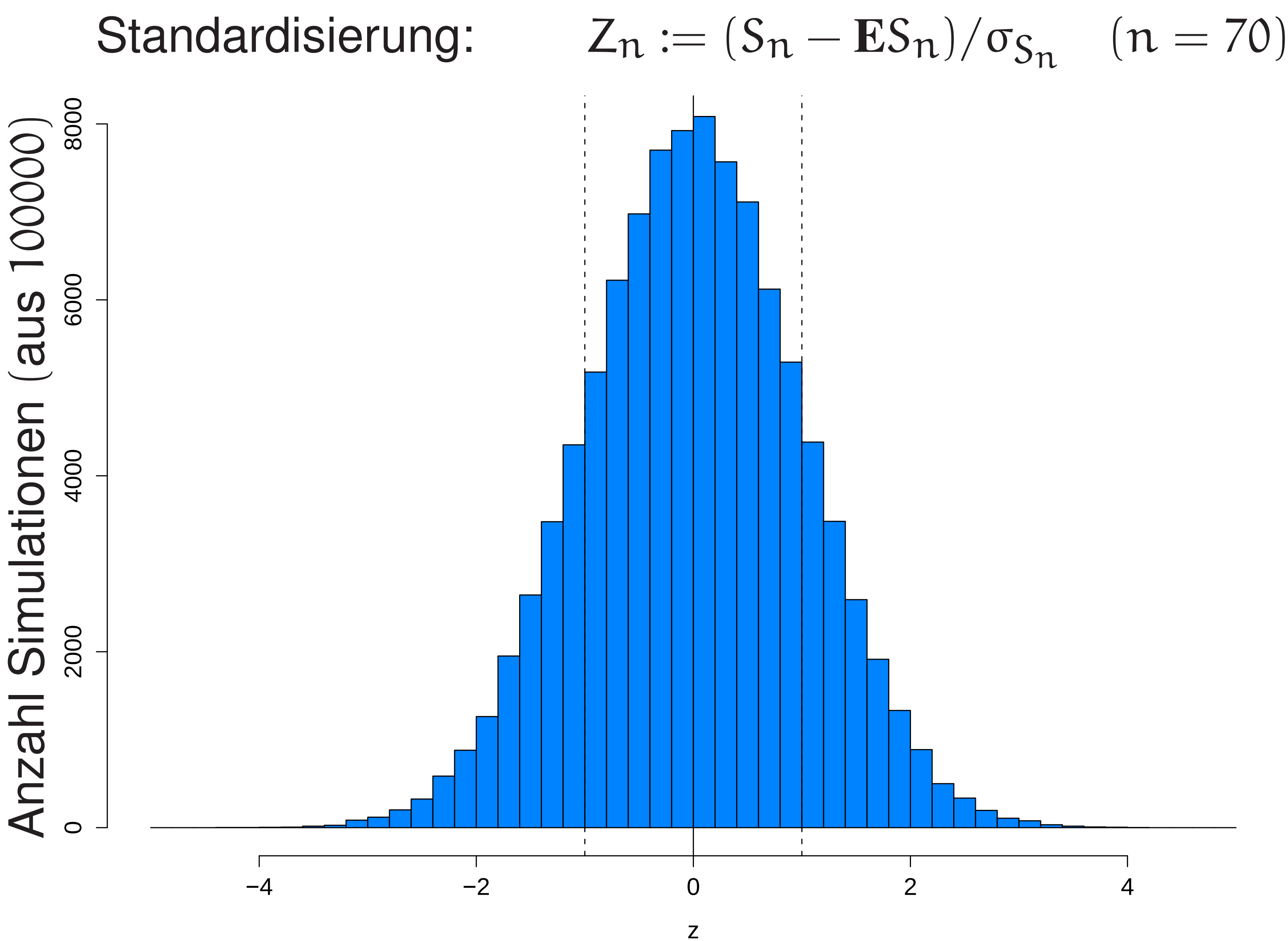
Standardisierung: $\quad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 50)$




Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 55)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

