Vorlesung 6b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2: Exponentialverteilung, Normalveretielung

0. Wiederholung der Grundbegriffe

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur

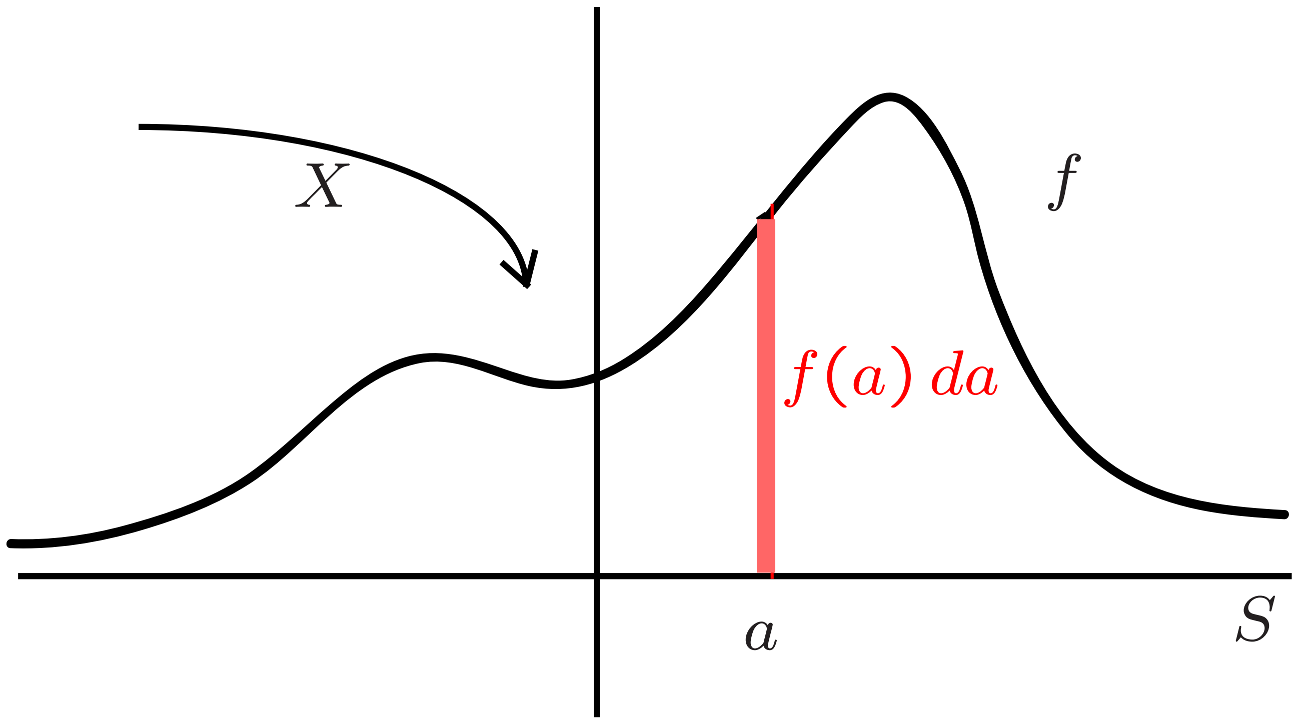
mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$

ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

$$\int_S f(a)\,da = 1.$$



$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

$$\boxed{\int_l^r f(a)\,da = 1}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [c, d]\big) = \int_c^d f(a)\, da\ ,$$

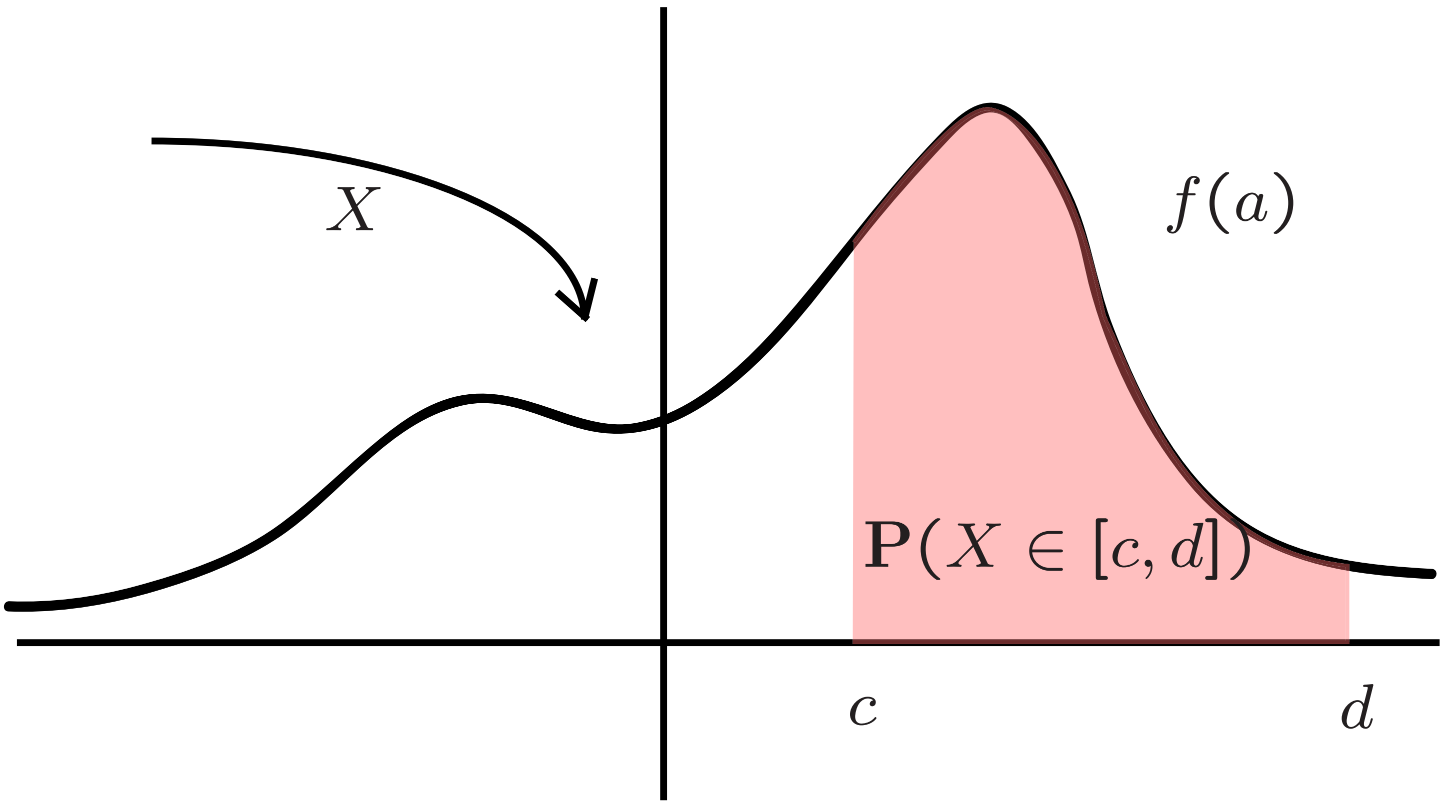
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da\ , \quad a \in S\ ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.



