

# Vorlesung 7a

Unabhängigkeit bei Dichten

und die mehrdimensionale  
Standardnormalverteilung

# 1. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für Zufallsvariable mit Dichten  
ist die Unabhängigkeit von  $X_1$  und  $X_2$   
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2) da_1 da_2 = f_1(a_1) da_1 f_2(a_2) da_2$$

Allgemeiner gilt der

**Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten**

$X_1, \dots, X_n$  seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \dots, f_n$  seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i)  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,

und  $X_i$  hat die Dichte  $f_i(a_i) da_i, \quad i = 1, \dots, n.$

(ii)  $(X_1, \dots, X_n)$  hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

## 2. Die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat

$X_1, X_2$  seien unabhängig und uniform verteilt auf  $[0, 1]$ .

Dann hat  $(X_1, X_2)$  die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1) da_1 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2) da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(a_1, a_2) da_1 da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

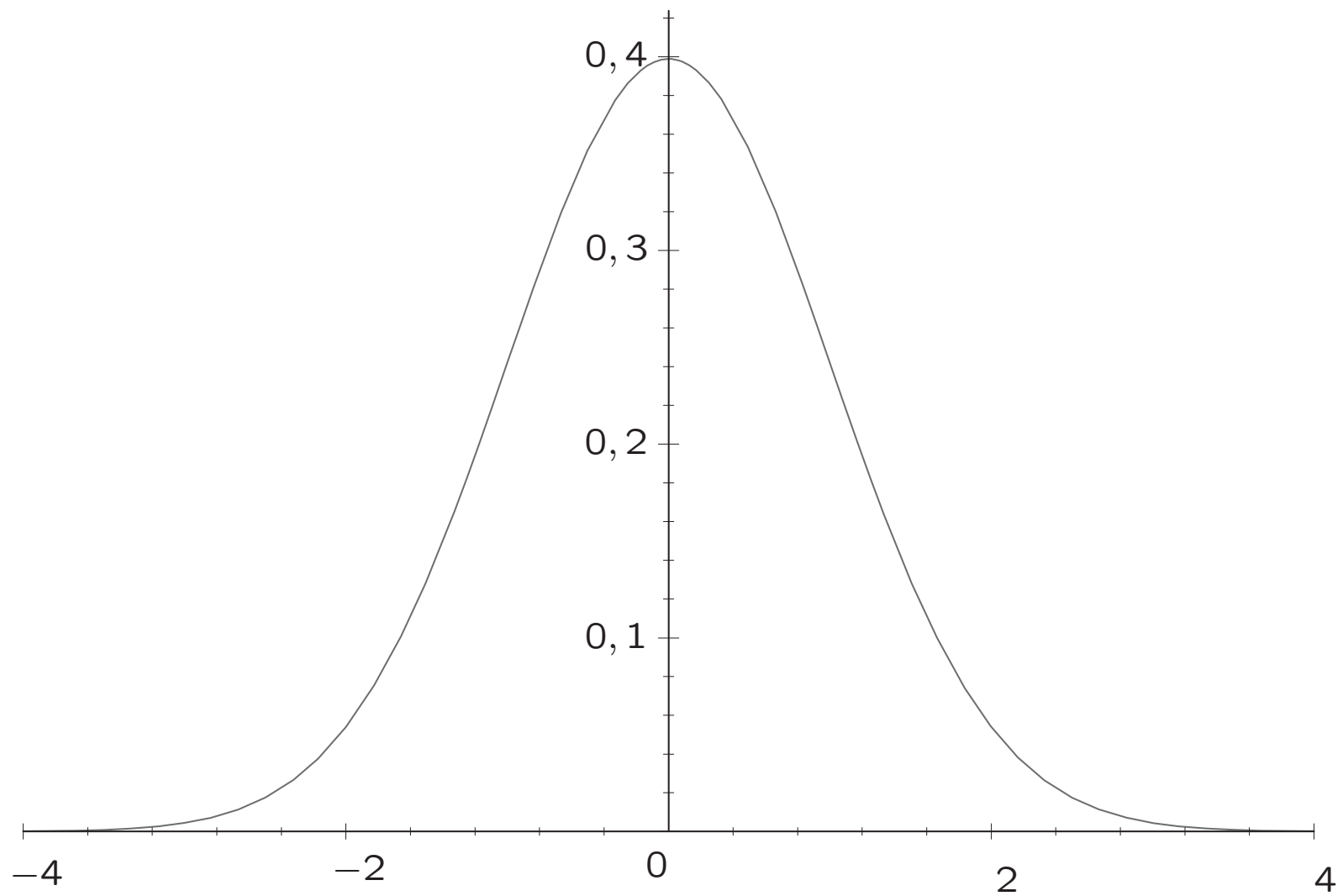
### 3. Die Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}$

Eine  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable  $Z$  mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.





