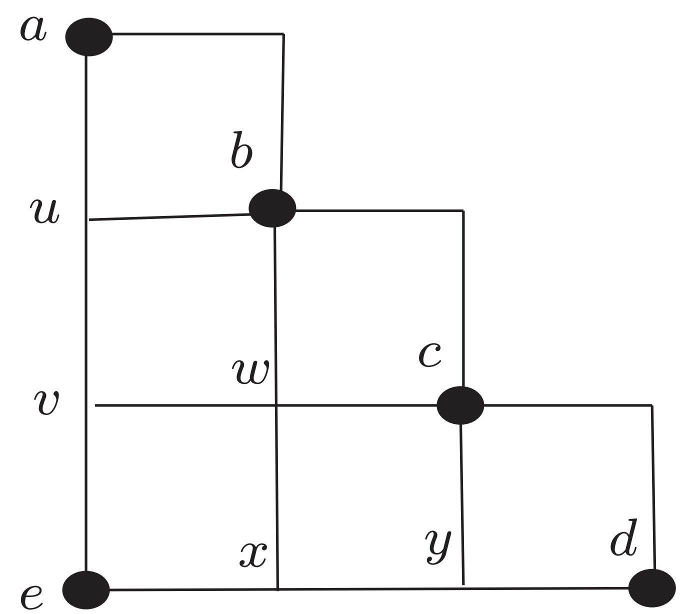
Vorlesung 15b

Eine Klausur aus 2015/16

mit Lösungen

1. Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen. Wieviele Schritte braucht es in Erwartung bei Start in w bis zum erstmaligen Treffen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$?

Hinweis: Nützen Sie die Symmetrie des Problems!



Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch x und w gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \ \ s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch x und w gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch x und w gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Einsetzen der 1. und der 3. in die 2. Gleichung ergibt:
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}s(x)) + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{3}s(x)) = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}s(x) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}s(x)$$

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch x und w gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Einsetzen der 1. und der 3. in die 2. Gleichung ergibt:
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}s(x)) + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{3}s(x)) = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}s(x) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}s(x)$$

$$\Longleftrightarrow 18s(x) = 18 + 6 + 6 + (3 + 2)s(x)$$
$$\Longleftrightarrow 13s(x) = 30, \qquad s(x) = \tfrac{30}{13}, \quad \boxed{s(w) = \tfrac{28}{13}}.$$

2. X sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie

a) die Verteilungsfunktion

b) die Dichte

c) den Erwartungswert

von $Y := e^{X/2}$.

Hinweis als Rechenhilfe: $e^{-2\ln b} = (e^{\ln b})^{-2} = ?$

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F_Y'(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F_Y'(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

c) $\mathbf{E}[Y] = \int_1^\infty b f_Y(b)\, db = \int_1^\infty b \frac{2}{b^3}\, db = 2 \int_1^\infty \frac{1}{b^2}\, db = 2\Big(-\frac{1}{b}\Big|_1^\infty\Big) = 2$

Lösung: X nimmt seine Werte in $[0, \infty$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F_Y'(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

c) $\mathbf{E}[Y] = \int_1^\infty b f_Y(b)\, db = \int_1^\infty b \frac{2}{b^3}\, db = 2 \int_1^\infty \frac{1}{b^2}\, db = 2\Big(-\frac{1}{b}\Big|_1^\infty\Big) = 2$
Alternativ (direkt, ohne Rückgriff auf b)):
$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[h(X)] = \int_0^\infty h(a) f_X(a) da = \int_0^\infty e^{a/2} e^{-a} da = \int_0^\infty e^{-a/2} da = -2e^{-a/2}\Big|_0^\infty = 2.$

3. a) In einem p-Münzwurf mit n Versuchen ist K/n, die relative Anzahl von Erfolgen, für nicht zu kleines np und $n(1-p)$, annähernd normalverteilt - mit welchem Erwartungswert und welcher Varianz?

b) In einem p-Münzwurf betrug die relative Häufigkeit der Erfoge bei n Versuchen 48%. Wie groß muss n sein, damit unter der Hypothese $p = 1/2$ eine mindestens so große Abweichung vom Erwartungswert eine Wahrscheinlichkeit von nicht mehr als 0.05 hat?

Lösung: a) K ist Bin(n,p)-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

Lösung: a) K ist Bin(n,p)-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

Lösung: a) K ist Bin(n,p)-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

b) Der beobachtete Ausgang von $\frac{K}{n}$ war $\frac{k}{n} = 0.48$, dessen absolute Abweichung vom Erwartungswert von $\frac{K}{n}$ ist $|\frac{k}{n} - p| = 0.02$.
Wie groß muss n sein, damit $\mathbf{P}(|\frac{K}{n} - p| \geq 0.02) \approx 0.05$?