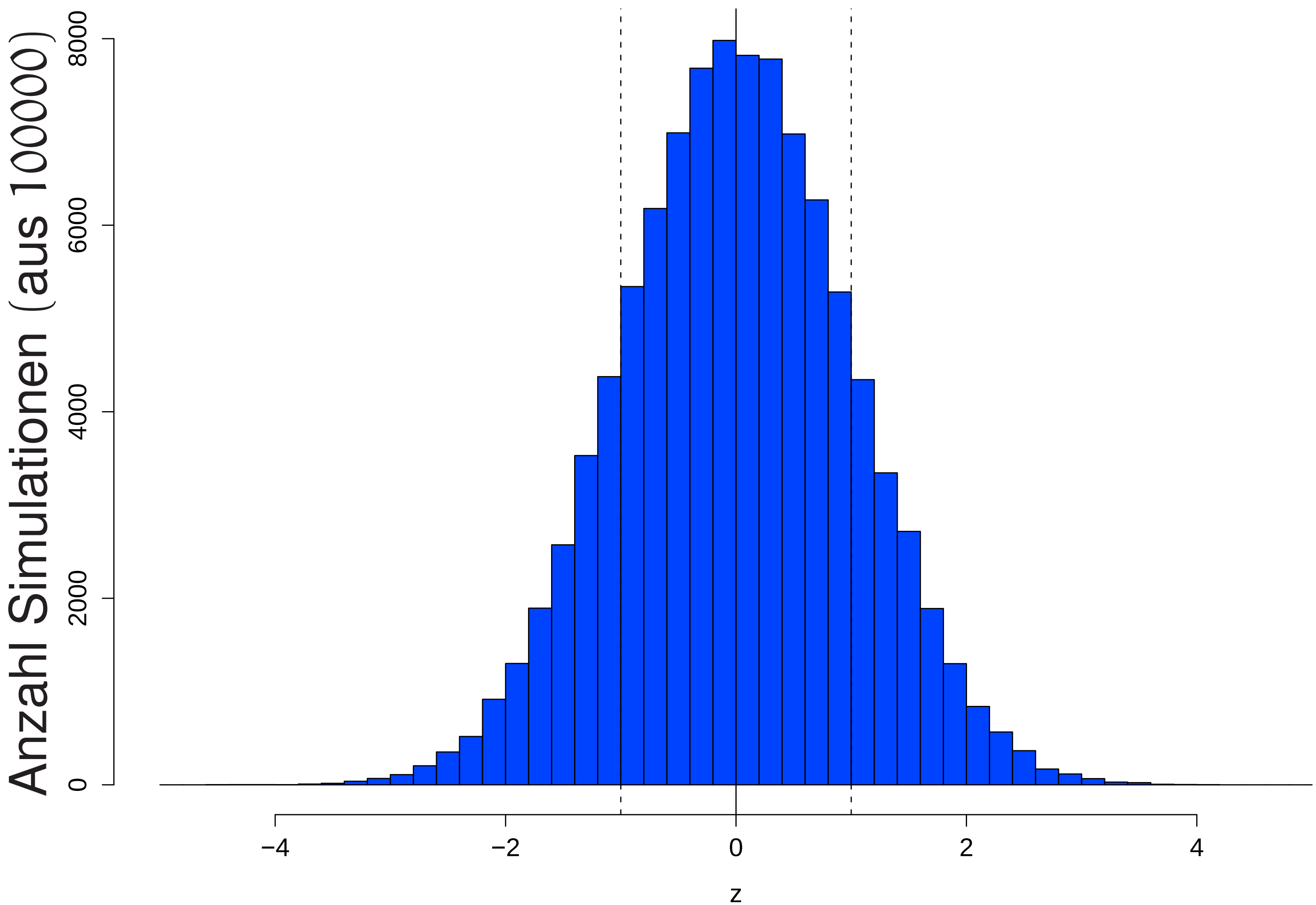

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

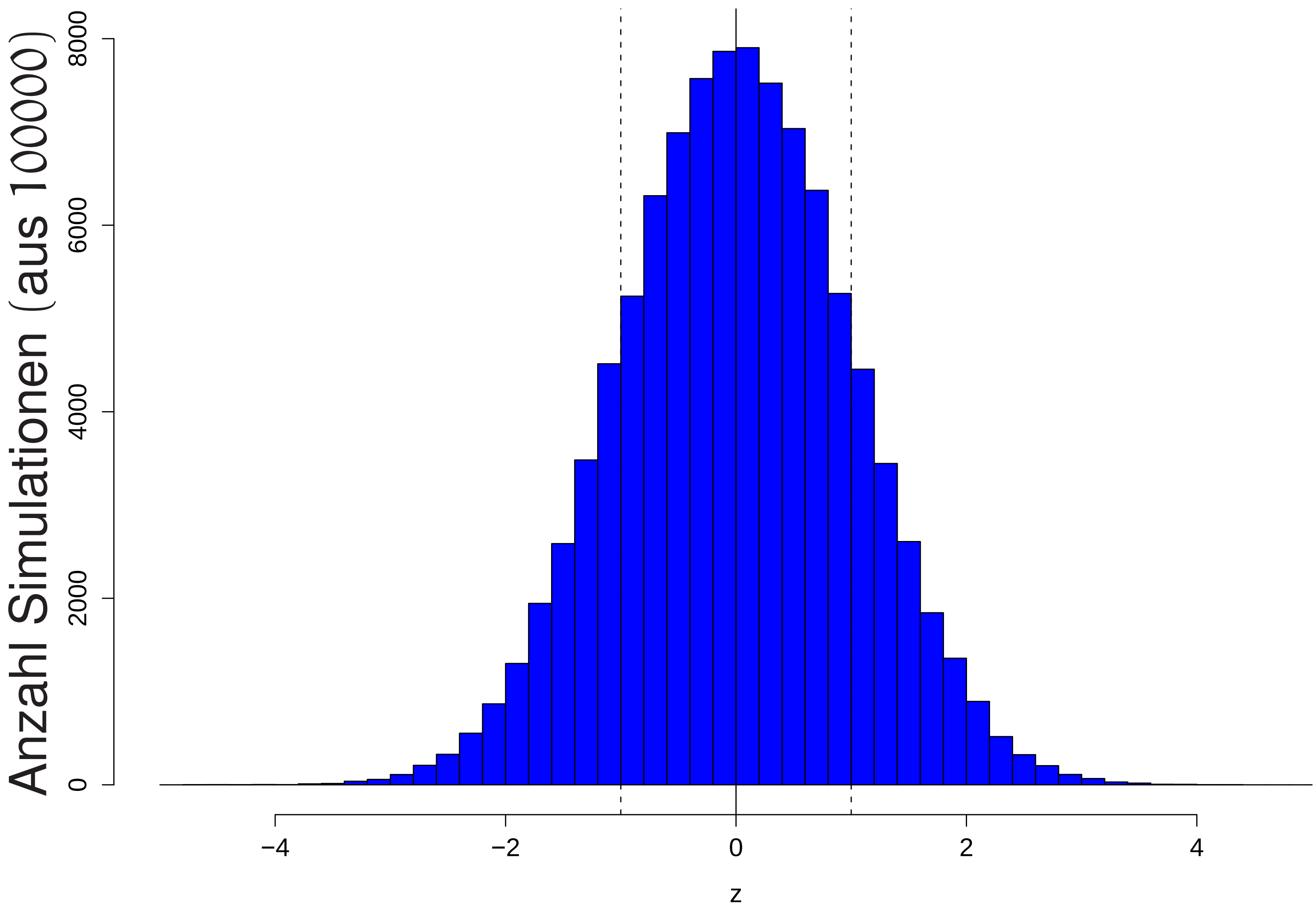


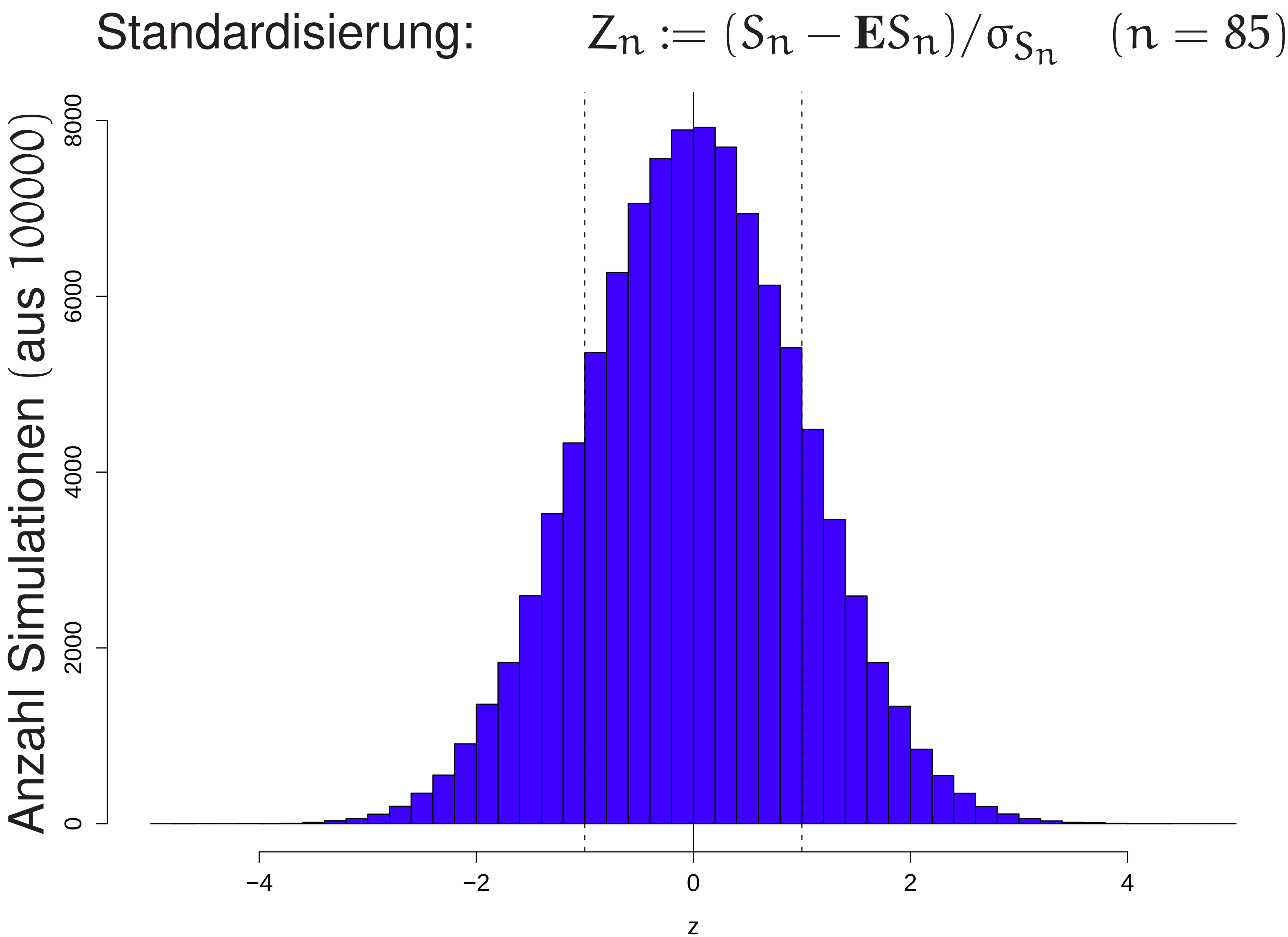
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

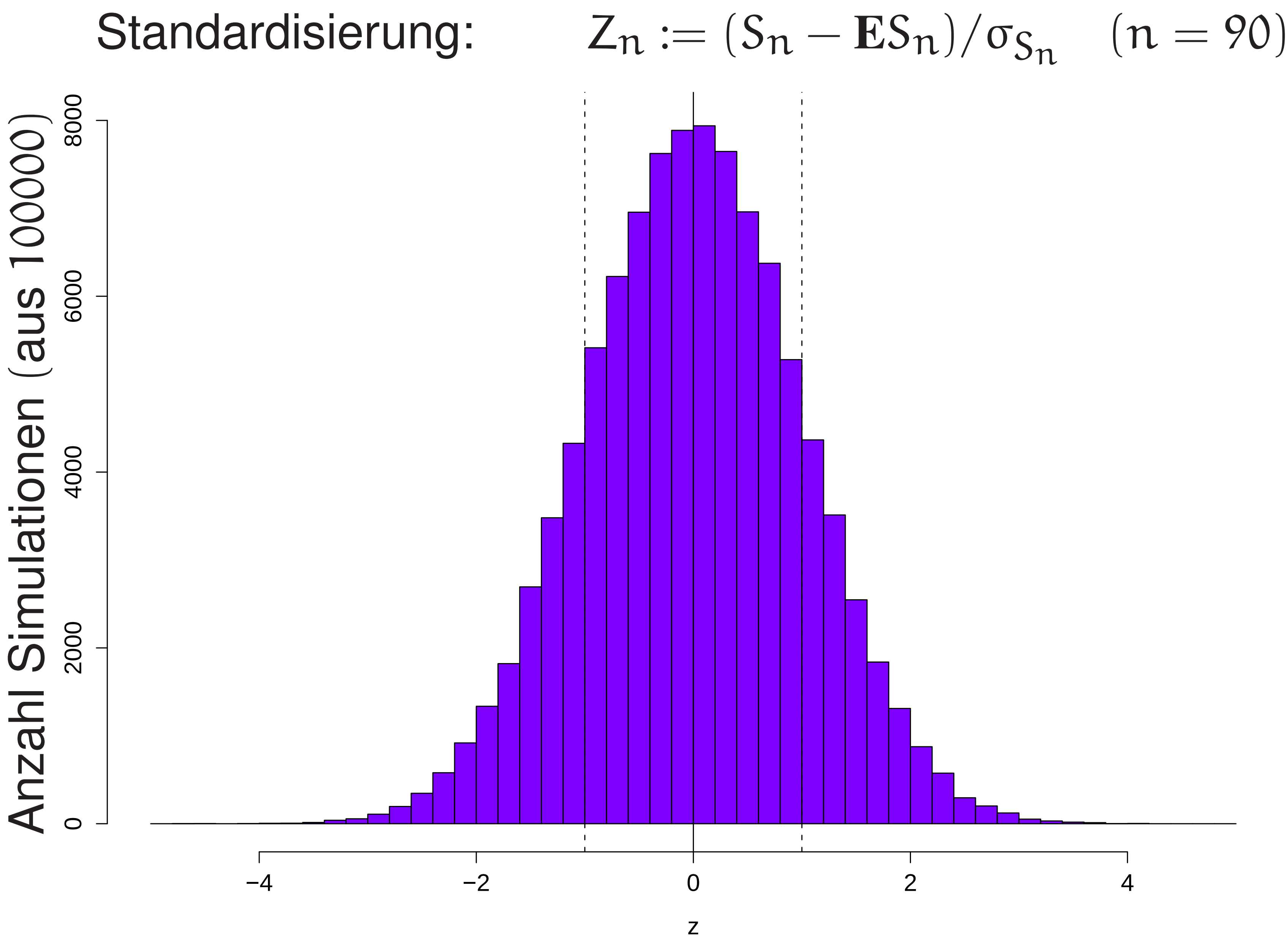
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 75)$



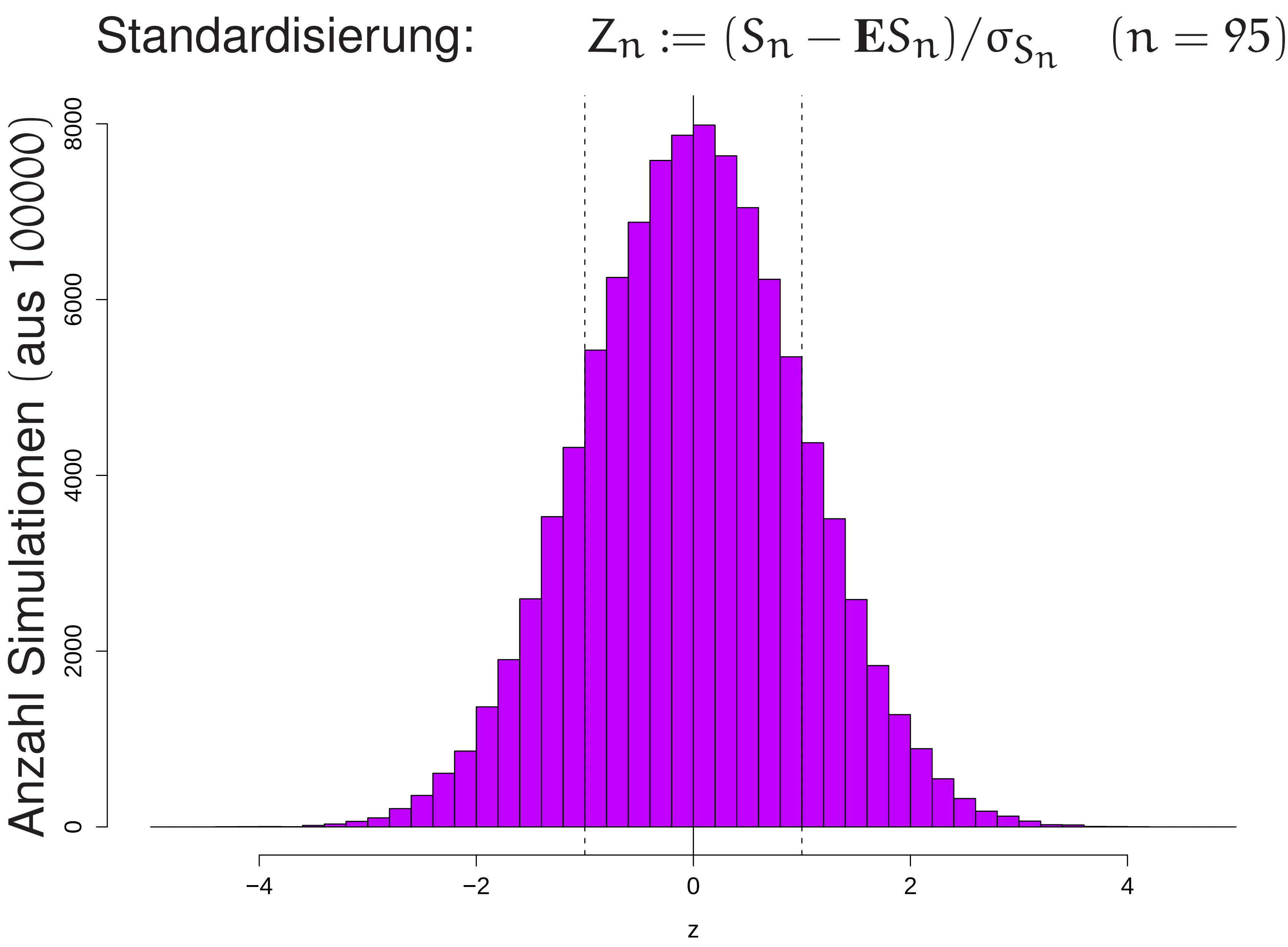
Standardisierung: $\quad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 80)$



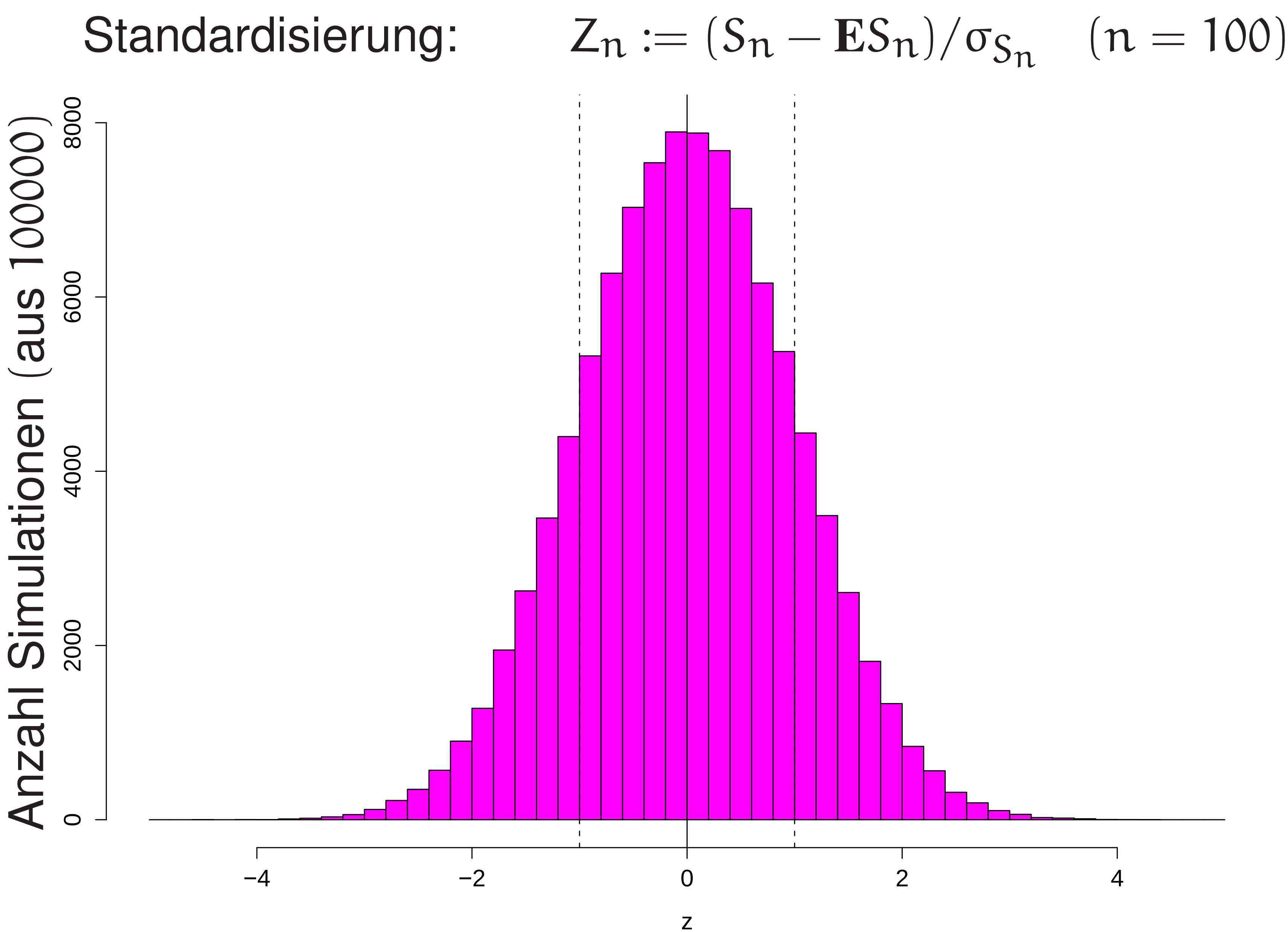

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Welche Form

hat die Grenzverteilung?