X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [c, d])$
c
d

Definition.

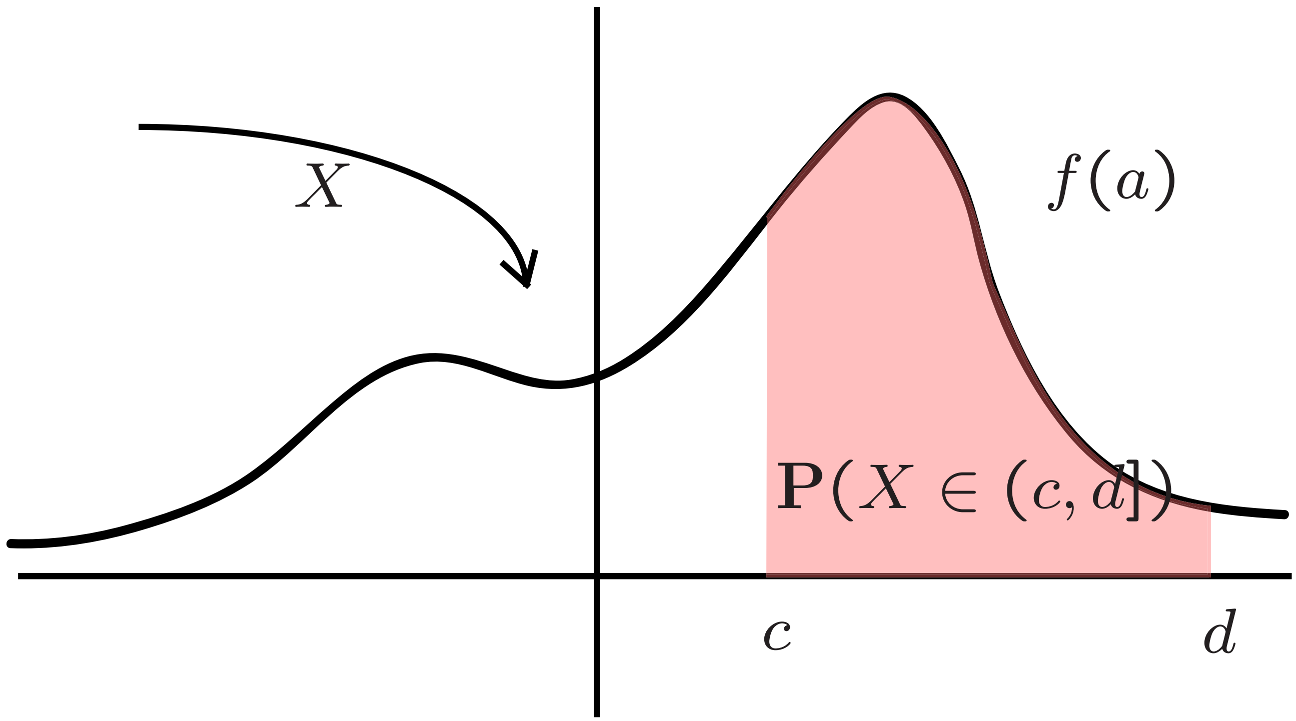
Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Ist f stetig in a, dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$\mathbf{P}(X \leq d) - \mathbf{P}(X \leq c) = \mathbf{P}(c < X \leq d)$$

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(a) da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

Ein Beispiel:

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(-\ln U \leq x)$$
$$= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\, da, \quad x \geq 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

1. Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen mit Dichten

Im Diskreten hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a)\, da$.

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a\, f(a)\, da$$

Im Diskreten hatten wir für $h : S \to \mathbb{R}$

die Transformationsformel

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a)\, f(a)\, da$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

(wobei wir wieder den Fall $\infty - \infty$ ausschließen)

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a-\mu)^2 f(a)\, da.$$

2. Exponentialverteilte Zufallvariable

Definition:

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt,

falls

$$\mathbf{P}(X > t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Y heißt exponentialverteilt mit Parameter λ,

kurz Exp(λ)-verteilt, falls

$$\mathbf{P}(Y > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Es ergibt sich sofort:

Ist X standard-exponentialverteilt, dann ist $\frac{X}{\lambda}$ Exp(λ)-verteilt.

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Die Dichte von Y ist

$$f(a) = \lambda e^{\lambda a} da, \quad a \geq 0.$$

Erwartungswert und Varianz einer standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u' v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also: $\boxed{\mathbf{E}[X] = 1,\ \mathbf{Var}X = 1.}$

Ist X standard-exponentialverteilt, dann ist $\frac{X}{\lambda}$ Exp(λ)-verteilt.

Weil Erwartungswert und Varianz ja nur von der Verteilung abhängen,

fogt für eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable Y:

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var}\, Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sei X standard-exponentialverteiltes und $\lambda > 0$.

Dann hat $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte

$$f(y)dy = \lambda e^{-\lambda y}\,dy, \quad y \geq 0$$

(denn Y ist ja Exp(λ)-verteilt)

Allgemeiner gilt:

3. Dichten von Vielfachen einer Zufallsvariablen

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$F_Y(d) = \mathbf{P}(Y \leq d) = \mathbf{P}(X \leq \lambda d) = F_X(\lambda d),$$

also

$$F'_Y(y) = \lambda F'_X(\lambda y). \quad \square$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Heuristisches Argument:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y))$$

