

Vorlesung 7a

Unabhängigkeit bei Dichten

und die mehrdimensionale
Standardnormalverteilung

1. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für Zufallsvariable mit Dichten
ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2) da_1 da_2 = f_1(a_1) da_1 f_2(a_2) da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

X_1, \dots, X_n seien reellwertige Zufallsvariable,

f_1, \dots, f_n seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) X_1, \dots, X_n sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i) da_i, \quad i = 1, \dots, n.$

(ii) (X_1, \dots, X_n) hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

2. Die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1) da_1 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2) da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(a_1, a_2) da_1 da_2,$$

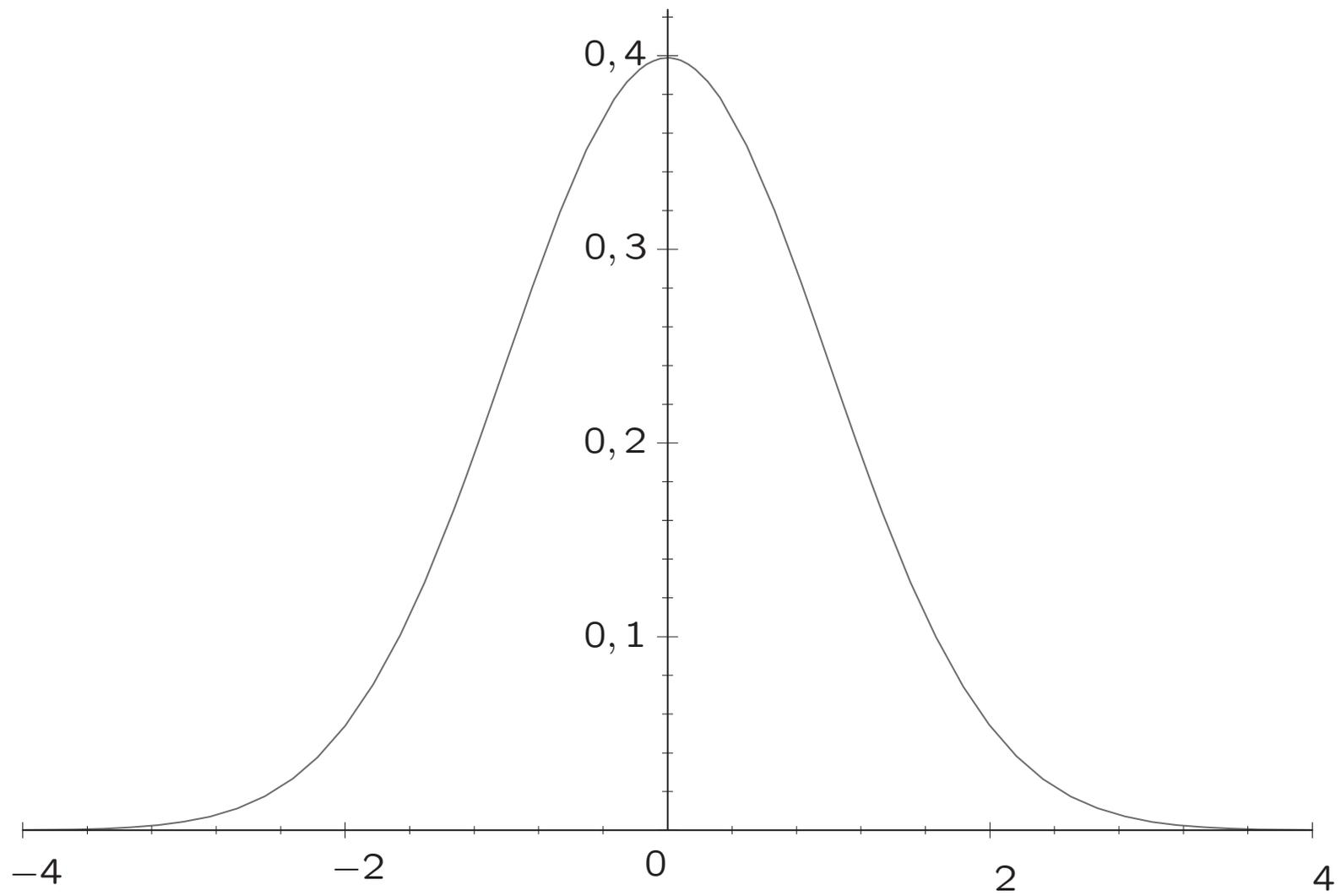
und ist somit uniform verteilt auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

3. Die Standard-Normalverteilung auf \mathbb{R}

Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.