## 4. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

Wichtige Beobachtung:

$Z_1, Z_2$  seien standard-normalverteilt und unabhängig.

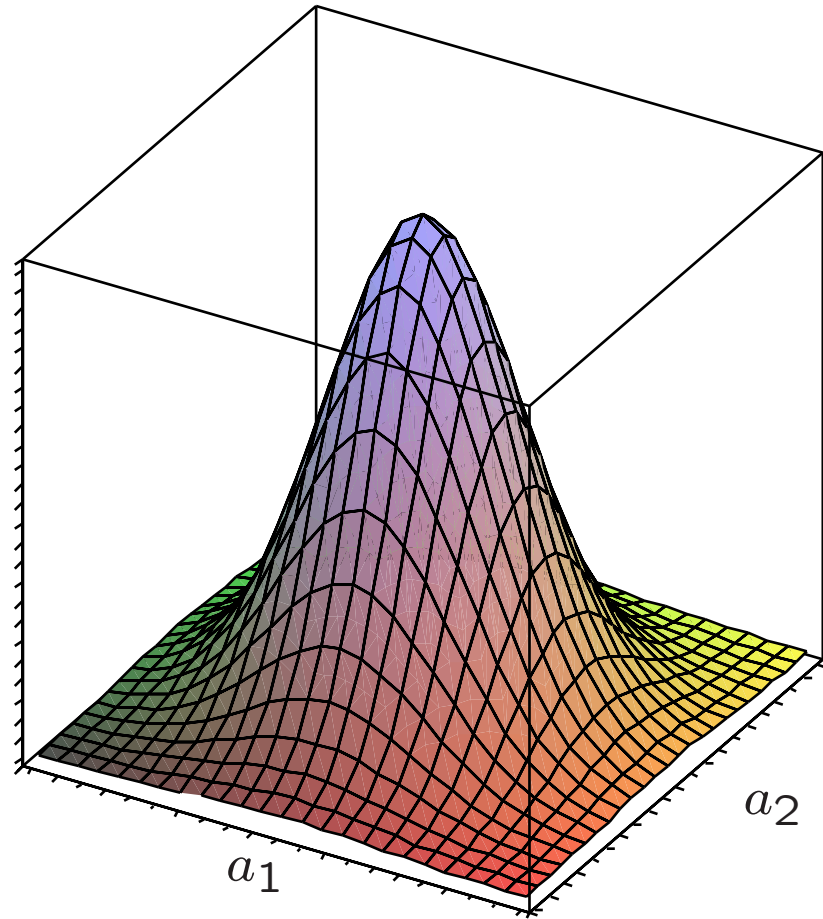
$(Z_1, Z_2)$  hat dann die Dichte

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1) da_1 \varphi(a_2) da_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2} da_1 da_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Die Dichte ist rotationssymmetrisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



## Definition:

Eine  $\mathbb{R}^2$ -wertige Zufallsvariable  $Z$  mit Dichte

$$f(a) da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf  $\mathbb{R}^2$** .

## 5. Zwei Folgerungen aus der Rotationssymmetrie

a) Fassen wir das zufällige Zahlenpaar  $Z = (Z_1, Z_2)$  auf als die (Standard-)Koordinaten eines zufälligen Vektors

$$\vec{Z} \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

dann folgt aus der Rotationssymmetrie der Verteilung von  $\vec{Z}$ :

Für jeden Einheitsvektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  ist die  $\vec{u}$ -Koordinate von  $\vec{Z}$  standard-normalverteilt in  $\mathbb{R}$ .

Anders gesagt:

Sind  $Z_1, Z_2$  unabhängig und  $N(0, 1)$ -verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar  $(\tau_1, \tau_2)$  mit  $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$ :

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$  ist  $N(0, 1)$ -verteilt.



b) Ein Beispiel:

$(X, Y)$  sei standard-normalverteilt auf  $\mathbb{R}^2$ ,  
 $P$  sei ein zufälliger Punkt mit den Koordinaten  $(X, Y)$ .

Wie wahrscheinlich ist es, dass  
der Abstand von  $P$  zum Koordinatenursprung  $\leq 2$  ist?

Sei  $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$   
die Kreisfläche um den Ursprung mit Radius 2.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

Wie rechnet man das aus?