$$= f(\lambda y)\,d(\lambda y)$$

$$= f(\lambda y)\,\lambda\,dy.$$

4. Die Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4b und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt

mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

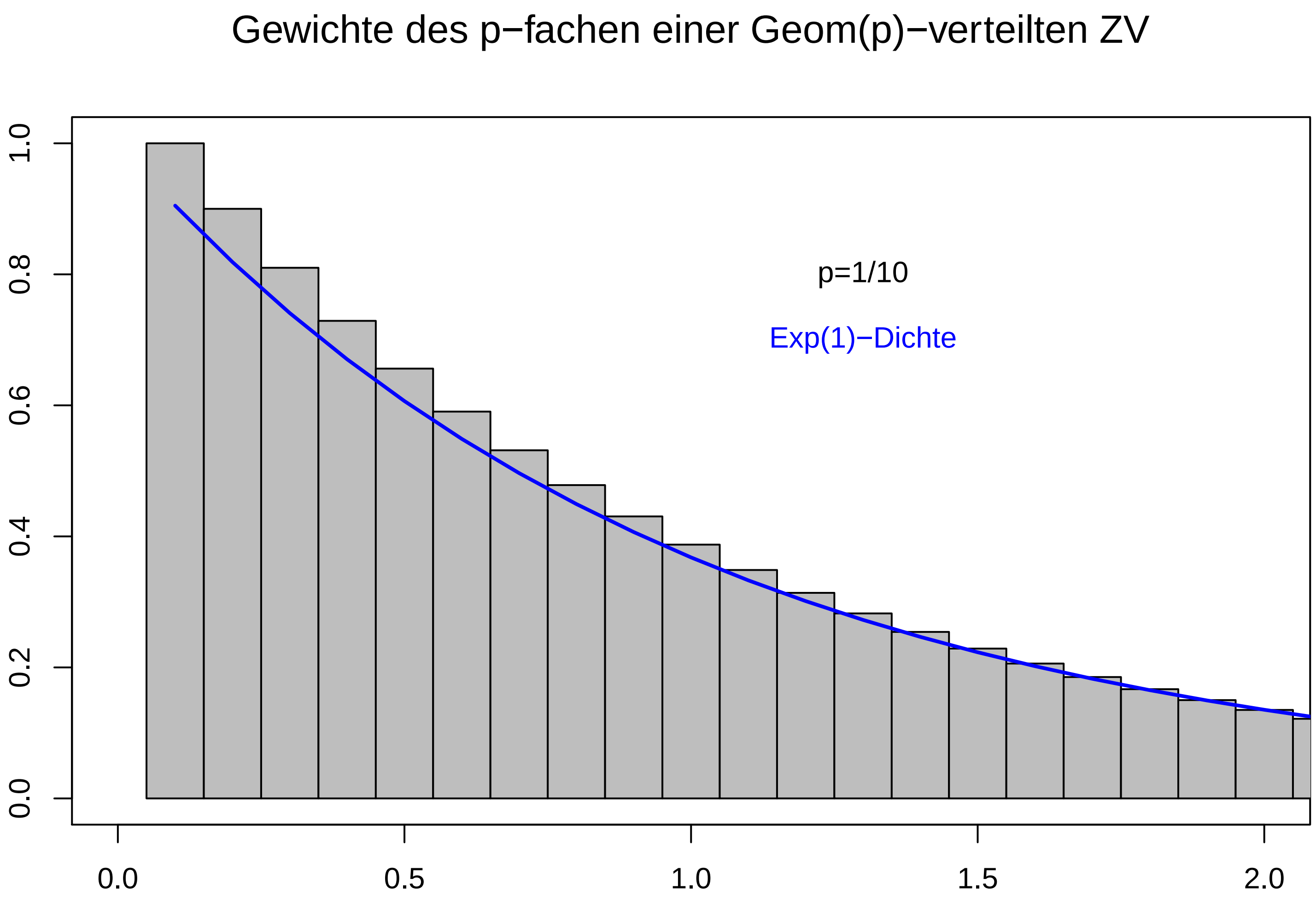
gegen die Zufallsvariable X.

Salopp gesprochen:

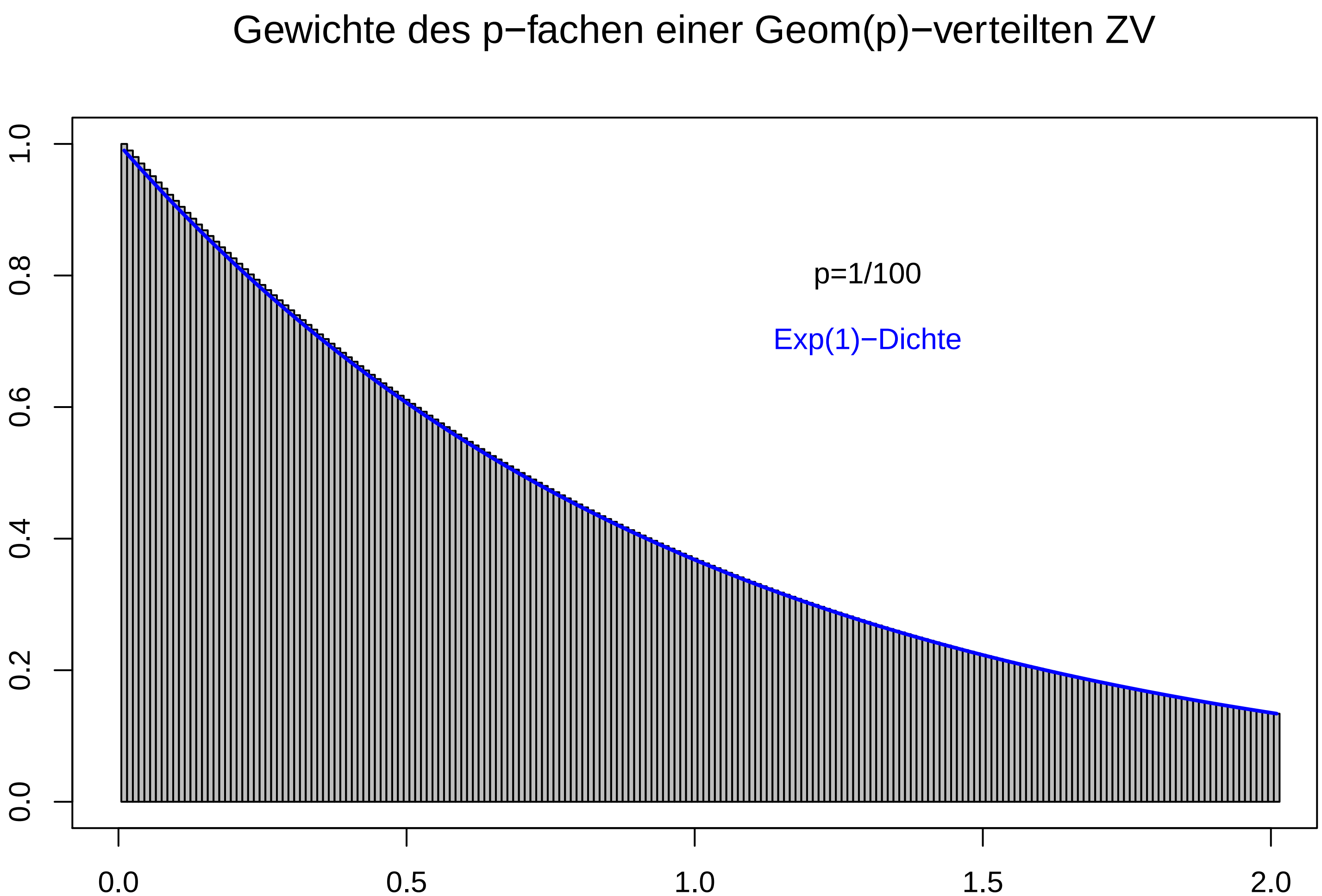
Man holt für kleines p

eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y zurück ins Bild,

indem man pY betrachtet.



