Vorlesung 6a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1 Begriffsbildung, Uniforme Verteilung & Co.

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S = [0, 1]$ heißt

uniform verteilt auf S,

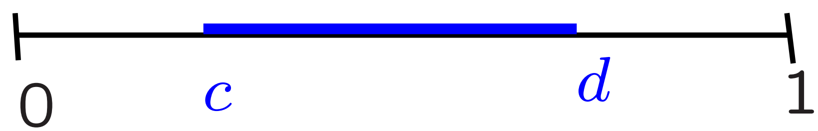
wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $V(A)$

gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = V(A).$$

Beispiel 1:

$$A := [c, d] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = d - c.$$

Beispiel 2:

$$A := [c, d] \cup [e, f] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d < e \leq f \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = (d - c) + (f - e).$$

2. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$

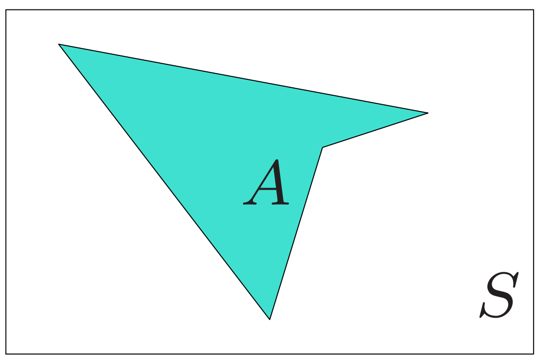
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf* S, wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



3. Uniforme Verteilung auf einer kontinuierlichen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int\limits_A \mathbf{P}(X \in da) = \int\limits_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$

4. Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur
mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$
ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