Lösung: a) K ist Bin(n,p)-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

b) Der beobachtete Ausgang von $\frac{K}{n}$ war $\frac{k}{n} = 0.48$, dessen absolute Abweichung vom Erwartungswert von $\frac{K}{n}$ ist $|\frac{k}{n} - p| = 0.02$.
Wie groß muss n sein, damit $\mathbf{P}(|\frac{K}{n} - p| \geq 0.02) \approx 0.05$?

Die (approximative) Gleichheit trifft zu, wenn die Abweichung 0.02 das Zweifache der Standardabweichung von $\frac{K}{n}$ ist:
$0.02 = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (wegen $p = 1/2$).
Also: $\sqrt{n} = 50$, $\boxed{n = 2500}$

4. Wir betrachten n Spieler mit den Namen $1, 2, \ldots, n$. Jedes Paar von Spielern entscheidet sich mit Wahrscheinlichkeit p (unabhängig von allen anderen Paaren), ob es eine Verbindung ("Kooperation") eingeht. Für $i < j < k$ sagen wir, dass *die Dreieckskonstellation* $\{i, j, k\}$ *besteht*, wenn alle drei Paare (i, j), (i, k), (j, k) eine Verbindung eingehen.

a) Wieviele Dreieckskonstellationen können (für gegebenes $n \geq 3$) maximal bestehen?
b) Sei $n \geq 3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Dreieckskonstellation $\{1, 2, 3\}$?
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen
(i) für allgemeines $n \geq 3$ und $p \in (0, 1)$, (ii) für $n = 10$ und $p = 1/4$.

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

Lösung:
a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

Lösung:
a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert p^3.

Lösung:
a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert p^3.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert p^3.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

$\binom{n}{3}p^3$

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit p^3 (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert p^3.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

$\binom{n}{3}p^3$

(ii) $\frac{15}{8}$.

5. Auf dem Zustandsraum $S := \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Übergangsmatrix P definiert durch
$P(1,1) = P(1,2) = P(1,3) = 1/3,$
$P(2,1) = P(2,3) = 1/2,$
$P(3,1) = P(3,2) = 1/2.$

a) Finden Sie eine Verteilung π auf S mit $\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a)$, $a, b \in S$.

b) Es sei $X = (X_0, X_1, \ldots)$ eine Markovkette zur Übergangsmatrix P mit Start in der in a) gefundenen reversiblen Gleichgewichtsverteilung π.
(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1)$ und $\mathbf{P}_\pi(X_7 < X_8)$.
(ii) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Zeitpunkte $i \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, für die $X_i < X_{i+1}$ gilt?

Lösung: a)

$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$$

Lösung: a)

$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(2)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(2)\tfrac{1}{2} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \tfrac{4}{3}) = 1,$$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \tfrac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \tfrac{2}{7}}$$

Lösung: a)

$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(2)\tfrac{1}{2} \iff \pi(2) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \iff \pi(3) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(2)\tfrac{1}{2} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \iff \pi(2) = \pi(3)$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \tfrac{4}{3}) = 1,$$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \tfrac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \tfrac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}.$

Lösung: a)

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$

$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$

$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \frac{4}{3}) = 1,$

$$\boxed{\pi(1) = \frac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \frac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$.

Weil π Gleichgewichtsverteilung ist, gilt insbesondere: Unter $\mathbf{P}_\pi$ ist für jedes $i \geq 1$ das Paar (X_7, X_8) so verteilt wie (X_1, X_2), also ist auch $\mathbf{P}(X_7 < X_8) = \frac{3}{7}$.

Lösung: a)

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \pi(3)$

$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \frac{4}{3}) = 1,$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \tfrac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \tfrac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$.

Weil π Gleichgewichtsverteilung ist, gilt insbesondere: Unter $\mathbf{P}_\pi$ ist für jedes $i \geq 1$ das Paar (X_7, X_8) so verteilt wie (X_1, X_2), also ist auch $\mathbf{P}(X_7 < X_8) = \frac{3}{7}$.

c) Die gefragte Anzahl ist eine Summe von 11 Indikatorvariablen, jede hat (vgl. b) den Erwartungswert $\frac{3}{7}$. Aus der Linearität des EW folgt, dass die gefragte Anzahl den Erwartungswert $11 \cdot \frac{3}{7}$ hat.

6. Wir betrachten ein zweistufiges Experiment, bei dem X_1 exponentialverteilt ist zum Parameter $\lambda > 0$. Gegeben $\{X_1 = a\}$ ist X_2 normalverteilt mit Erwartungswert a und Varianz a. Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert

(ii) die Varianz
von X_2.

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$

$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$

$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$(*) \qquad \mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$

$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Also ist
(i) wegen $(*)$
$\mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$
$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Also ist
(i) wegen $(*)$
$\mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$
und
(ii) wegen $(**)$
$\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[X_1] + \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$.