Vorlesung 3b

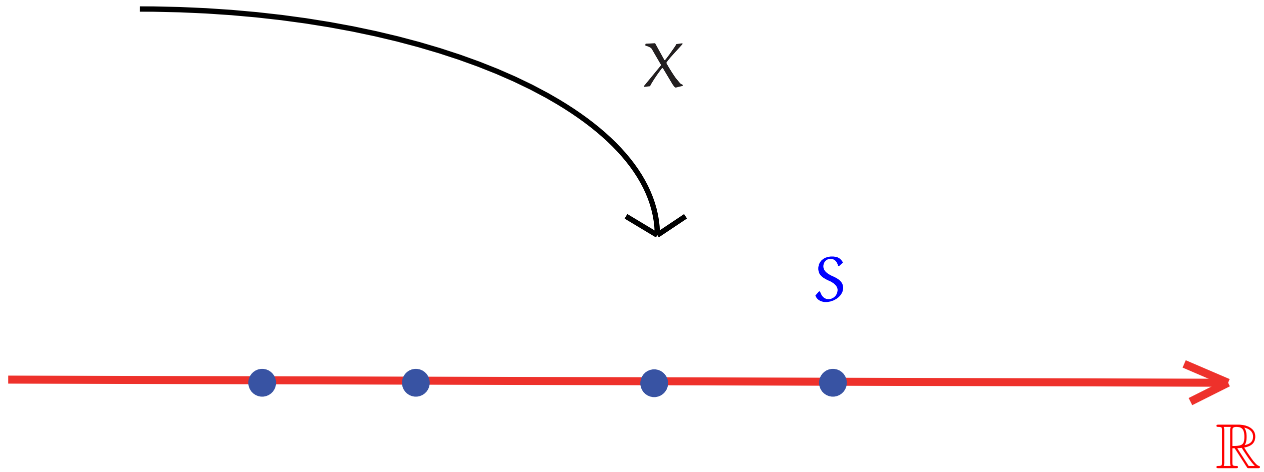
Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 2

0. Wiederholung

X sei eine diskrete reellwertige Zufallsvariable



$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a\,\mathbf{P}(X = a)\ .$$

heißt *Erwartungswert* von X.

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

<u>Additivität</u>

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Wir werden sie in Kürze herleiten;

erst erinnern wir uns an die Anwendungsbeispiele aus VL 3a:

Ein prominenter Fall für die Anwendung ist

$$X = Z_1 + \cdots + Z_n,$$

wobei die $Z_1, \ldots, Z_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[Z_i] = \mathbf{P}(Z_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(Z_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(Z_n = 1)\ .$$

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei $\mathrm{Bin}(n, p)$ verteilt.

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = np}$$

BEISPIEL 2

Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

X sei Hyp(n, g, w) verteilt.

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = n\frac{w}{g}}$$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$\mathbf{P}(Z_i = 1) = p \qquad \mathbf{P}(Z_i = 0) = q := 1 - p$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),

der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

$11100011 \qquad R = 3$

$10101010 \qquad R = 8$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,

wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \dots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = 1 + 2pq(n-1)}$$

Gerade haben wir die Linearität des Erwartungswertes
schon in Beispielen angewendet.

Wir werden sie gleich aus der Definition

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}(X = a)$$

herleiten.
Hilfreich dabei ist
eine wichtige „Transformationsformel“:
(Buch S. 23).

1. Transformationsformel für den Erwartungswert

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$

(so dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen $h(X)$

wohldefiniert ist). Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a) \; .$$

Die Idee ist einfach: anstatt

mit den Gewichten der Werte $b = h(a)$, $a \in S$ zu mitteln,

“zerlegt man nach dem Urbild”

und mittelt mit den Gewichten der Werte a.

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)$$

Beweis:

$$\sum_{b \in h(S)} b\,\mathbf{P}(h(X) = b)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{a \in S} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)\,. \quad \square$$

2. Zur Wohldefiniertheit des Erwartungswertes

Wie kann es sein, dass für eine

diskrete reellwertige Zufallsvariable X

mit $\mathbf{P}(X \in S)$, S abzählbar,

die Summe $\sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a)$ nicht wohldefiniert ist?

Ein Beispiel: $\mathbf{P}(X = (-2)^n) := 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Dann ist $$\sum_{n \in \{1,3,\ldots\}} -2^n \mathbf{P}(X = -2^n) = -\infty$$

und $$\sum_{n \in \{2,4,\ldots\}} 2^n \mathbf{P}(X = 2^n) = +\infty.$$

Aber die Summe von $-\infty$ und $+\infty$ gibt keinen Sinn!

Wenn wir sagen

Die diskrete reellwertige Zufallsvariable X

hat einen wohldefinierten Erwartungswert

meinen wir, dass nicht zugleich

$$\sum_{a \in S, a > 0} a\mathbf{P}(X = a) \text{ und } \sum_{a \in S, a < 0} |a| \, \mathbf{P}(X = a)$$

Unendlich sein dürfen.

3. Die Linearität des Erwartungswertes

- Beweis

Wir betrachten

zwei diskrete reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2,

die gemeinsam in einem Zufallsexperiment auftreten

und sich damit zu einem zufälligen Paar (X_1, X_2)

zusammenfassen lassen.

Für $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ ist dann auch

$$c_1X_1 + c_2X_2$$

eine diskrete reellwertige Zufallvariable.

Satz [**Linearität des Erwartungswertes**]

(Buch S. 52)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1\mathbf{E}[X_1] + c_2\mathbf{E}[X_2]\ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Den Beweis führen wir hier nur für *diskrete* Zufallsvariable,
und zwar über die Transformationsformel mit $h(a_1, a_2) := c_1a_1 + c_2a_2$.

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$$h(a_1, a_2) := c_1 a_1 + c_2 a_2:$$

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (c_1 a_1 + c_2 a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (c_1 a_1 + c_2 a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1\in S_1} \sum_{a_2\in S_2} (c_1a_1 + c_2a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1\mathbf{E}[X_1]$$

$$+ c_2 \sum_{a_2\in S_2} a_2 \sum_{a_1\in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (c_1a_1 + c_2a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1\mathbf{E}[X_1]$$

$$+ c_2\mathbf{E}[X_2]$$

$$\square$$

4. Zwei weitere fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts: Positivität und Monotonie:

(vgl. Buch S. 55)

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend damit, dass der

Wertebereich von X eine Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ ist.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert eine

abzählbare Teilmenge S des Wertebereichs mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Für diese Menge S gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) \quad = \quad 0 + \sum_{a \in S : a > 0} a\mathbf{P}(X = a),$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Für diese Menge S gilt: $S \subset [0, \infty)$. Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S : a > 0} a \mathbf{P}(X = a),$$

woraus sich beide Aussagen ergeben. $\square$

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$

5. Die Ungleichung von Markov

Beispiel:

X reellwertige Zufallsvariable, $c > 0$.

Dann gilt $\quad c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq |a|, \quad a \in \mathbb{R} \quad$ und daher

$$cI_{\{|X| \geq c\}} \leq |X|.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{|X| \geq c\}}] \leq \mathbf{E}[|X|]$$

$$\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[|X|]}$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov.**

6. Zusammenfassung des Wichtigsten

A.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum a \, \mathbf{P}(X = a)$$

<u>und</u>

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” $X_1, X_2, \ldots$

B.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

C.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + ... + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + ... + \mathbf{E}[Z_n]$$