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Die Verteilung von

$$Z_{100}$$

ist glockenförmig.

Um welche Glockenkurve handelt es sich genau?

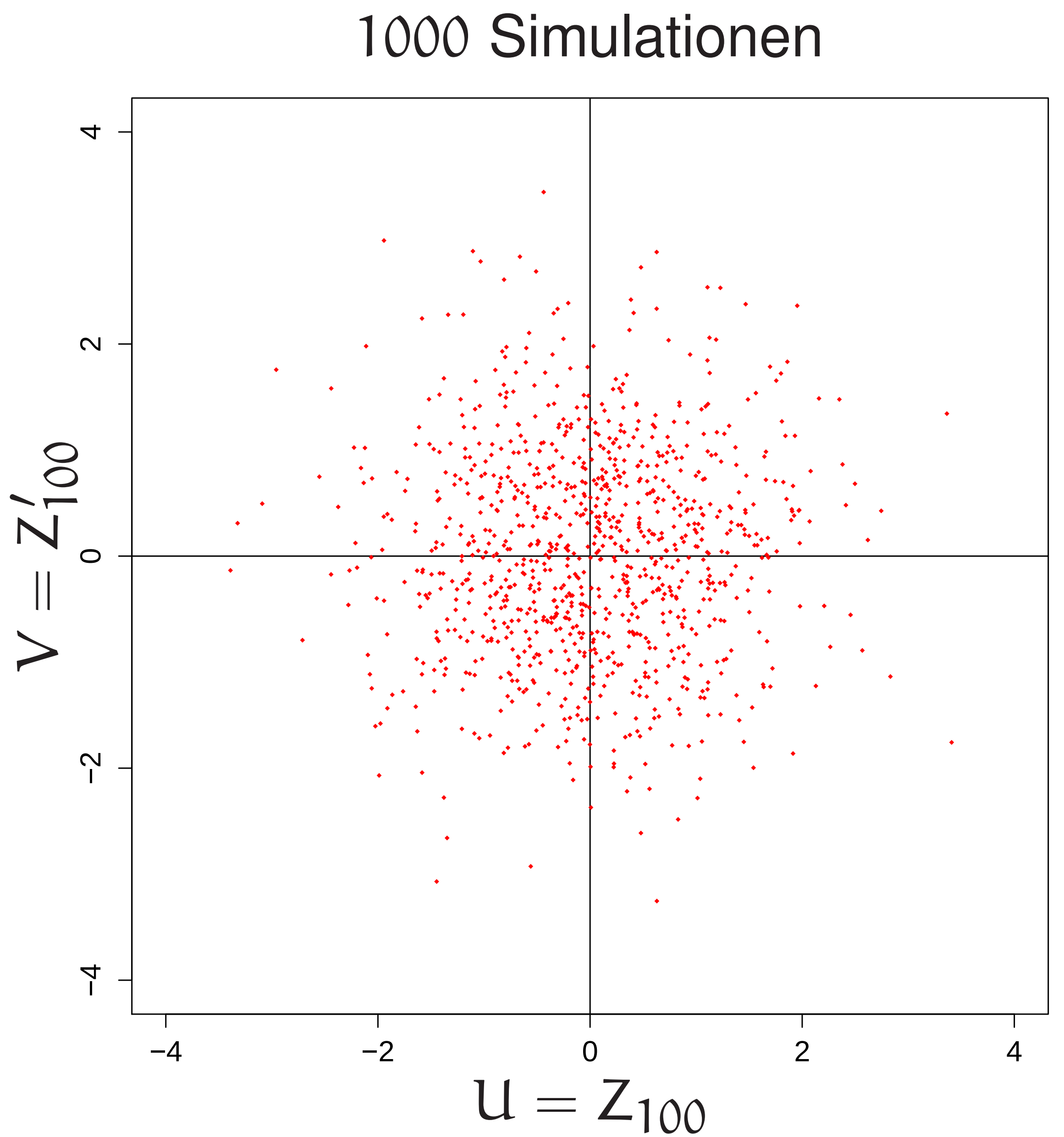
Glücklicher Einfall:

Zwei unabhängige Kopien

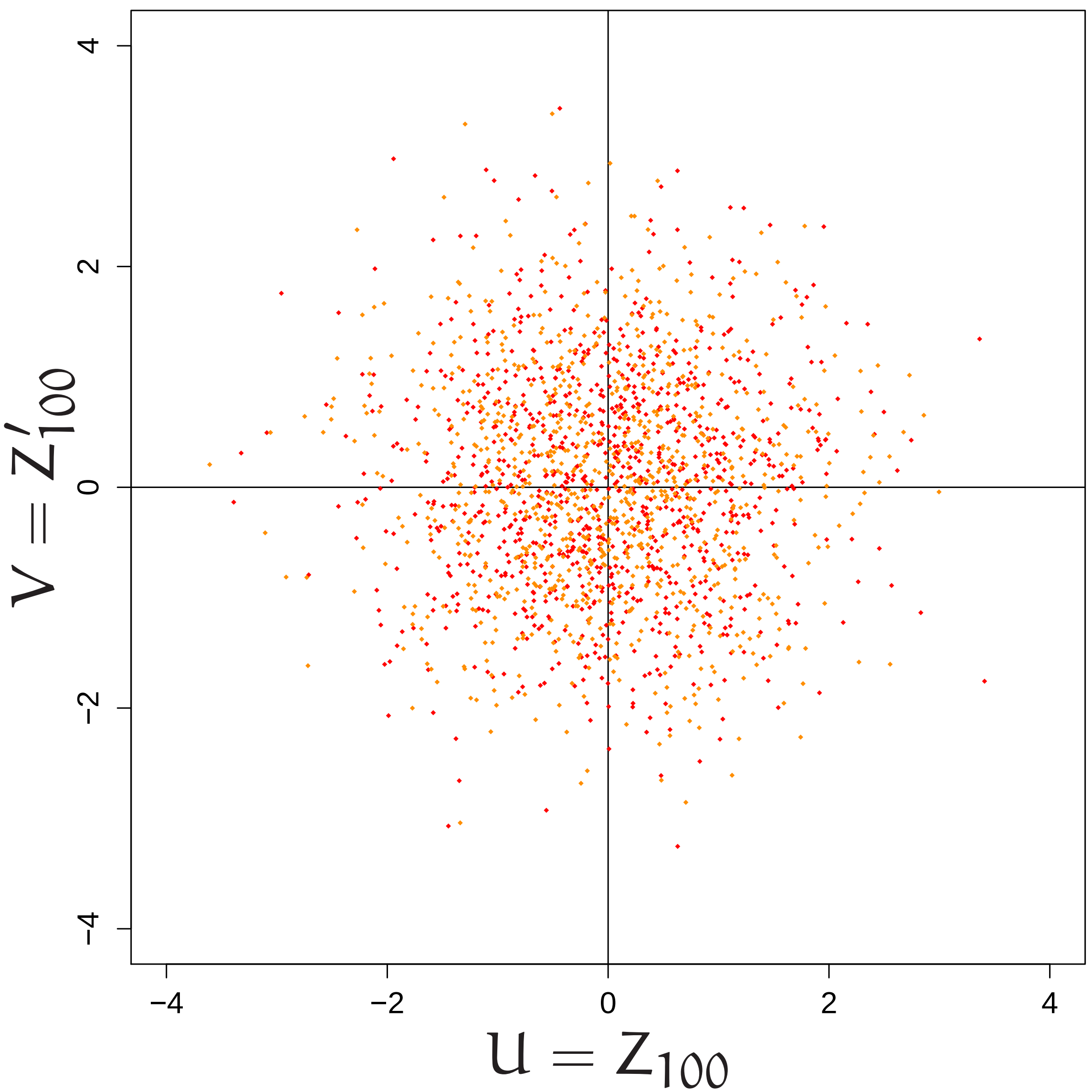
$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

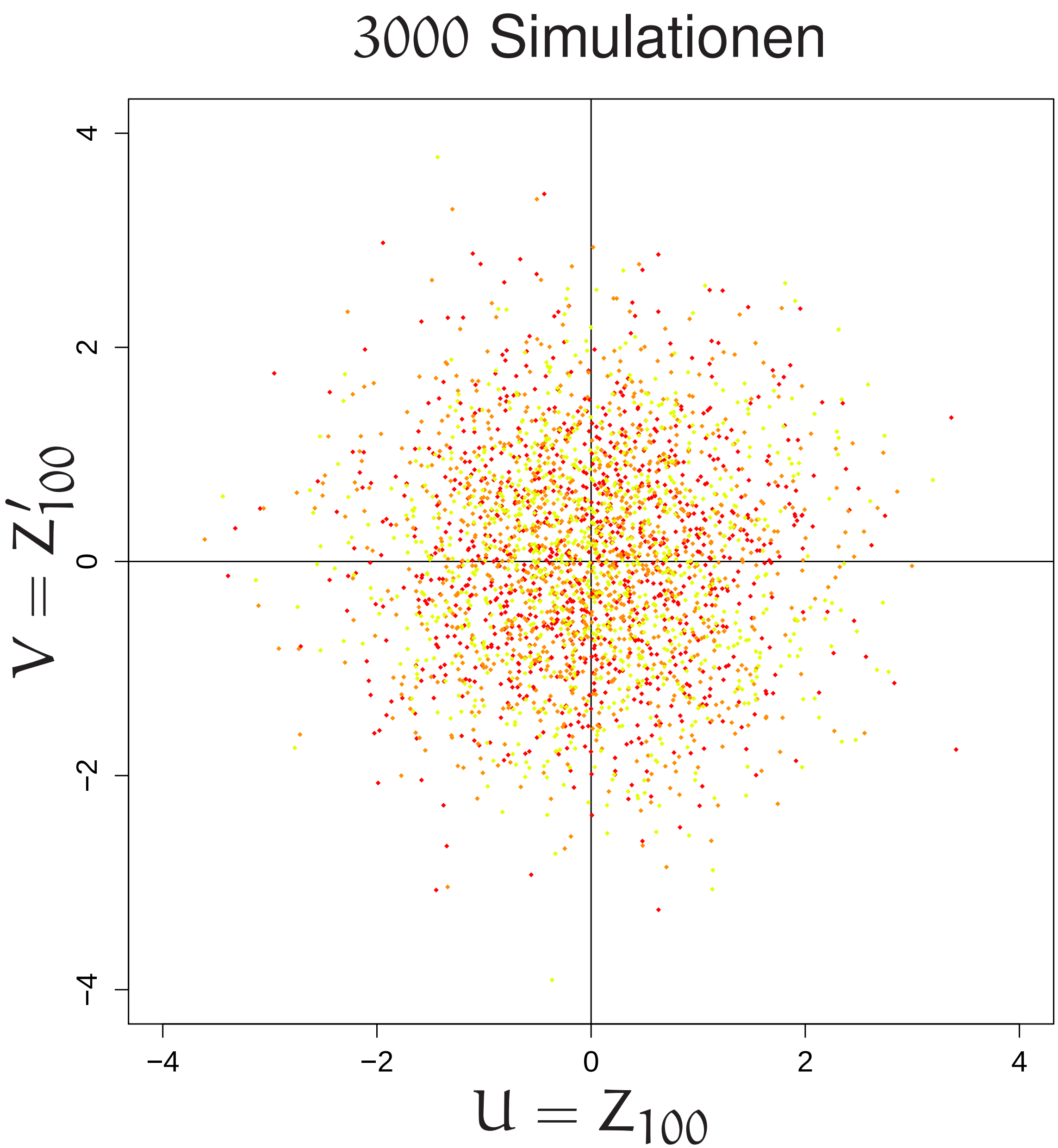
Wie sieht die gemeinsame Verteilung

von U und V aus?