4. Die Standardnormalverteilung auf \mathbb{R}^2

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

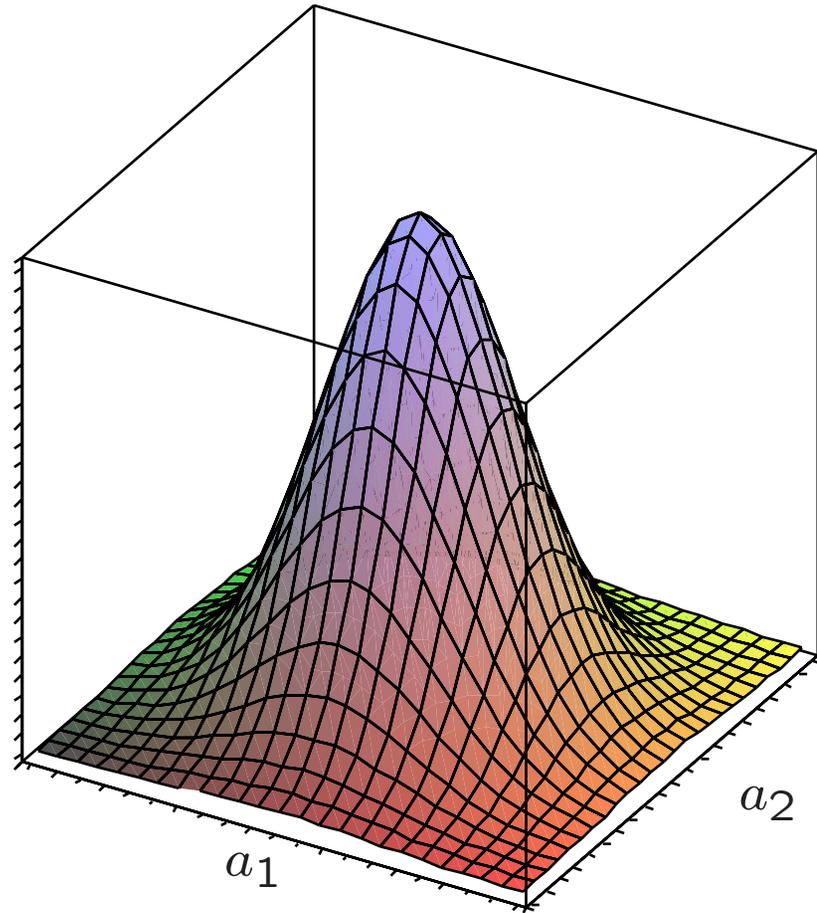
(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1) da_1 \varphi(a_2) da_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2} da_1 da_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Die Dichte ist rotationssymmetrisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine \mathbb{R}^2 -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a) da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^2** .

5. Zwei Folgerungen aus der Rotationssymmetrie

a) Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf als die (Standard-)Koordinaten eines zufälligen Vektors

$$\vec{Z} \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

dann folgt aus der Rotationssymmetrie der Verteilung von \vec{Z} :

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die \vec{u} -Koordinate von \vec{Z} standard-normalverteilt in \mathbb{R} .

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist $N(0, 1)$ -verteilt.

b) Ein Beispiel:

(X, Y) sei standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^2 ,
 P sei ein zufälliger Punkt mit den Koordinaten (X, Y) .

Wie wahrscheinlich ist es, dass
der Abstand von P zum Koordinatenursprung ≤ 2 ist?

Sei $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
die Kreisfläche um den Ursprung mit Radius 2.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

Wie rechnet man das aus?