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/10
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/100
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

5. Binomialverteilungen

mit großem Erwartungswert und großer Varianz

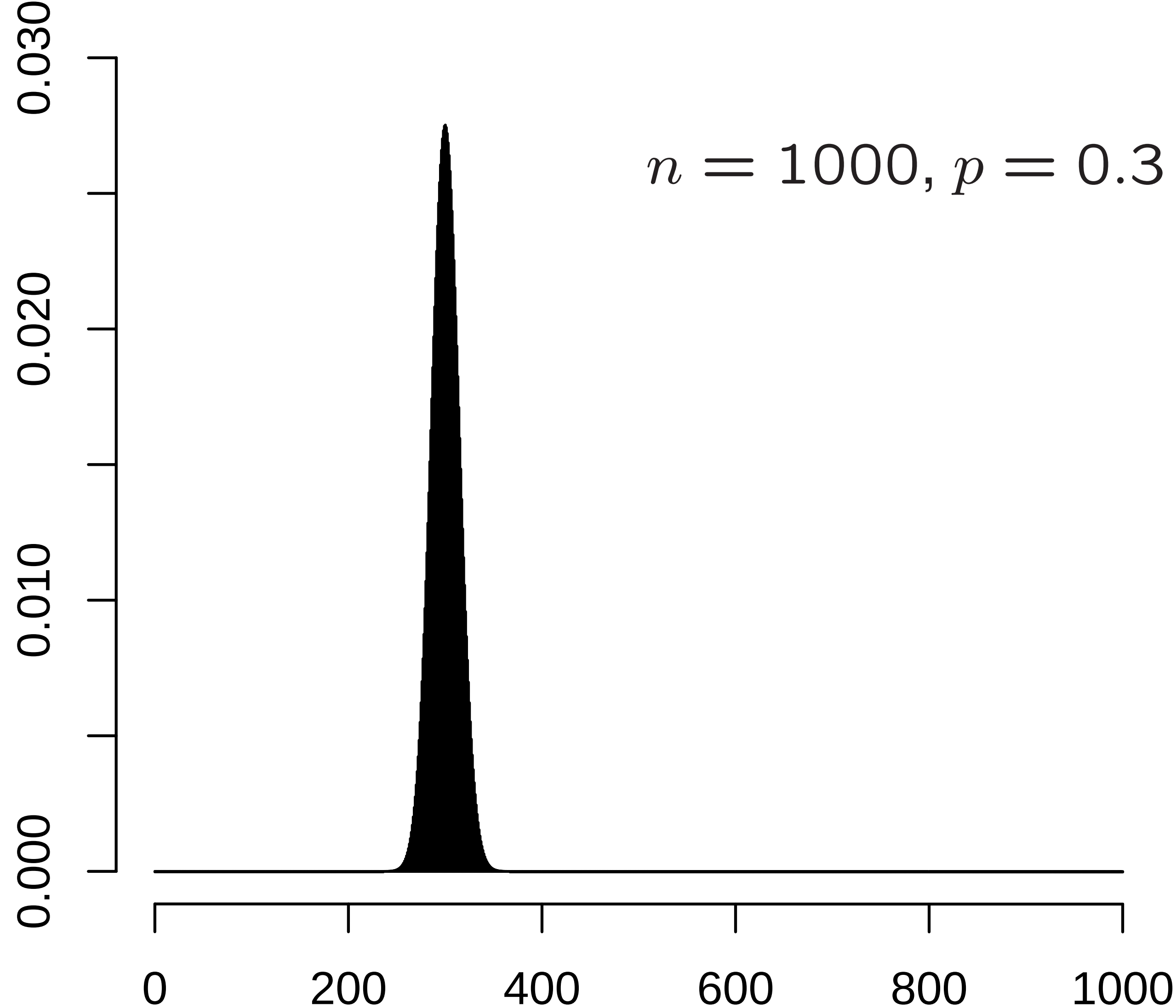
Wie sieht die Bin$(n, 1/2)$-Verteilung

für großes n aus,

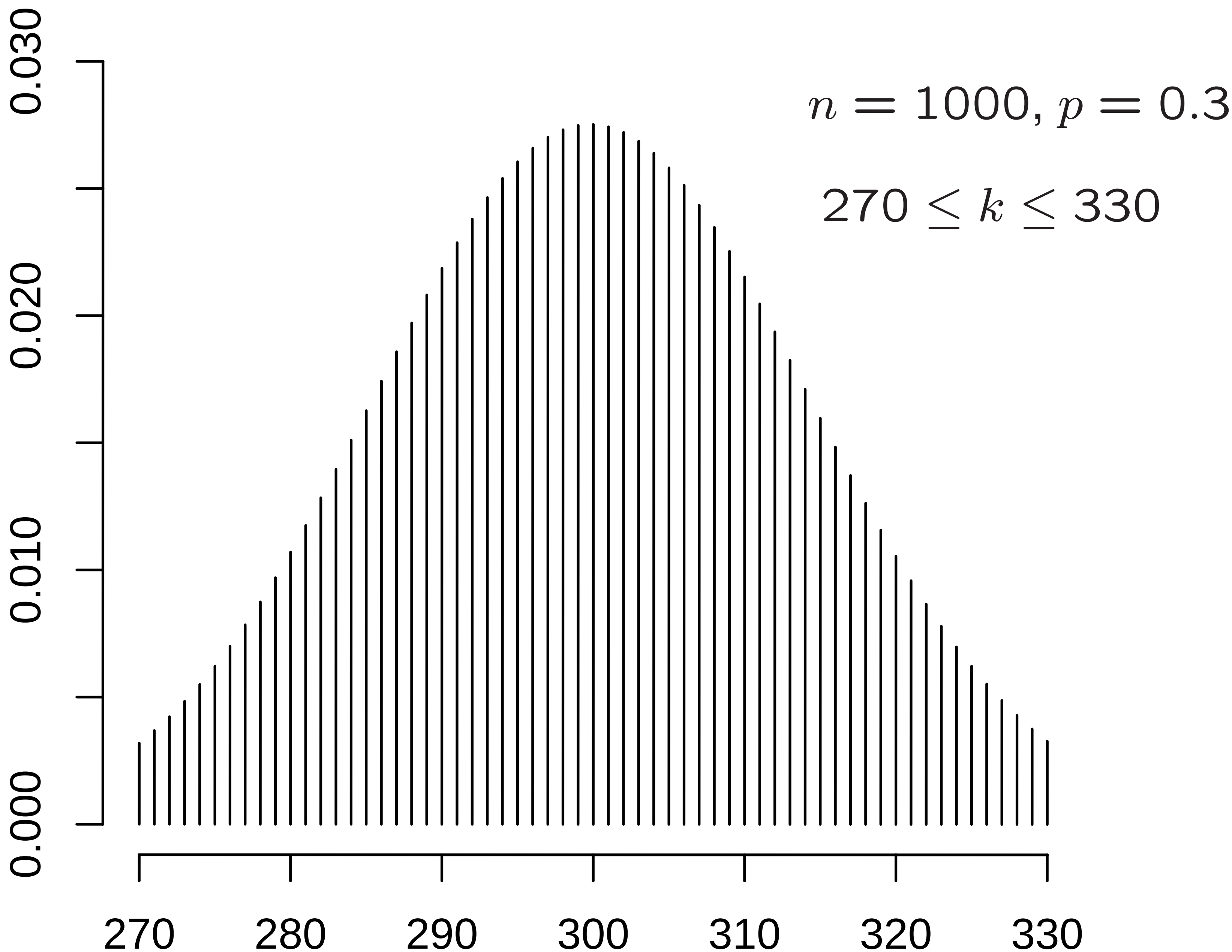
oder allgemeiner

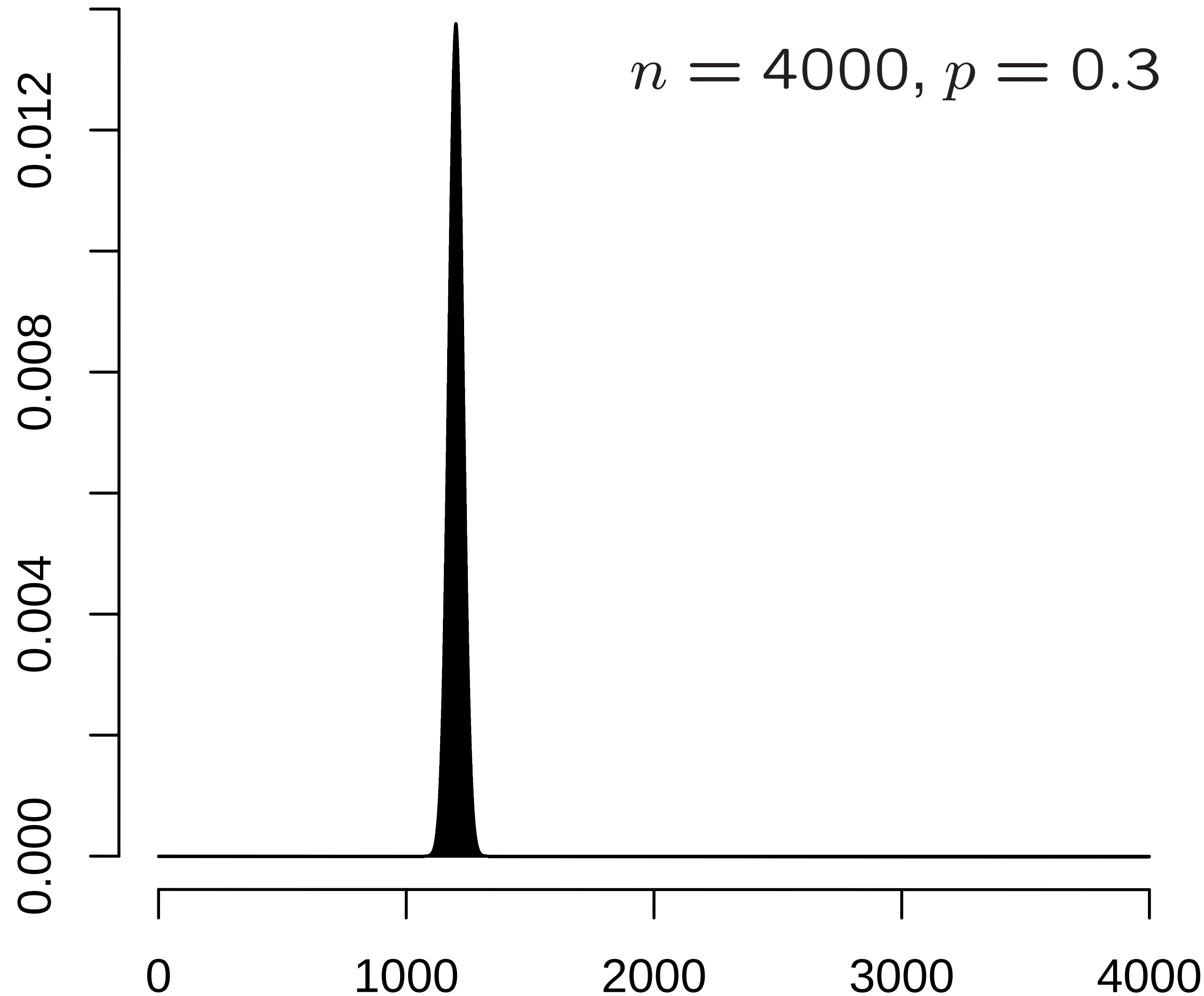
die Bin(n, p)-Verteilung

mit großem n und großem npq ?