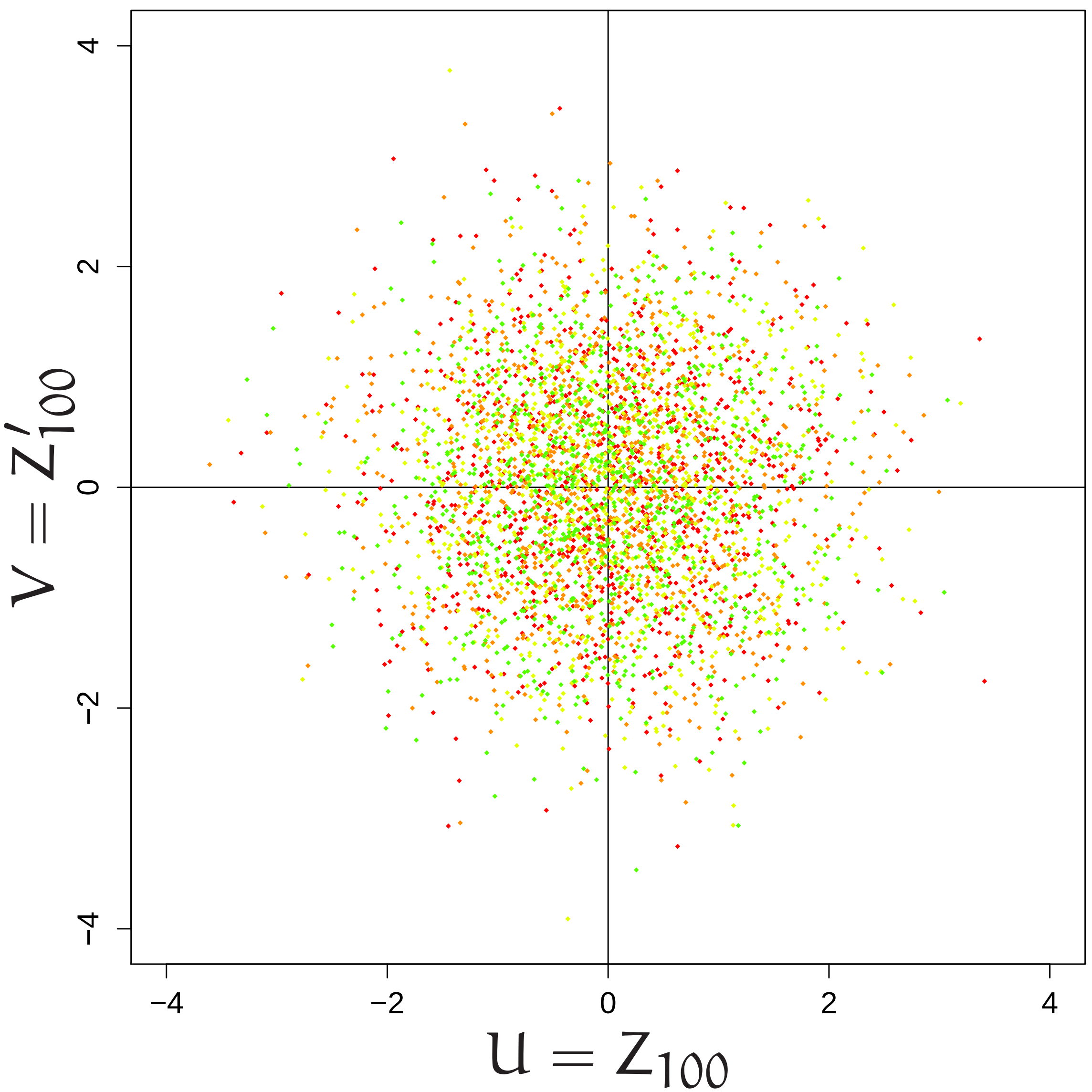

1000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
$V = Z'_{100}$
−4
−2
0
2
4
$U = Z_{100}$