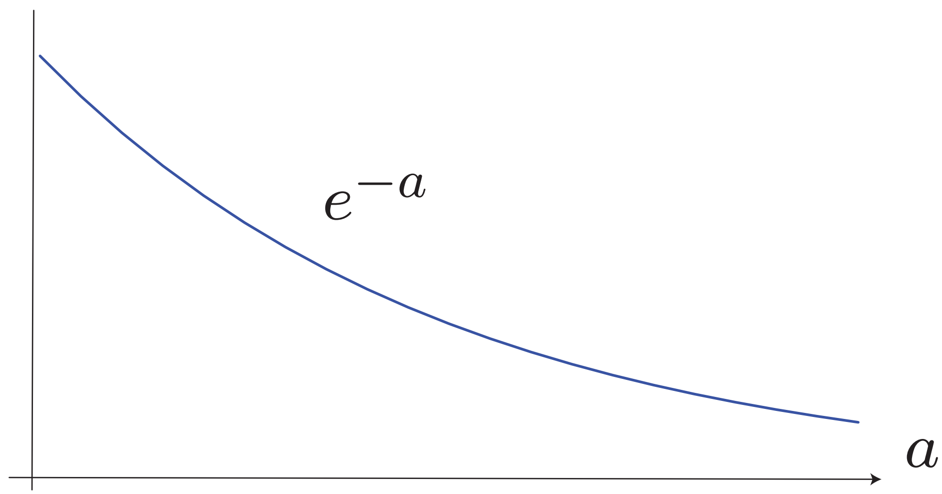
$$\int_S f(a)\,da = 1.$$

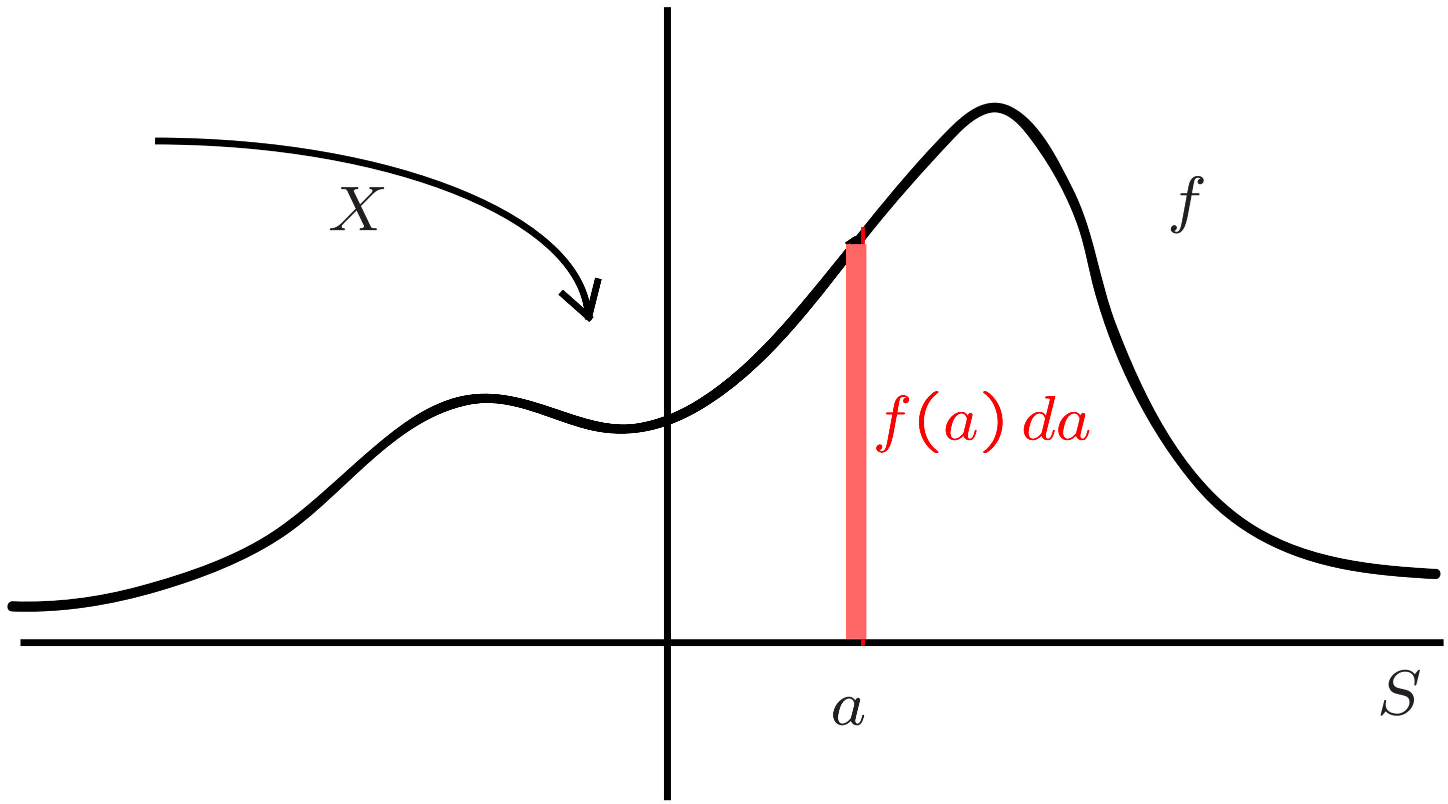
Die Bedingung $\int_S f(a)\,da = 1$ kann auch erfüllt sein,

wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \;\; f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$




X
f
$f(a)\,da$
a
S

Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a)\,da = 1\ .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c,d] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [c,d]\big) = \int_c^d f(a)\,da\ ,$$