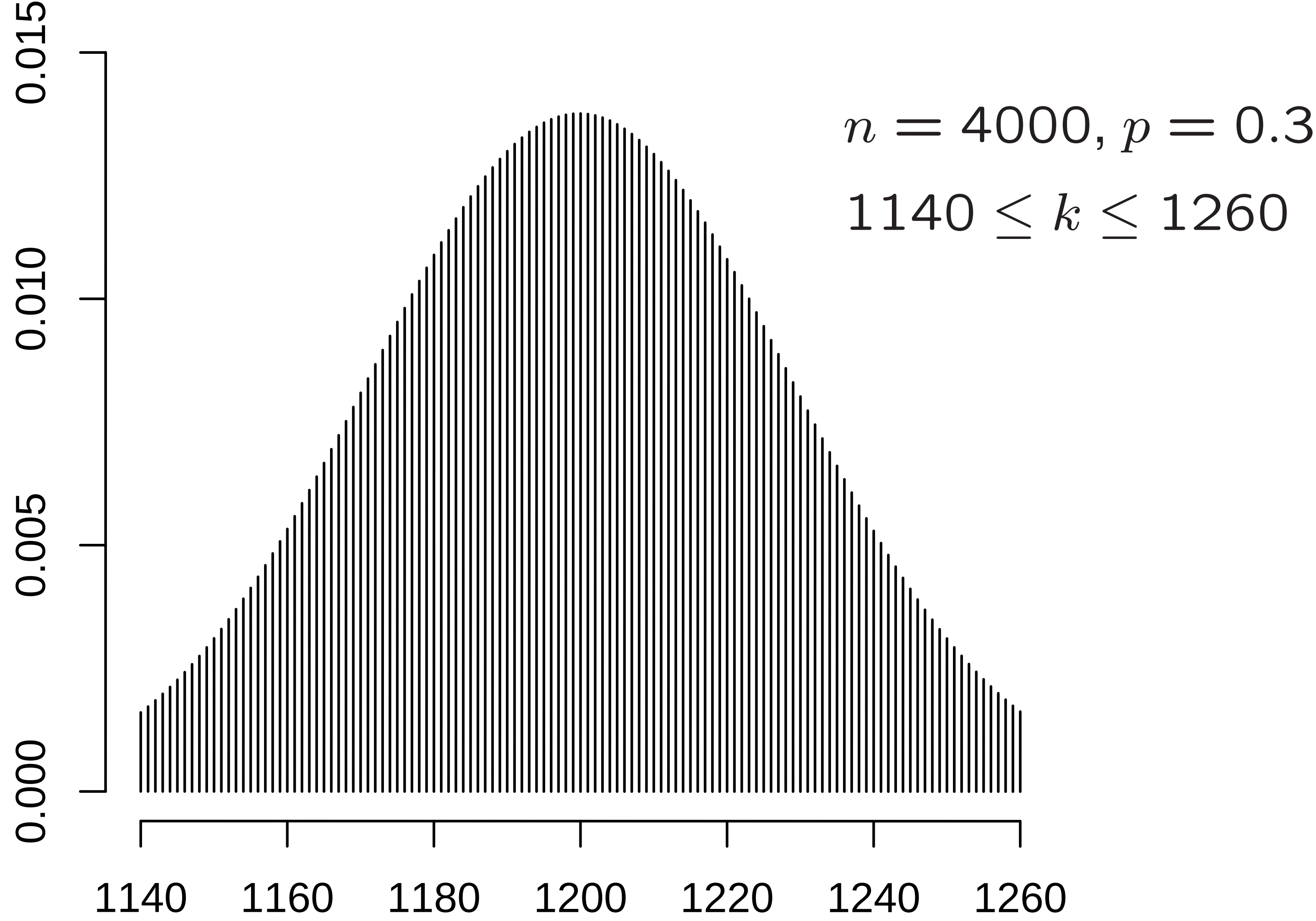


$n = 1000, p = 0.3$
0.000
0.010
0.020
0.030
0
200
400
600
800
1000

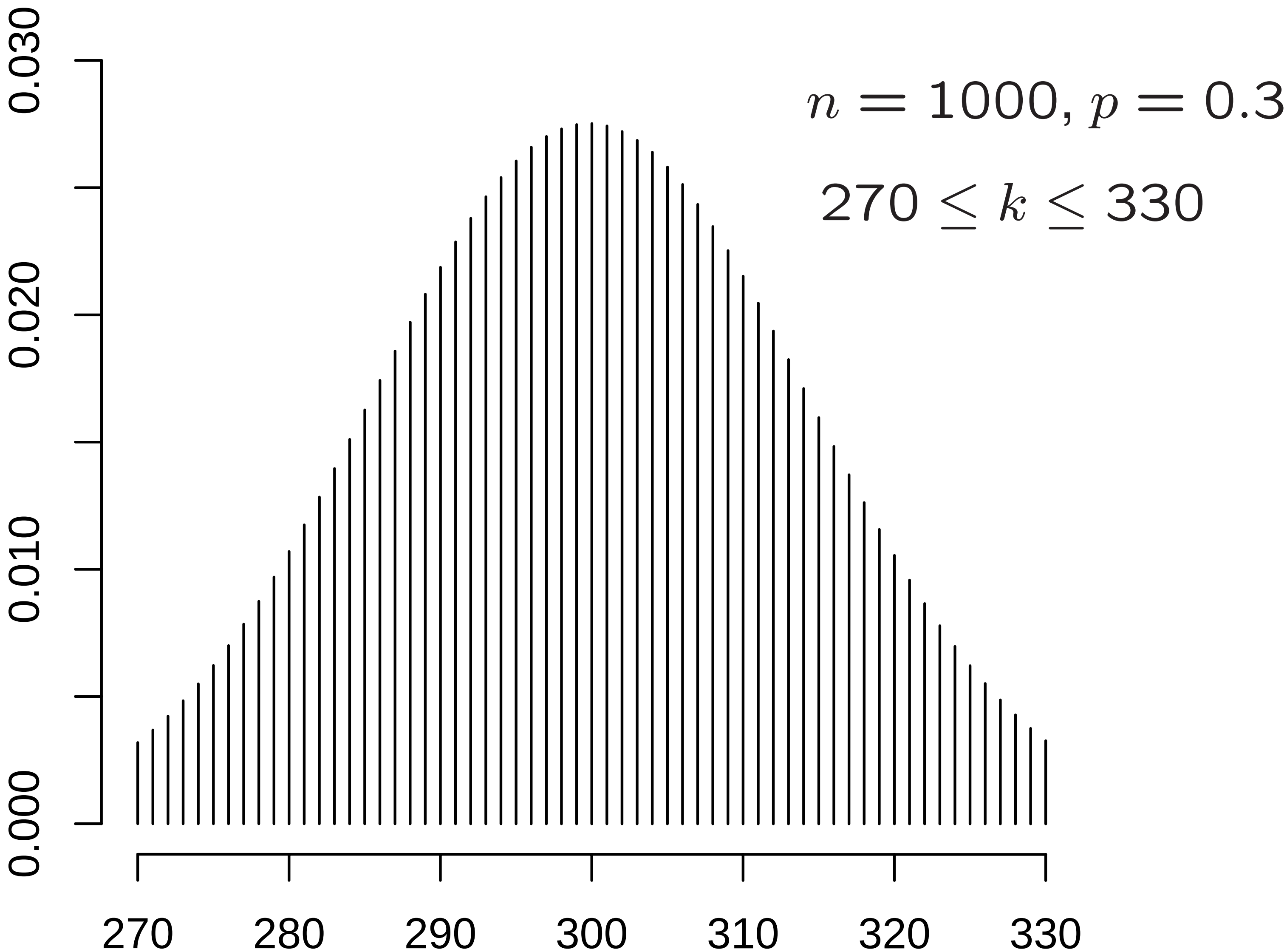

$n = 1000, p = 0.3$
$270 \leq k \leq 330$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330



$n = 4000, p = 0.3$
0.000
0.004
0.008
0.012
0
1000
2000
3000
4000



$n = 4000, p = 0.3$
$1140 \leq k \leq 1260$
0.000
0.005
0.010
0.015
1140
1160
1180
1200
1220
1240
1260



$n = 1000, p = 0.3$
$270 \leq k \leq 330$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330

Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq

sehen "glockenförmig" aus,

wenn man sie geeignet "ins Bild holt".