2000 Simulationen

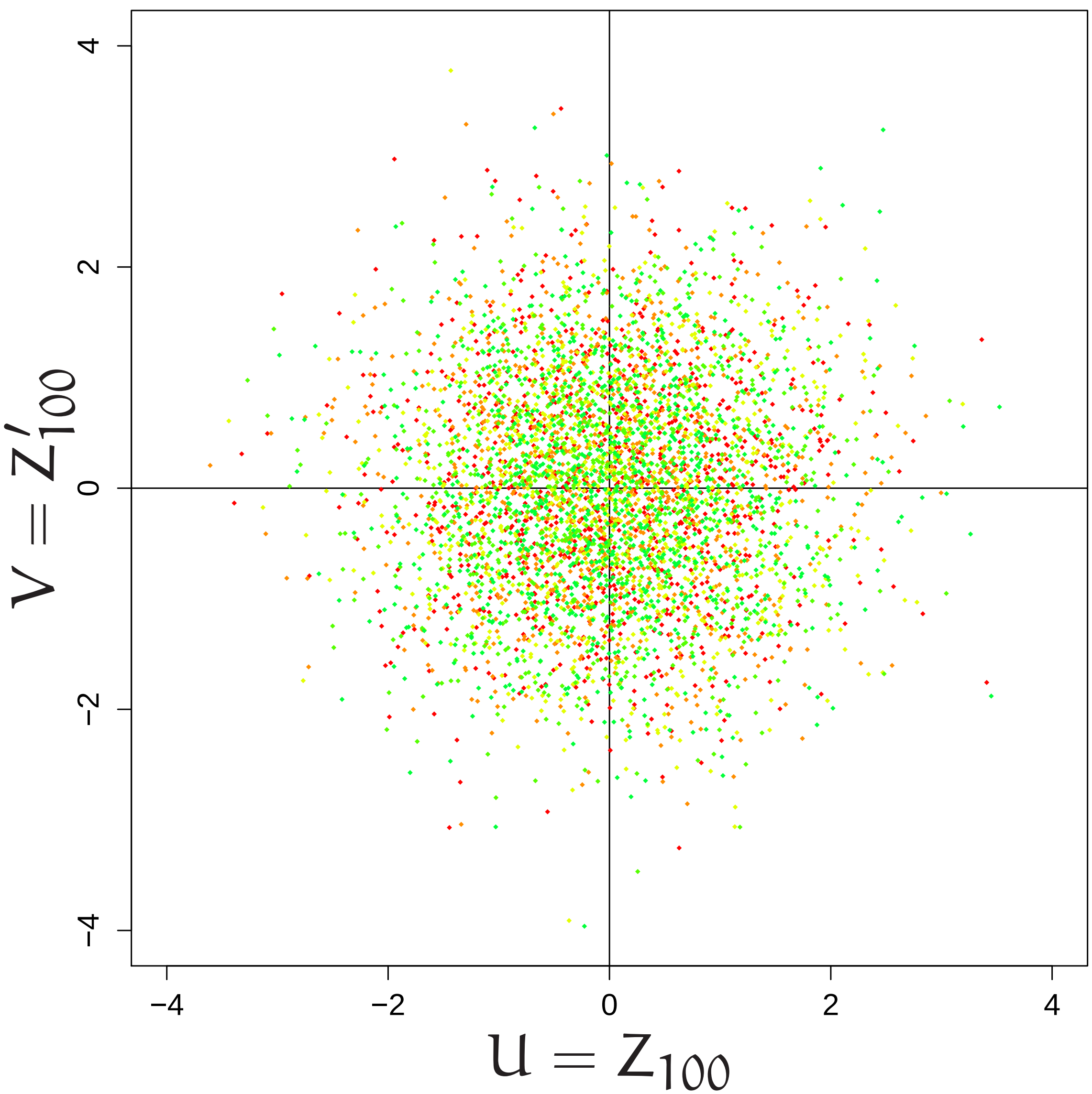


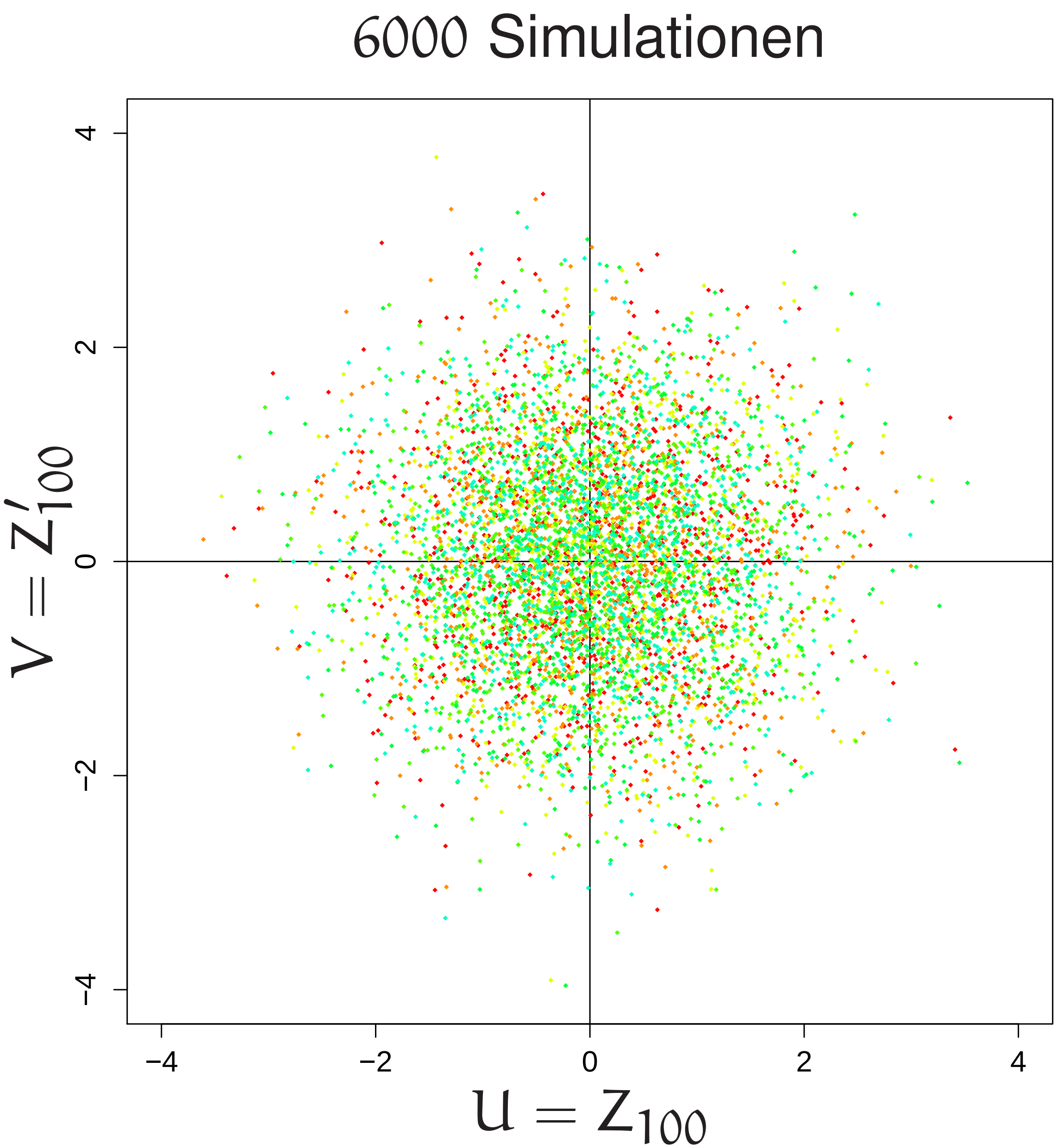

3000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

4000 Simulationen



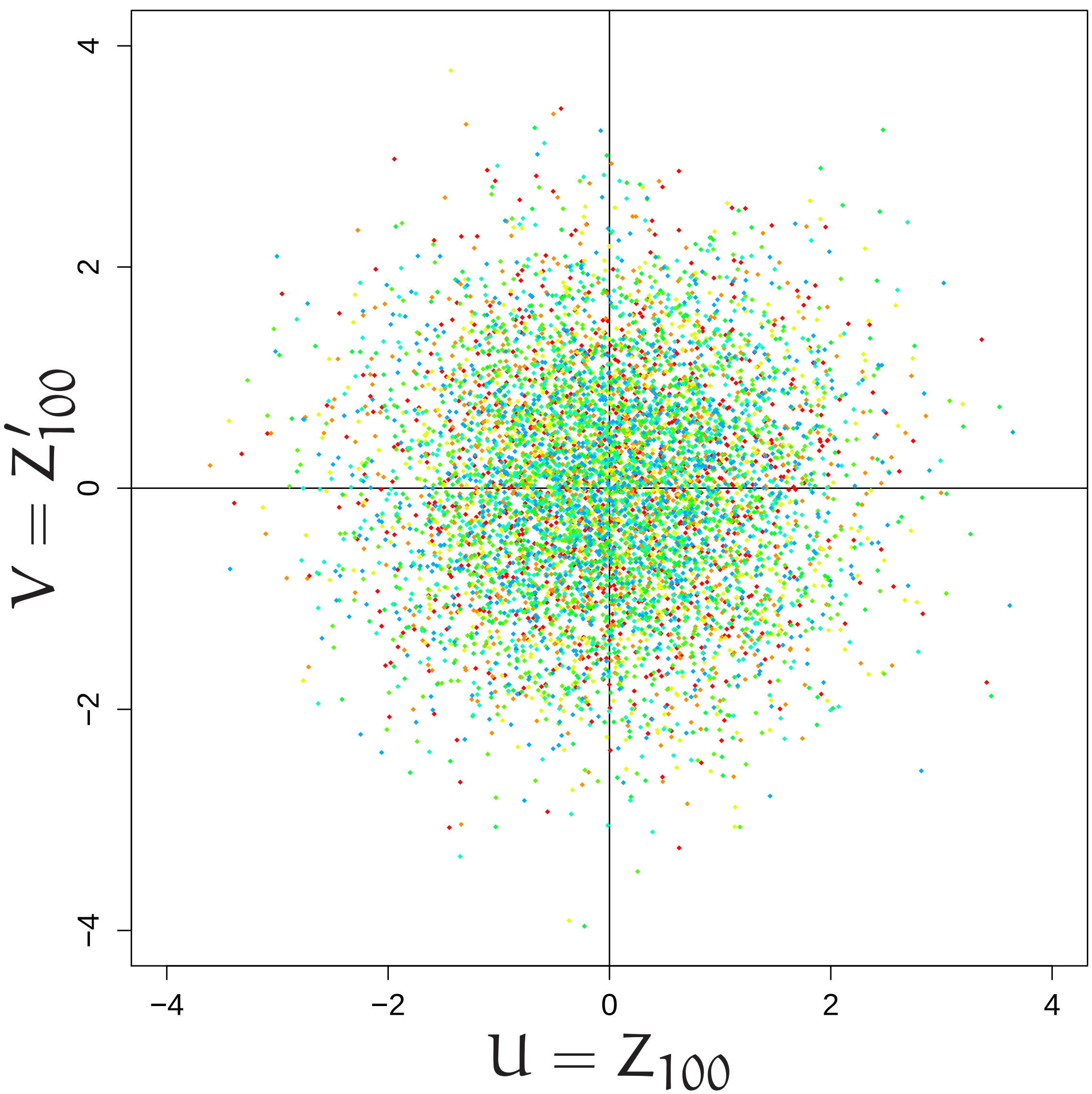
5000 Simulationen

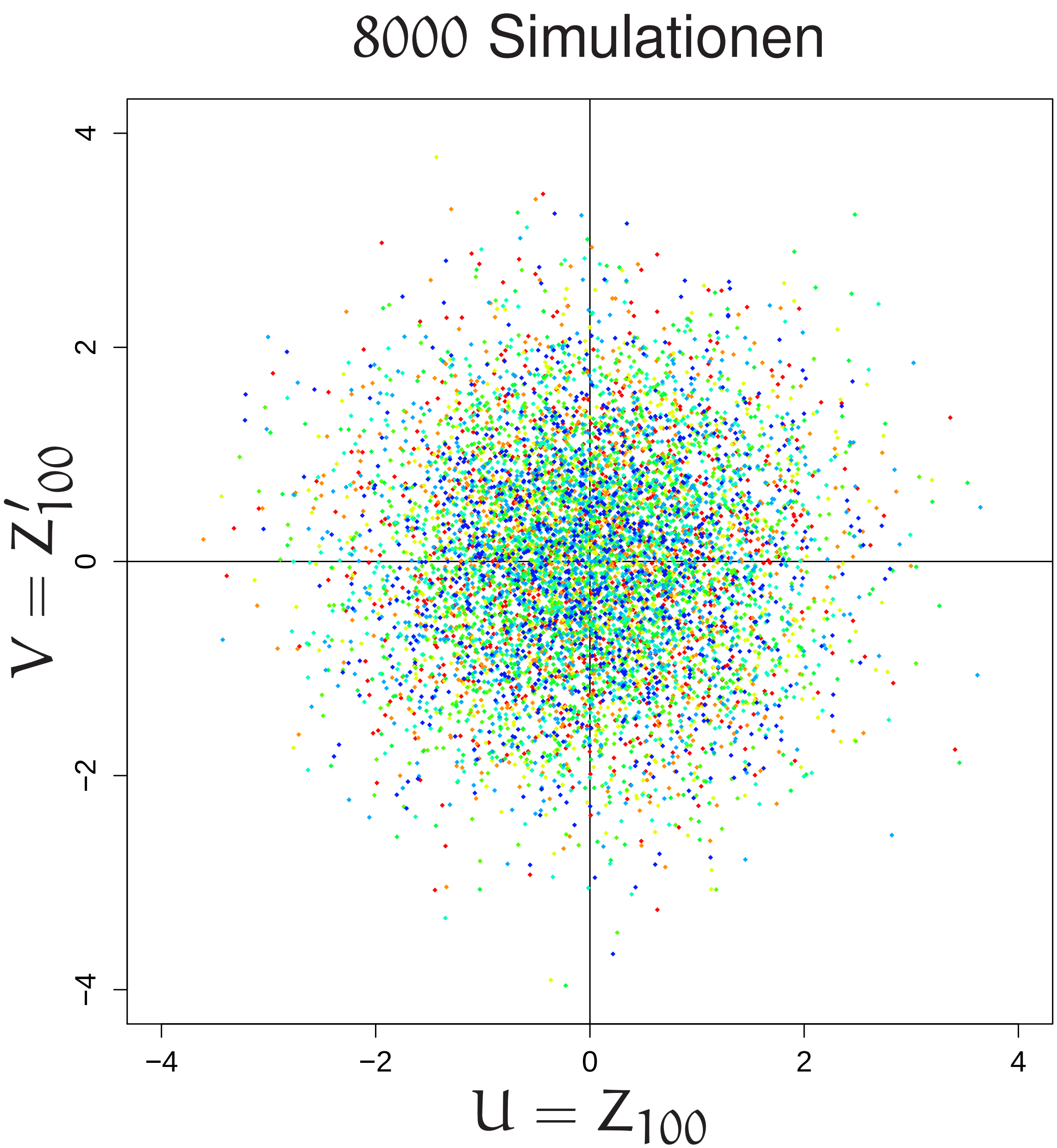




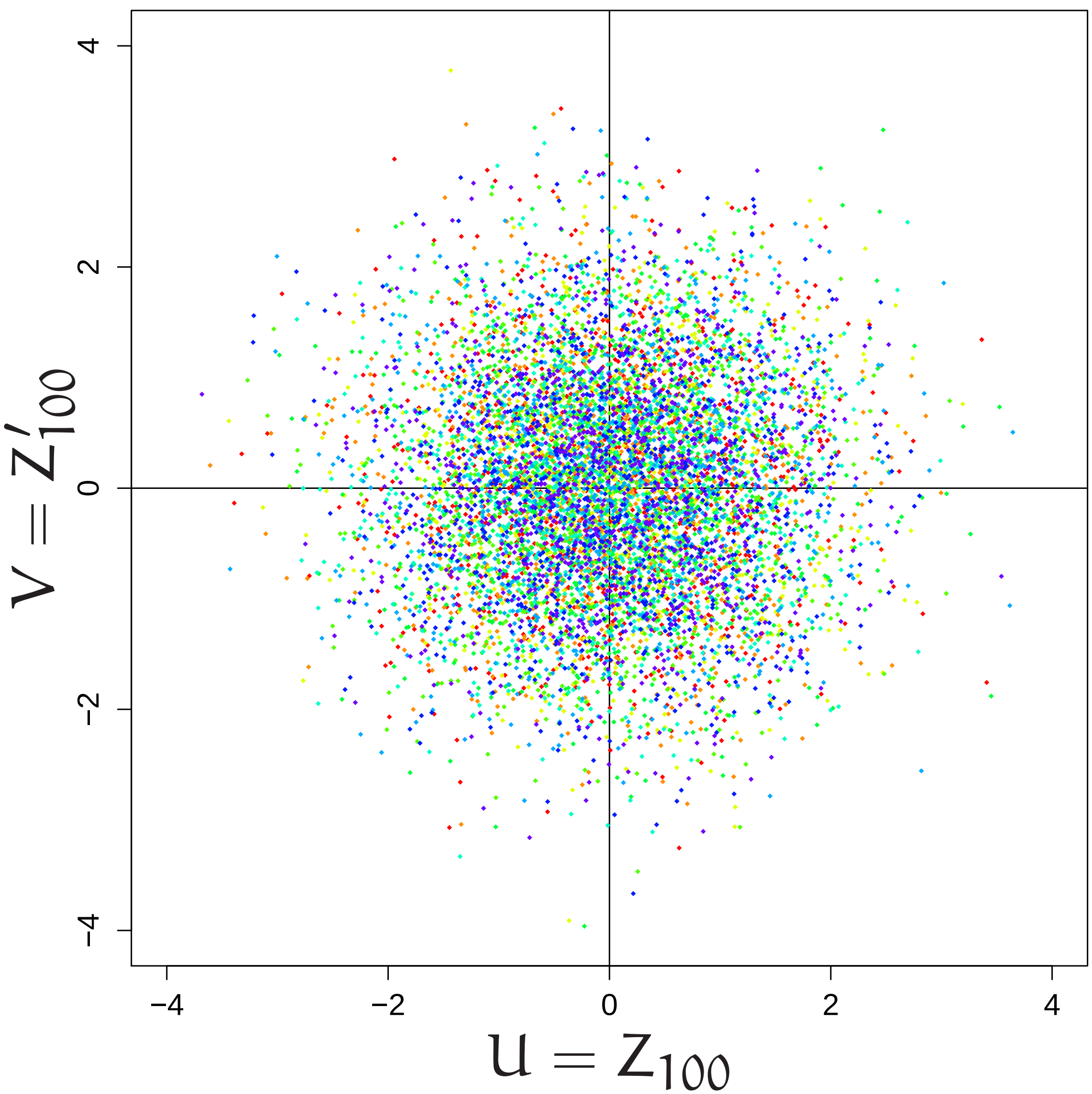
6000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