Ausgedrückt in Radius-Winkel-Koordinaten (r, θ)

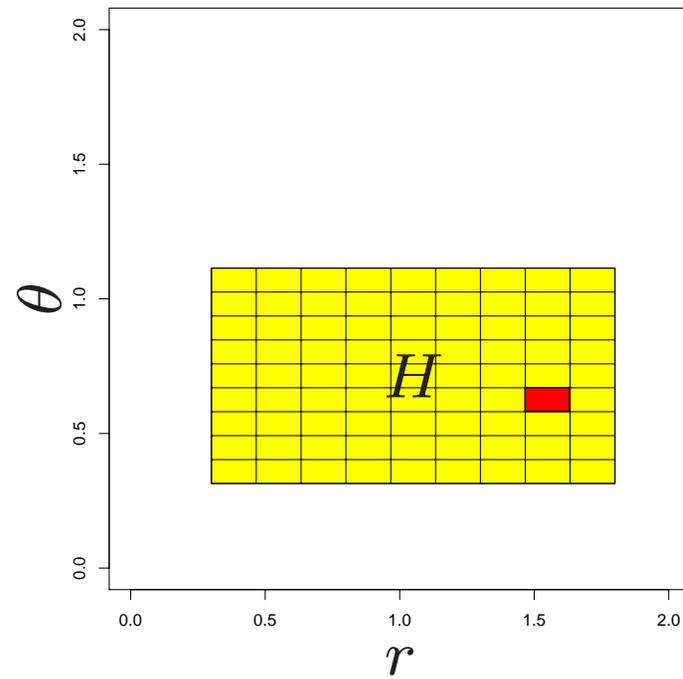
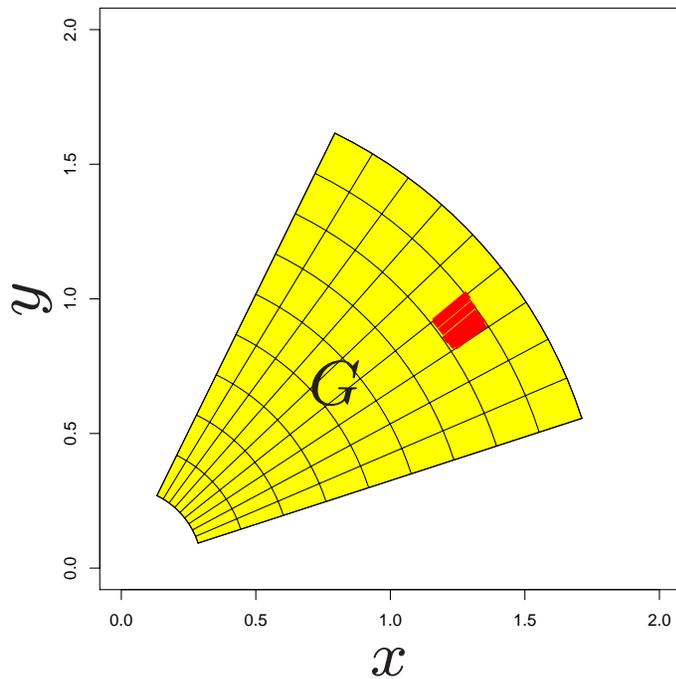
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

entspricht K dem Rechteck

$$B := \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, 2] \times [0, 2\pi).$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_H e^{-r^2/2} r dr d\theta$$



Speziell mit $G := K$ und $H := B$:

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{-r^2/2} r dr$$

$$= (-e^{-r^2/2}) \Big|_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - 0.14 = 0.86$$

Speziell mit $G := K$ und $H := B$:

$$\iint_K \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_B \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{-r^2/2} r dr$$

$$= (-e^{-r^2/2}) \Big|_0^2 = 1 - e^{-2} = 1 - 0.14 = 0.86$$

6. Die Standardnormalverteilung auf \mathbb{R}^n

Wir erinnern an den
Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

X_1, \dots, X_n seien reellwertige Zufallsvariable,
 f_1, \dots, f_n seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) X_1, \dots, X_n sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i) da_i$, $i = 1, \dots, n$.

(ii) (X_1, \dots, X_n) hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

Z_1, \dots, Z_n sind unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt



$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|a|^2}{2}\right) da, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{mit } |a|^2 := a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* \mathbb{R}^n .

Analog zum Fall $n = 2$ gilt:

Ist $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^n
und sind τ_1, \dots, τ_n reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \dots + \tau_n Z_n$ **N(0, 1)-verteilt.**

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \dots + Z_n \vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \dots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}$ ist N(0, 1)-verteilt.