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)^2\Big) \,.$$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (vgl Buch S. 27):

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \Big(\frac{k-\mu}{\sigma} \Big)^2 \Big) \; .$$

$$= \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{k-\mu}{\sigma} \right)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

6. Die Standard-Normalverteilung

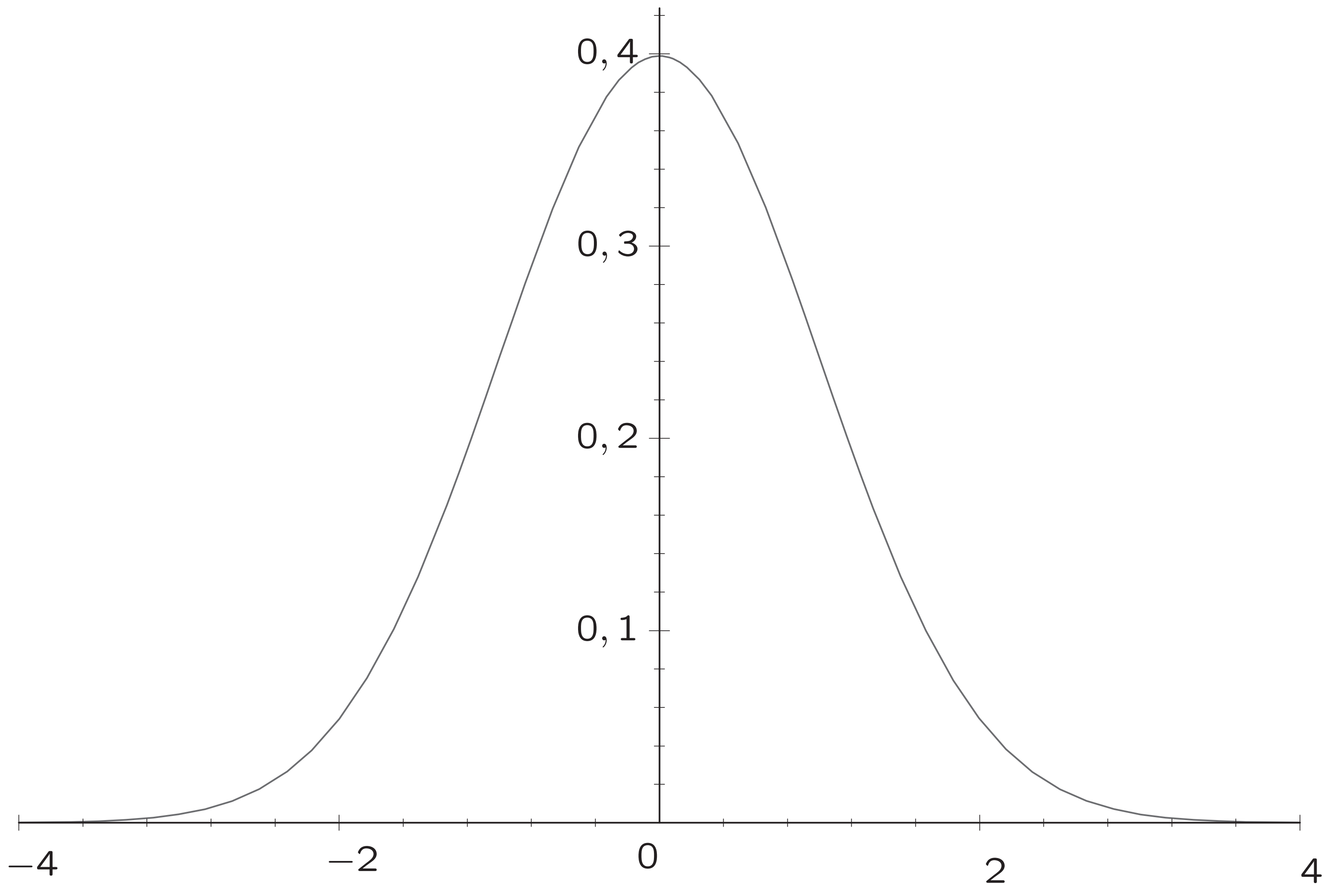
Die nächste Definition beinhaltet
die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.

Tatsächlich lässt sich zeigen: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2/2}\,da = \sqrt{2\pi}$, also
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a)\,da = 1$.


0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

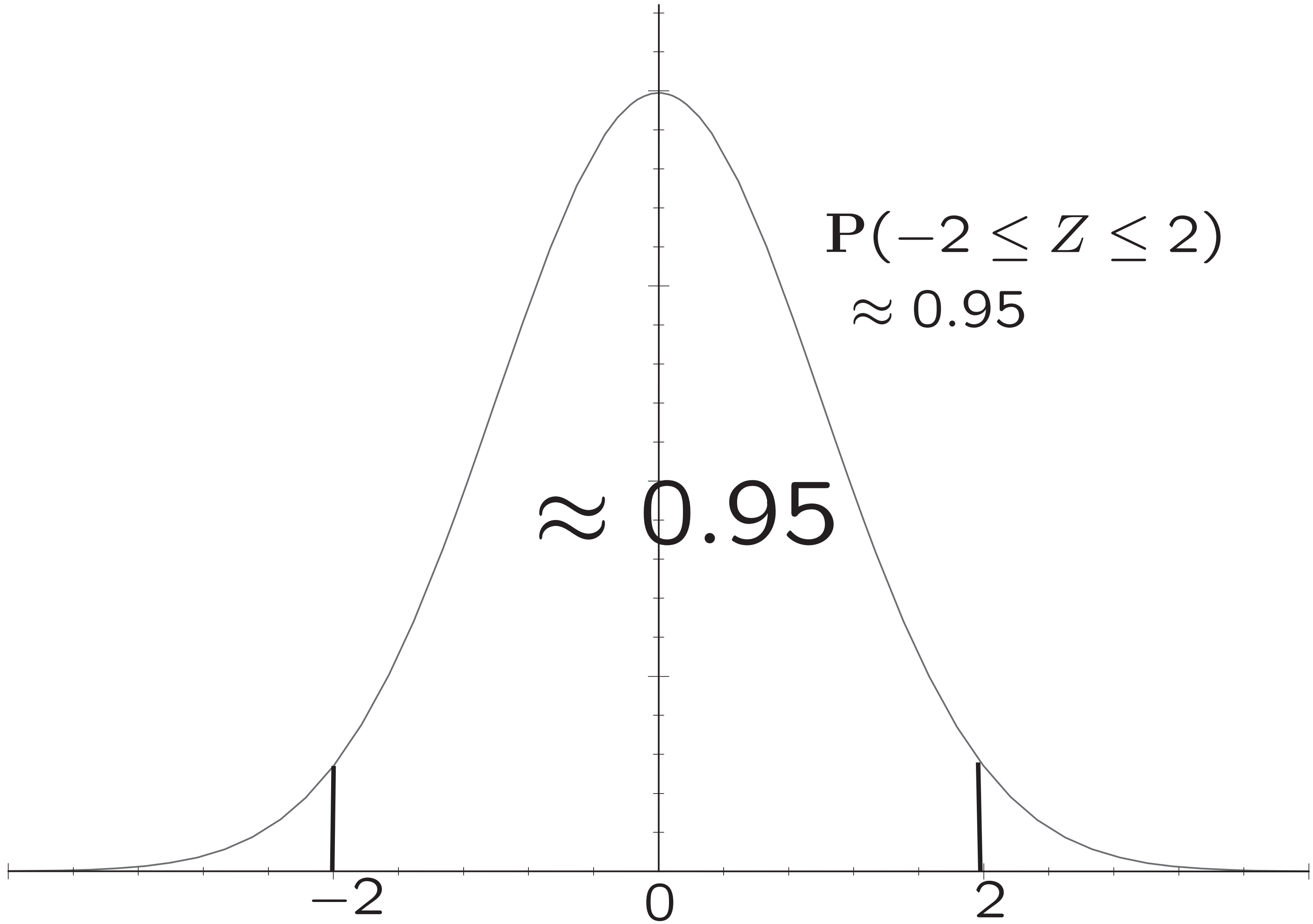
Denn aus Symmetriegründen ist $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