7000 Simulationen

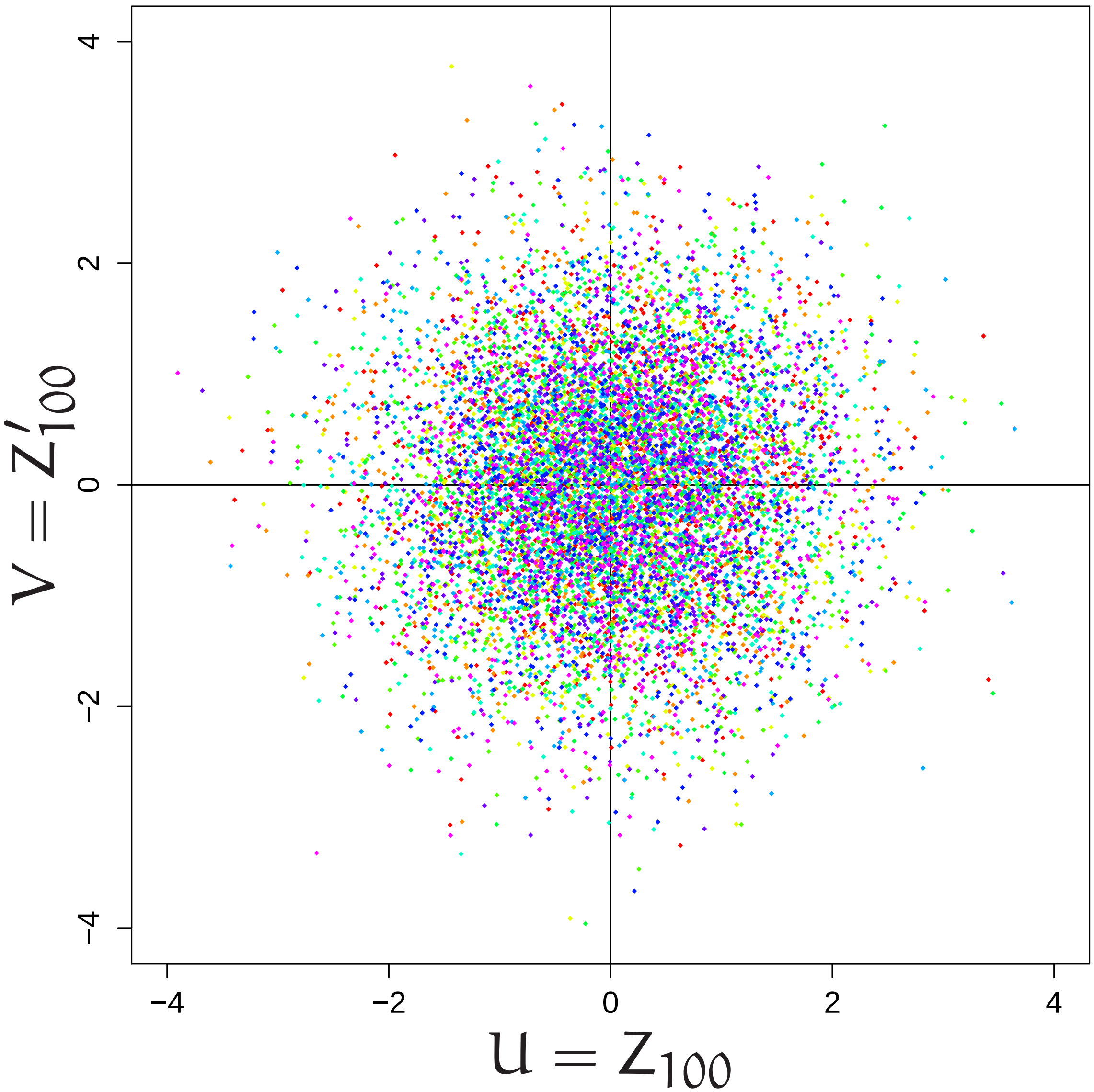


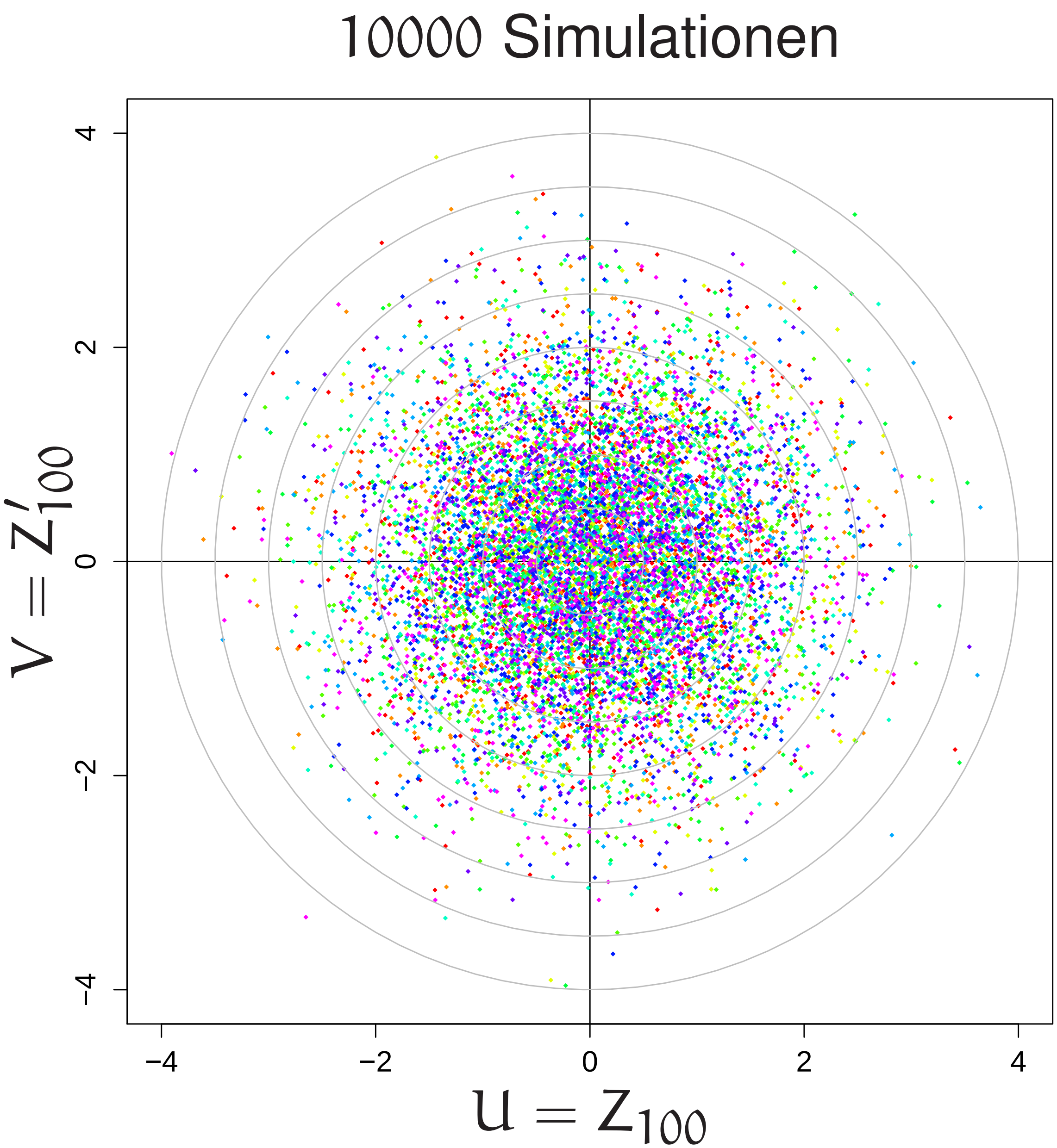

8000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

9000 Simulationen

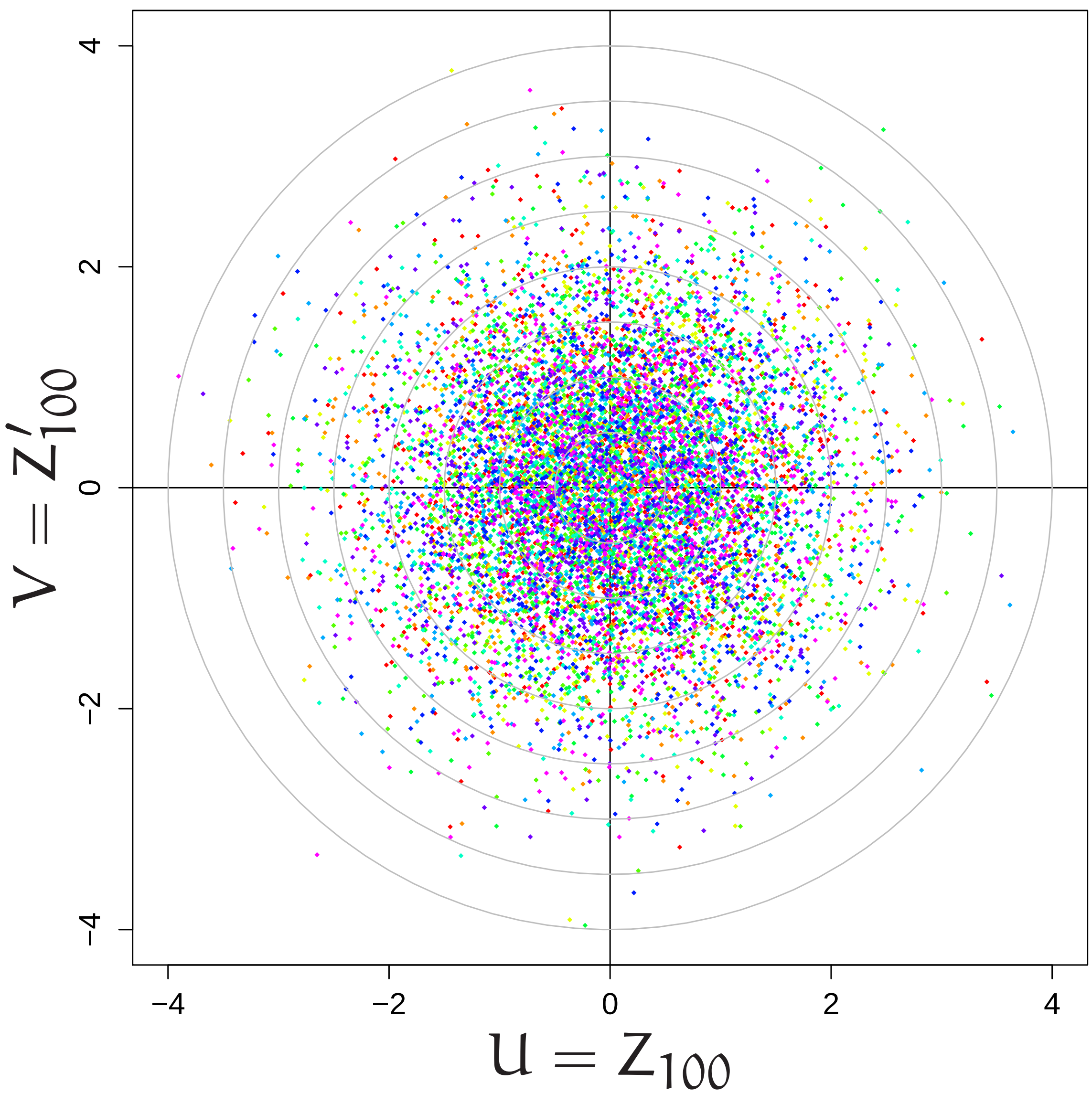


10000 Simulationen




10000 Simulationen
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$
−4
−2
0
2
4
−4
−2
0
2
4

Die Verteilung von (U, V) ist annähernd rotationssymmetrisch!



5. Eine Charakterisierieung der zweidimensionalen Standardnormalverteilung

Behauptung:

Aus “U und V unabhängig und identisch verteilt’

und

“Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch”

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = h(a)\,h(b), \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a := 0, b := r$$

$$g(r) = h(0) \cdot h(r)$$

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

Denn

$$e^{-a^2} e^{-b^2} = 1 \cdot e^{-(a^2+b^2)}$$

$$h(a)\,h(b) = h(0)\,h(\sqrt{a^2+b^2})$$

Wie sieht die allgemeine Lösung aus?

$w(x) := h(\sqrt{|x|})$ erfüllt

$$w(a^2)w(b^2) = w(0)w(a^2+b^2)$$

$$w(u)w(v) = k_0 w(u+v), \quad u, v \geq 0$$

hat als allgemeine Lösung

$$w(x) = k_0 e^{-k_1 x}$$

$$h(x) = k_0 e^{-k_1 x^2}$$

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).

6. Rückblick und Einordnung:

Münzwurf und Zentraler Grenzwertsatz

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $\ell < r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [\ell, r]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [\ell, r]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Ist X_i eine Bernoullifolge (mit $\mu := p$ und $\sigma^2 := pq$), so ergibt sich der alte Satz von de Moivre und Laplace.

7. Zentraler Grenzwertsatz:

Botschaft und Ausblick

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,
sowohl was die Unabhängigkeit,
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Eine Botschaft zum Mitnehmen ins Leben:

“Die Summe von vielen kleinen,

annähernd unabhängigen Zufallsvariablen

ist annähernd normalverteilt.”

8. Das Schwache Gesetz der großen Zahlen

Das Schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt sogar für jede Folge von

paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen

mit ein- und demselben Erwartungswert μ

und ein-und derselben Varianz σ^2.

Dahinter steckt,

dass der Erwartungswert von $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ gleich μ bleibt

und seine Standardabweichung klein wird, nämlich $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Der (einfache) Beweis des

Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen

beruht auf der

Chebyshev-Ungleichung (VI 5b/8):

Für eine reellwertige Zufallsvariable X mit endlichem

Erwartungswert gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbf{Var}[X]}$$

Schwaches Gesetz der Großen Zahlen

(Buch S. 74)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertig,

mit demselben endlichem Erwartungswert μ

und derselben endlicher Varianz, und sie seien unkorreliert.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) = 0 \,.$$

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \mu\,,$$
$$\mathbf{Var}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n}\,.$$

Die Chebyshev-Ungleichung, angewandt auf

$(X_1 + \cdots + X_n)/n$ ergibt

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{\varepsilon^2 n}\,.$$

Die Behauptung folgt nun mit $n \to \infty$. $\square$

Im Schwachen Gesetz der Großen Zahlen

treffen wir auf die sogenannte

stochastische Konvergenz von Zufallsvariablen:

Definition: Seien $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariable. Man sagt

Y_n **konvergiert** für $n \to \infty$ **stochastisch** gegen Y,

wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das Schwache Gesetz kompakt formuliert:

Unter den angegebenen Voraussetzungen

(paarweise Unkorreliertheit, gleicher Erwartungswert, gleiche Varianz)

konvergiert die Folge der Mittelwerte

stochastisch gegen den Erwartungswert.

9. Reprise aus Vorlesung 3a:

Wie erlebt man den Erwartungswert?