Ausgedrückt in Radius-Winkel-Koordinaten  $(r, \theta)$

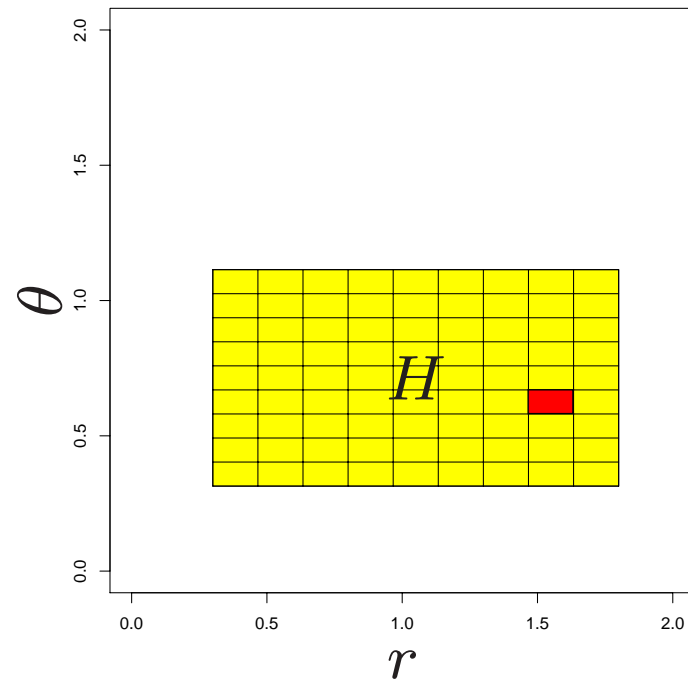
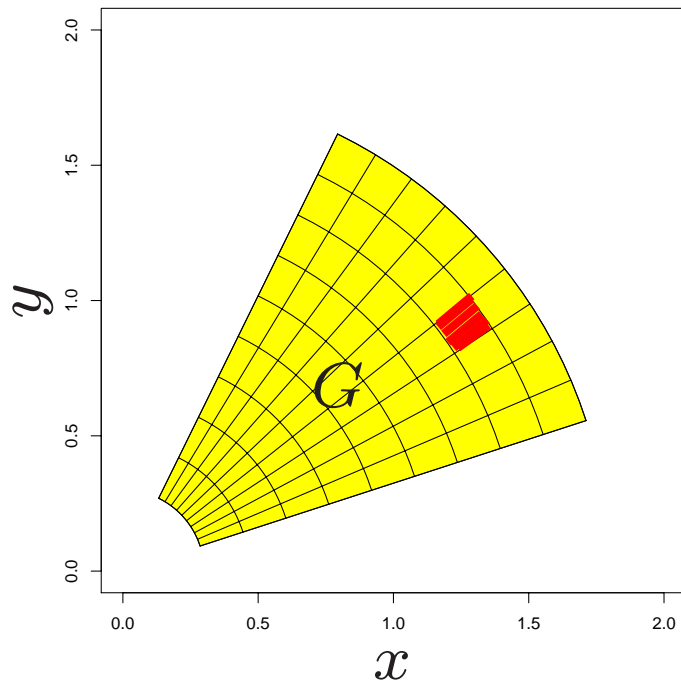
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

entspricht  $K$  dem Rechteck

$$B := \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, 2] \times [0, 2\pi).$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_H e^{-r^2/2} r dr d\theta$$



Speziell mit  $G := K$  und  $H := B$ :

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{-r^2/2} r dr$$

$$= (-e^{-r^2/2}) \Big|_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - 0.14 = 0.86$$

Speziell mit  $G := K$  und  $H := B$ :

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{-r^2/2} r dr$$

$$= (-e^{-r^2/2}) \Big|_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - 0.14 = 0.86$$

## 6. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

Wir erinnern an den  
**Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten**

$X_1, \dots, X_n$  seien reellwertige Zufallsvariable,  
 $f_1, \dots, f_n$  seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i)  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,  
und  $X_i$  hat die Dichte  $f_i(a_i) da_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

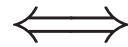
(ii)  $(X_1, \dots, X_n)$  hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

## Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$ . Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$  sind unabhängig und  $N(0, 1)$ -verteilt



$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|a|^2}{2}\right) da, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{mit } |a|^2 := a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

$Z$  heißt dann *standard-normalverteilt auf*  $\mathbb{R}^n$ .



Analog zum Fall  $n = 2$  gilt:

Ist  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  standard-normalverteilt auf  $\mathbb{R}^n$   
und sind  $\tau_1, \dots, \tau_n$  reelle Zahlen mit  $\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2 = 1$ ,  
dann ist  $Y := \tau_1 Z_1 + \dots + \tau_n Z_n$  **N(0, 1)-verteilt.**

( Denn  $Y$  ist die Koordinate von  $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \dots + Z_n \vec{e}_n$   
zum Einheitsvektor  $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \dots + \tau_n \vec{e}_n$  .)

Insbesondere ergibt sich:

$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}$  ist N(0, 1)-verteilt.