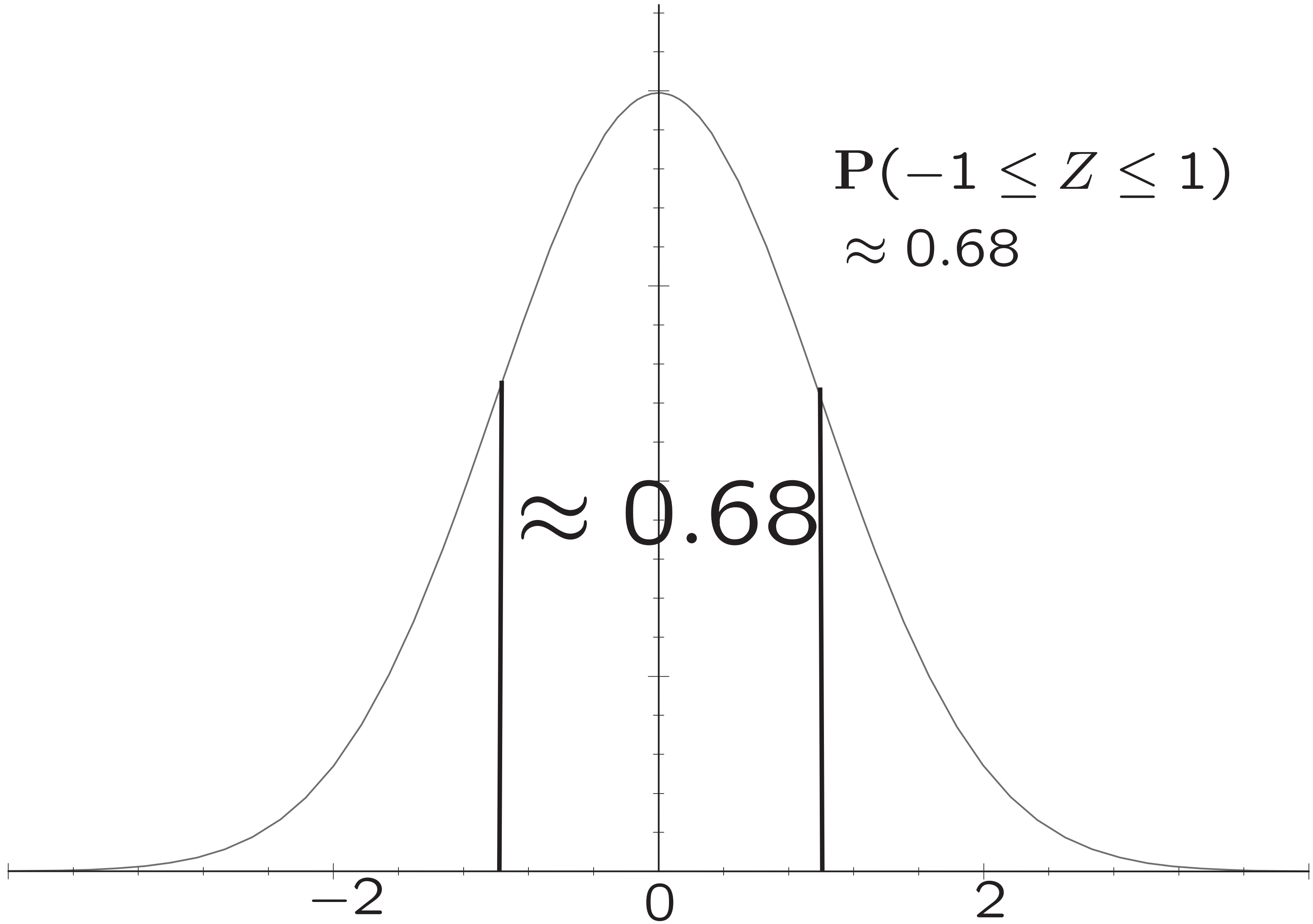
und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{\mathbb{R}} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{\mathbb{R}} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

$$= -a\, e^{-a^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2/2}\, da = \sqrt{2\pi}.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:


$P(-2 \le Z \le 2)$
≈ 0.95
≈ 0.95
-2
0
2


$\mathbf{P}(-1 \leq Z \leq 1)$
≈ 0.68
≈ 0.68
-2
0
2

7. Die $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\, X = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\, da$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz

N(μ, σ^2)-verteilt.

Ist Y N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

8. Der Satz von de Moivre und Laplace

Zurück zu unserer locker gestellten Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine

Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Durch **Standardisieren**, d.h. in diesem Fall

Verschieben um den Erwartungswert μ

und Teilen durch die Standardabweichung σ:

$\frac{X-\mu}{\sigma}$ ist dann annähernd N$(0, 1)$-verteilt.

Genaues sagt der Satz von de Moivre-Laplace (Buch S. 44).

Satz (de Moivre (1733) für $p = 1/2$, Laplace (1812))

Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ ein p-Münzwurf

und Z eine N(0, 1)-verteilte Zufallsvariable.

Dann gilt mit $n \to \infty$:

$$\mathbf{P}\left(c \leq \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - np\right) \leq d\right) \to \mathbf{P}(c \leq Z \leq d)$$

für alle $-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Der Wunder nicht genug:

Was dem p-Münzwurf recht ist,
ist jeder Folge von “unabhängigen, identisch verteilten”
Zufallsvariablen mit endlicher Varianz billig.

Diese Aussage wird präzisiert im klassischen
Zentralen Grenzwertsatz (Buch S. 77);
er verallgemeinert den Satz von de Moivre-Laplace.
Mehr dazu demnächst !