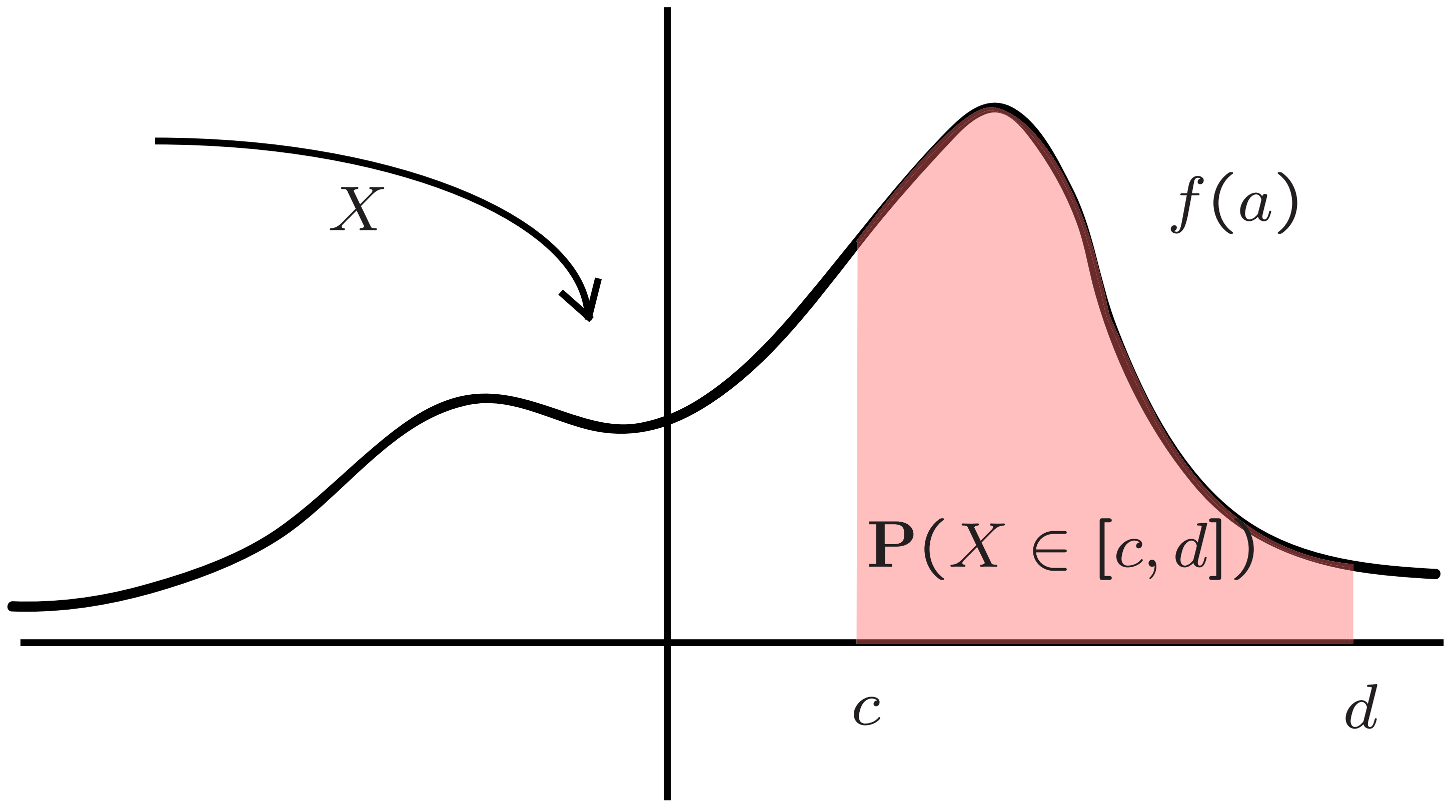
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\,da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\,da\ , \quad a \in S\ ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.


X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [c,d])$
c
d

Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$

ist für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = c) = \int_c^c f(a)\,da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $c \le d \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(c,d]} f(a)\,da = \int_{[c,d]} f(a)\,da = \int_c^d f(a)\,da.$$

Tatsächlich hat man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int_A f(a)\, da$ nicht nur für Intervalle A, sondern für eine viel größere Klasse von "messbaren Mengen" zur Verfügung.