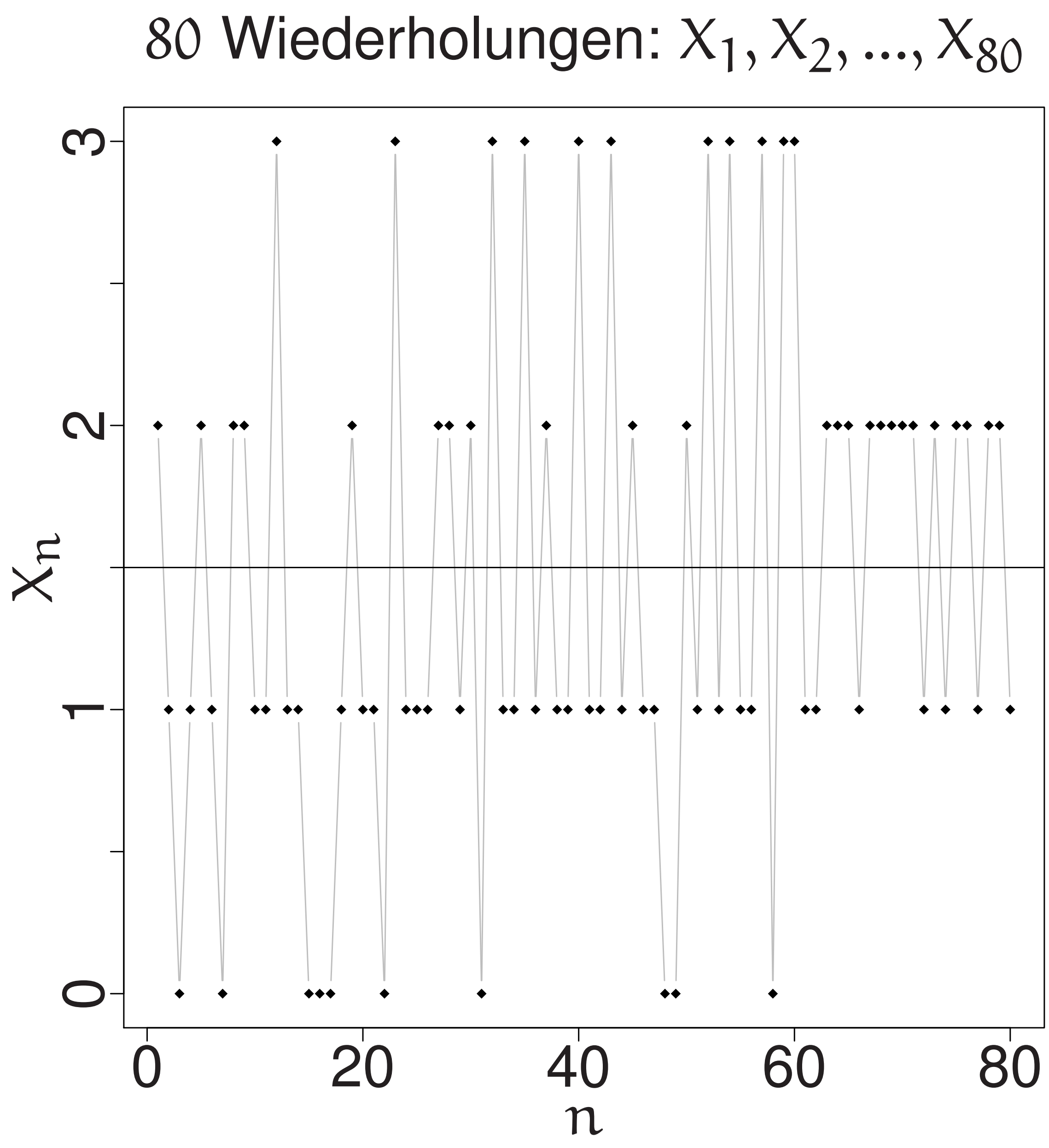
Ein Wiedersehen von ein paar früheren Folien:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

X:= Anzahl der Erfolge.

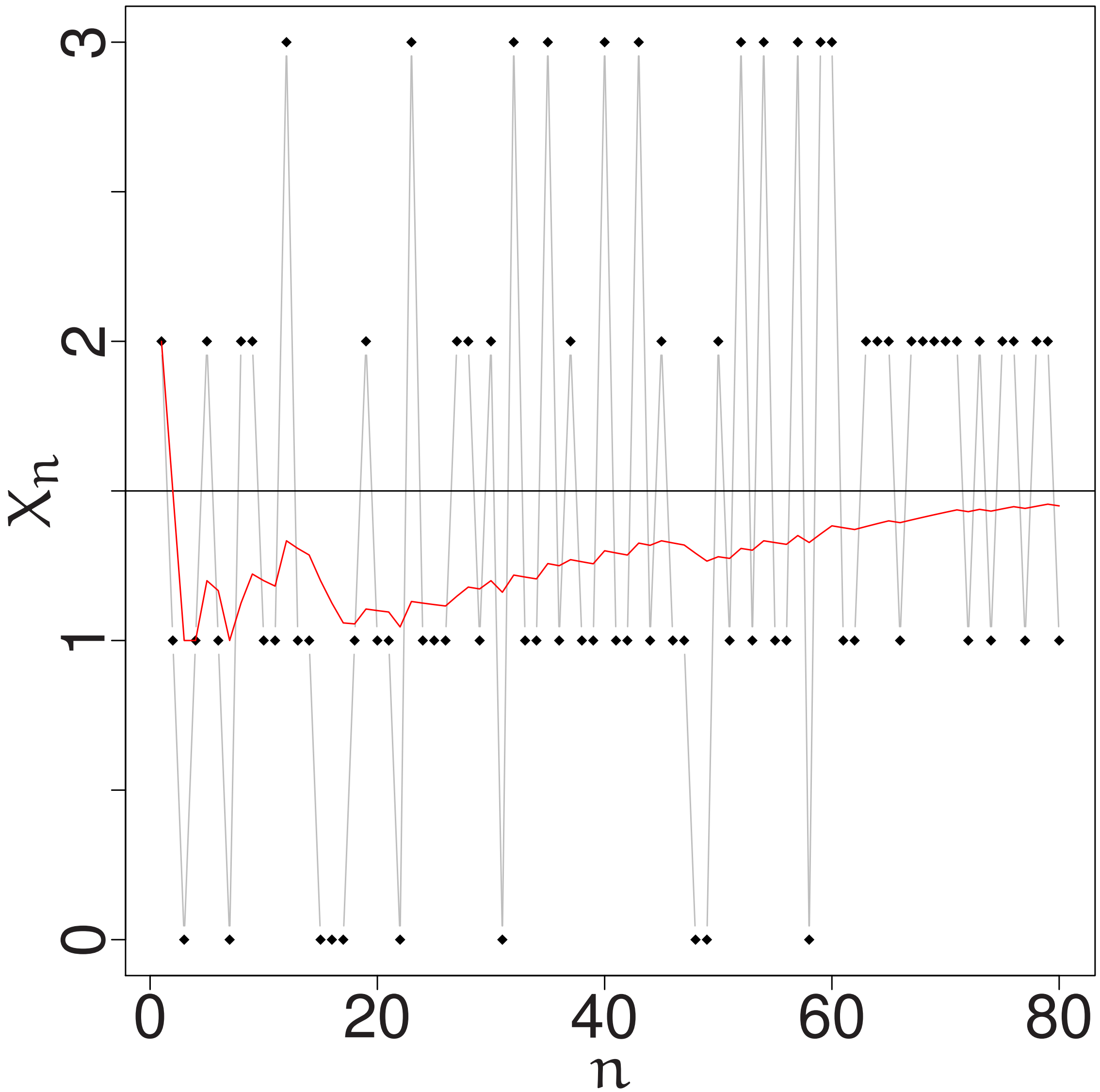
“Wie erlebt man den Erwartungswert?”

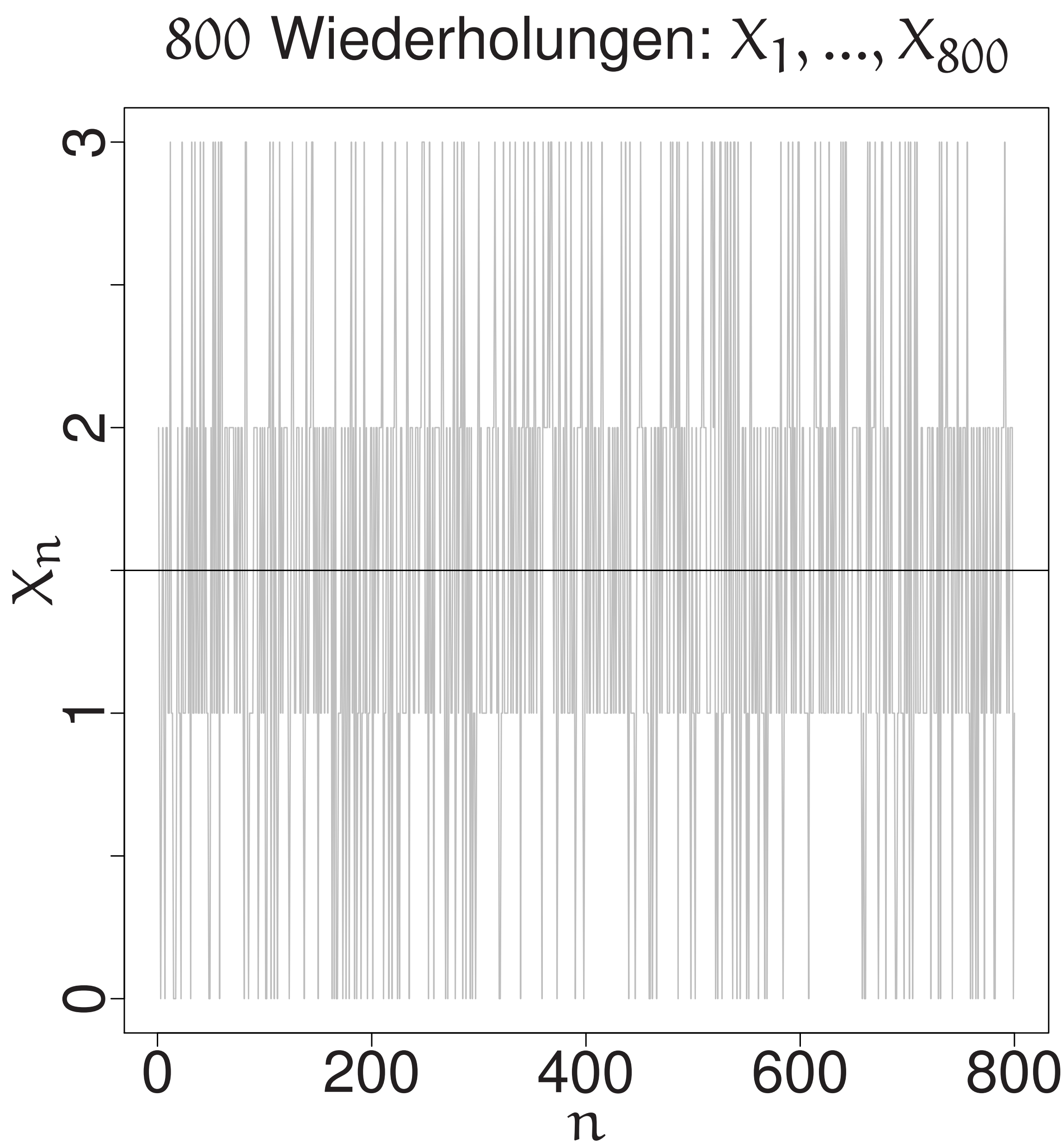
Durch wiederholtes Werfen der drei Münzen!



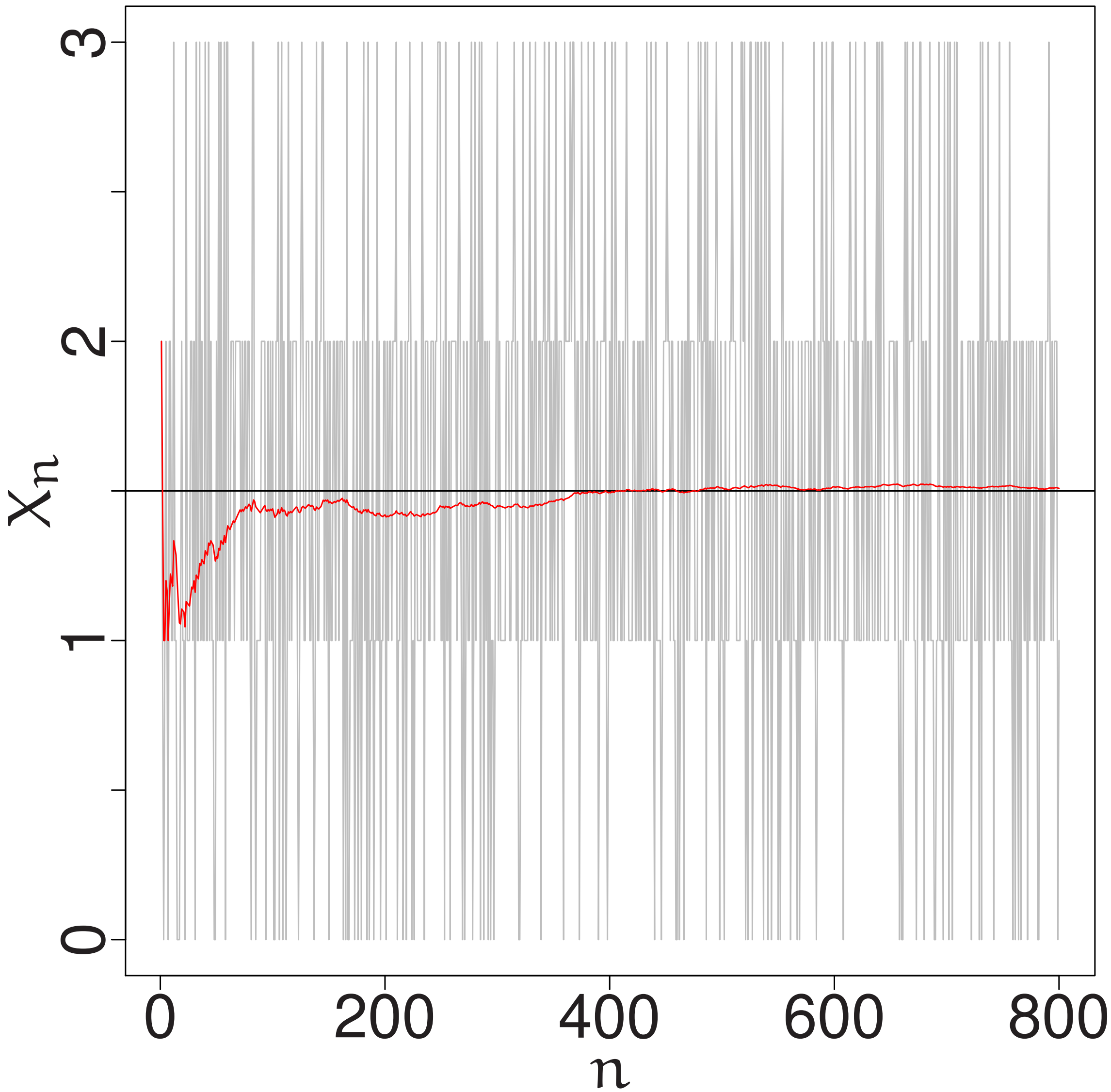
80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$
X_n
n
0
1
2
3
0
20
40
60
80