Außerdem gilt für derartige paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ die "abzählbare Additivität" des Integrals:

$$\int_{\bigcup A_i} f(a) da = \sum_i \int_{A_i} f(a)\, da.$$

Das Stichwort ist das *Lebesgue-Integral*.
Es verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff, sodass Sie "für die Praxis" nicht umdenken müssen.

5. Verteilungsfunktionen

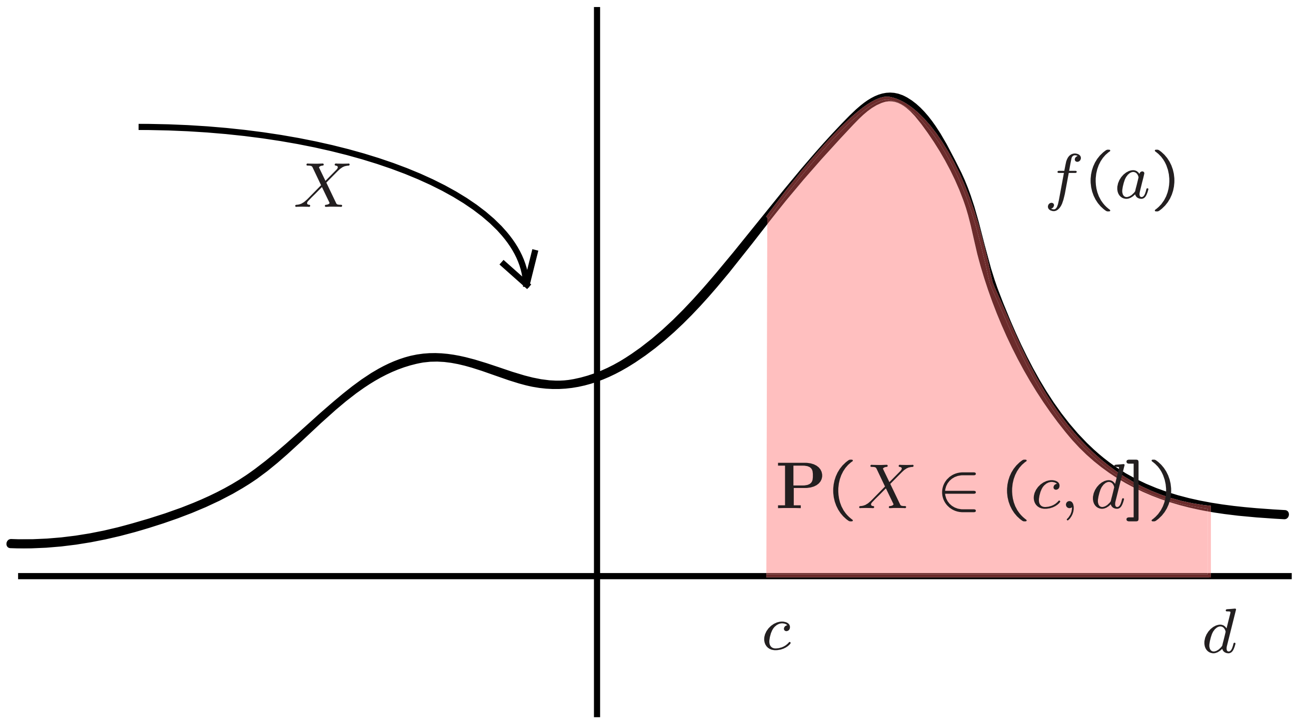
Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Ist f stetig in a, dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$\mathbf{P}(X \leq d) - \mathbf{P}(X \leq c) = \mathbf{P}(c < X \leq d)$$

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(a)da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

6. Beispiele

1. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2}\, da, \;\; 0 \le a \le 2$.

2. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\dfrac{1}{r-l}\, da$, $\quad a \in S$.

3. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

4. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 < x \leq 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$

$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-x}) = 1 - e^{-x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad x \ge 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.