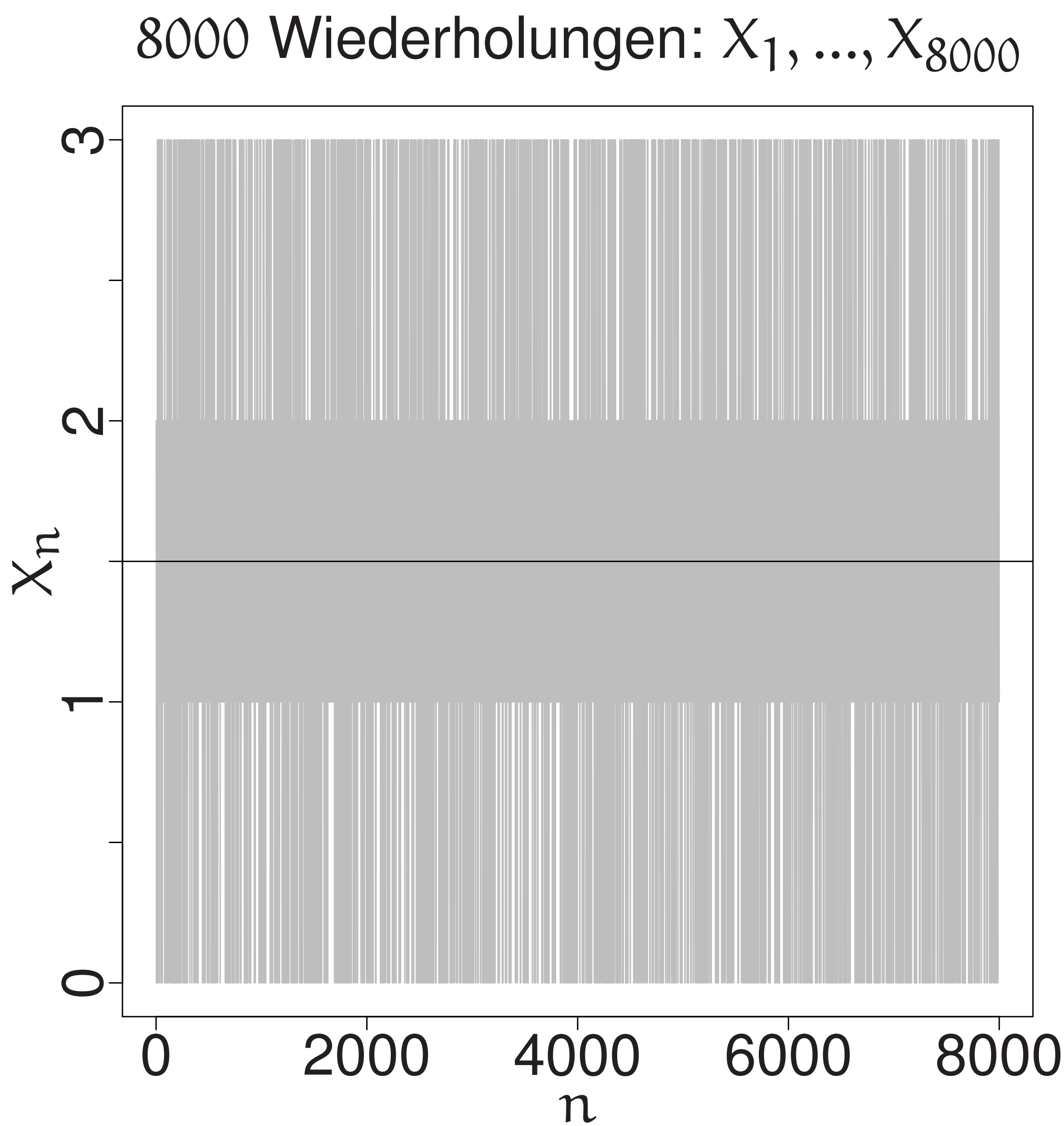
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$$

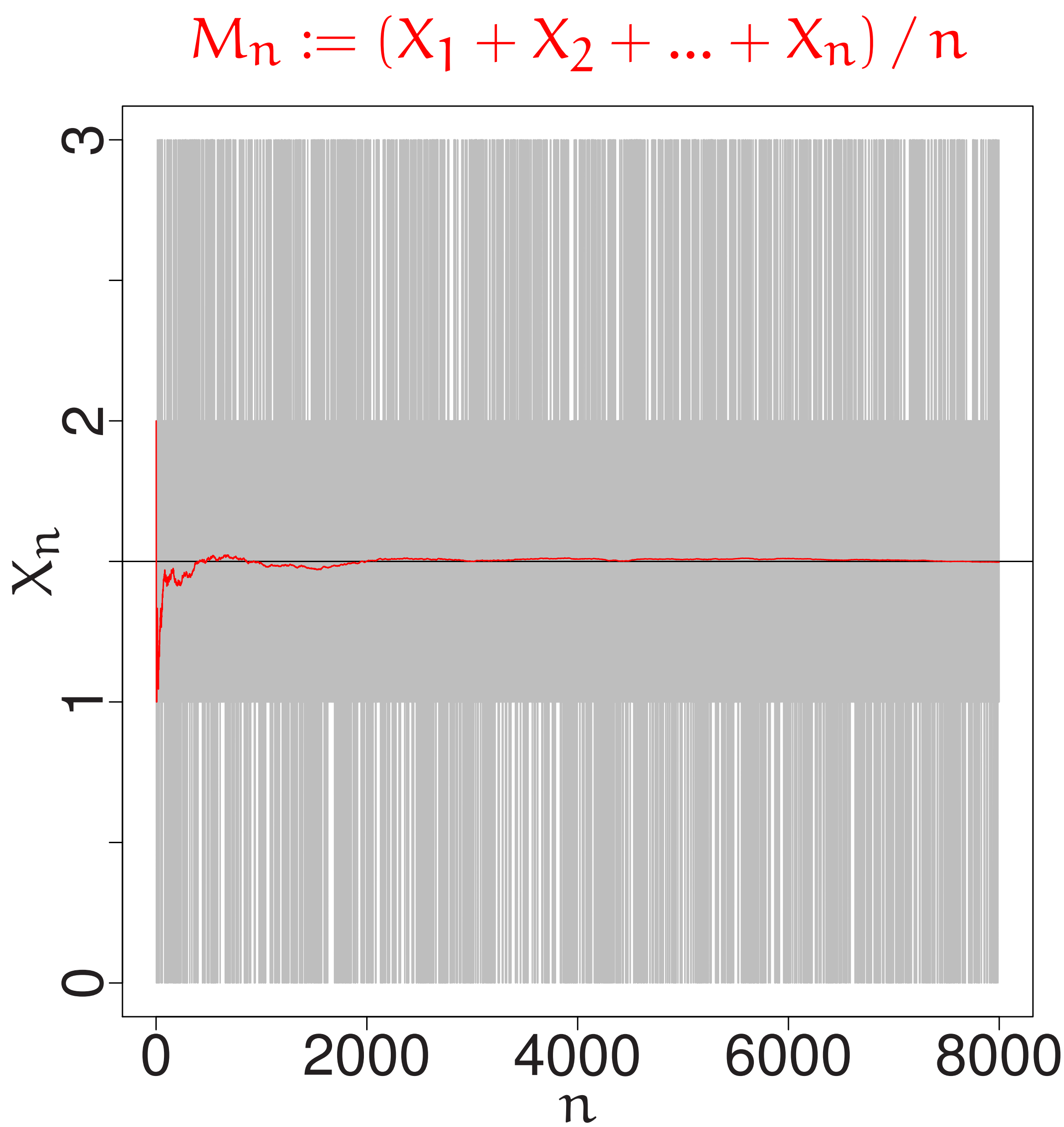



800 Wiederholungen: $X_1, ..., X_{800}$
X_n
0
1
2
3
0
200
400
600
800
n

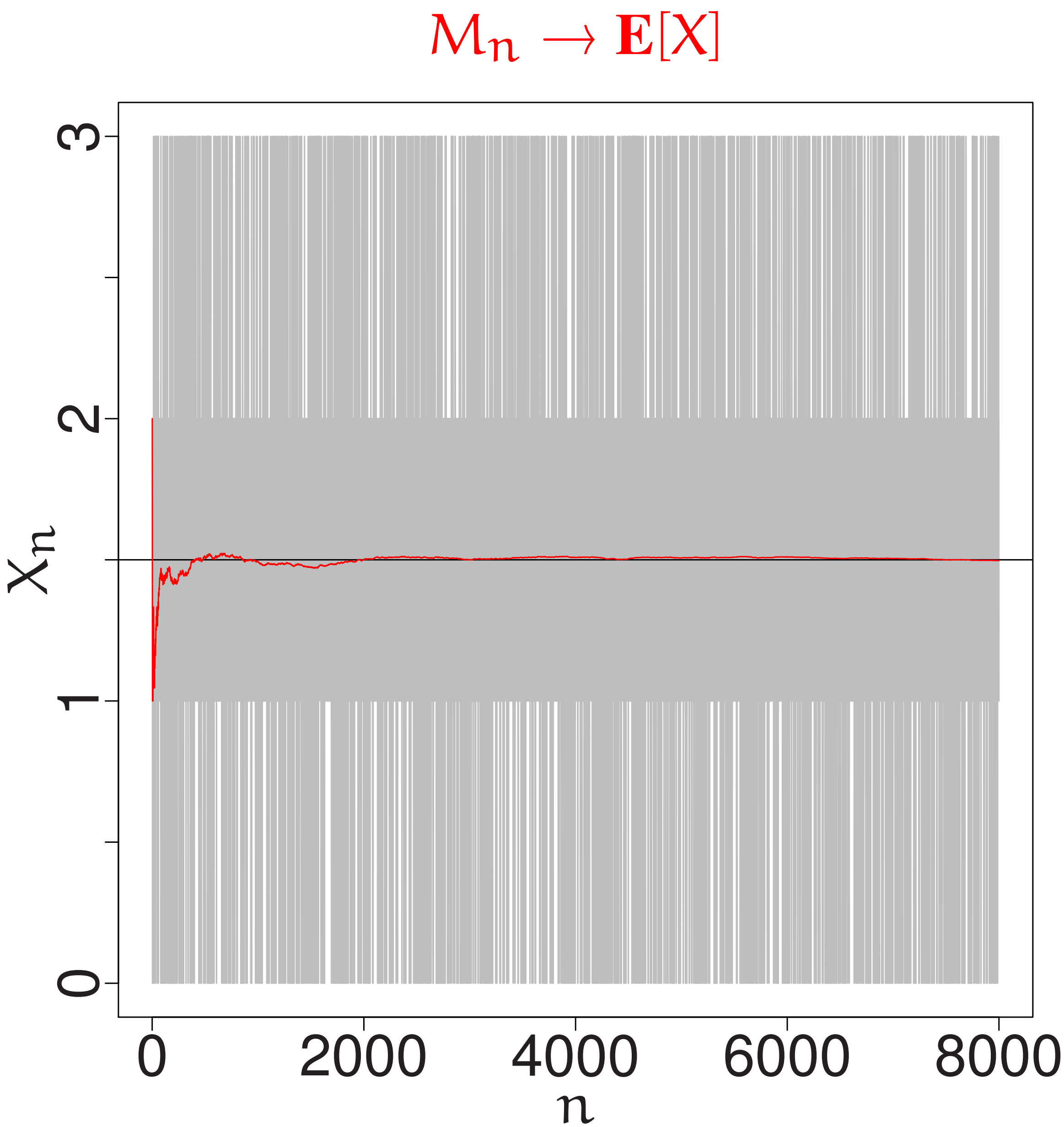
$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) / n$




8000 Wiederholungen: $X_1, \ldots, X_{8000}$
X_n
0
1
2
3
0
2000
4000
6000
8000
n



$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) / n$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n



$M_n \to \mathbf{E}[X]$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen wurde von Jakob Bernoulli im Münzwurfmodell endeckt.