Vorlesung 11a

Markovketten

Teil 2

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades von n Schritten

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \ldots)$

mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n).$$

Speziell für $n = 2$:

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$

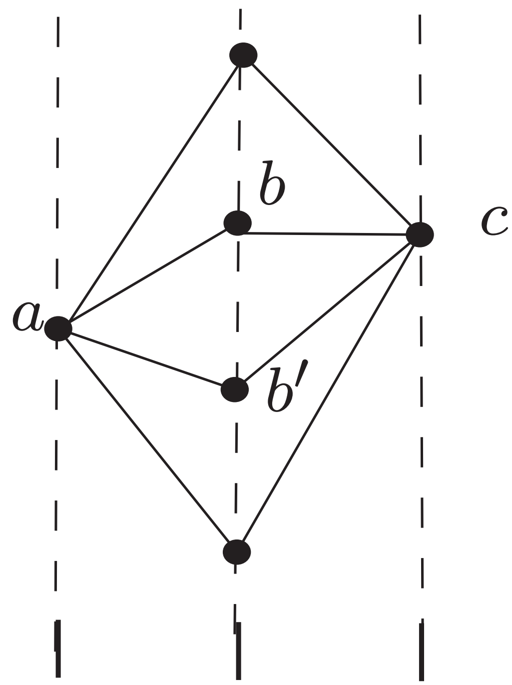
2. Die Zerlegung nach dem ersten Schritt

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$

Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

“Zerlegung von zwei Schritten nach dem ersten Schritt”



Und jetzt für n statt 2:

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b) \, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c) \; .$$

3. Treffwahrscheinlichkeiten

Eben haben wir die Kette in Gedanken laufen lassen

bis zu einem festen Zeitpunkt n.

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie

erstmals eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von

Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P.

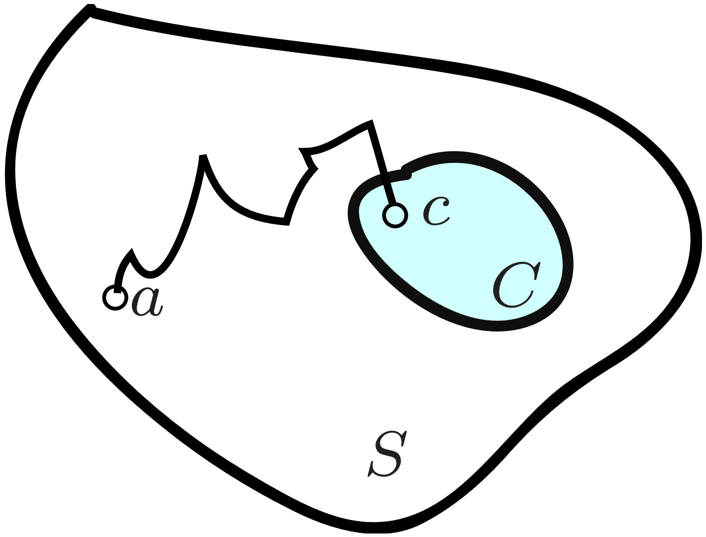
$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass der in $a \in S$ startende Pfad

die Menge C erstmals

im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

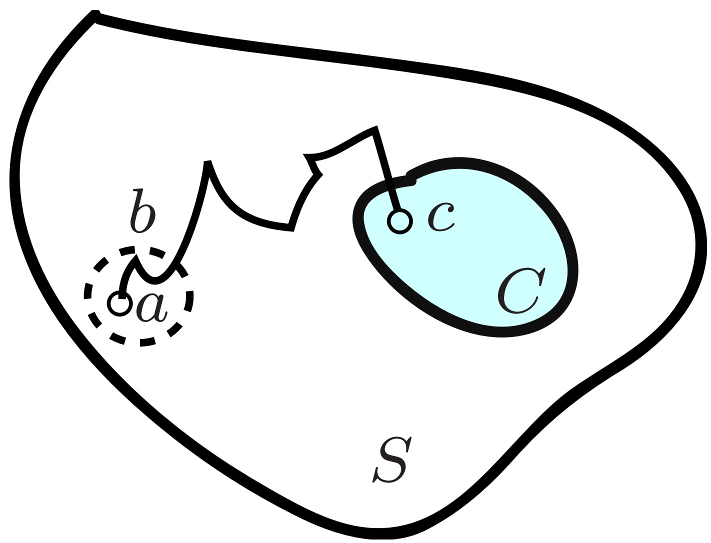
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a),\ a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

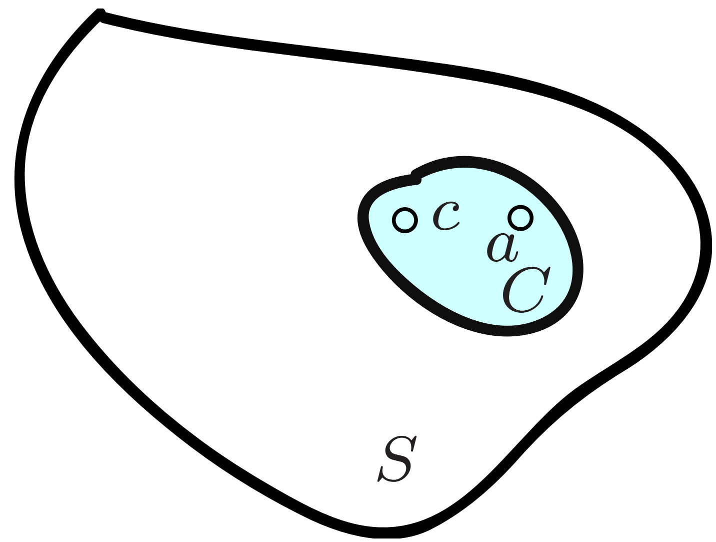
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



Das Stichwort ist: Zerlegung

nach dem ersten Schritt.

4. Beispiele

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

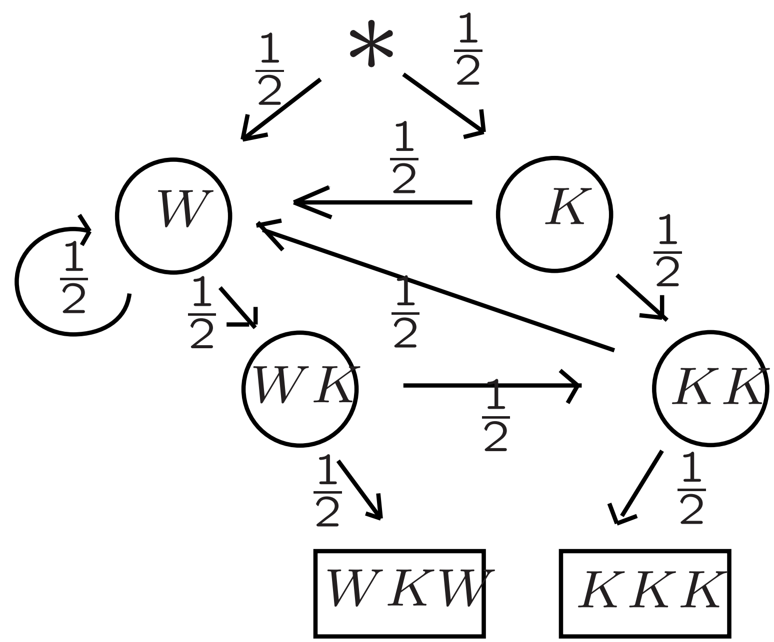
Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster

KKK früher als das Muster WKW?

Hier ist ein
"reduzierter Graph"
der relevanten
Zustände
und Übergänge:

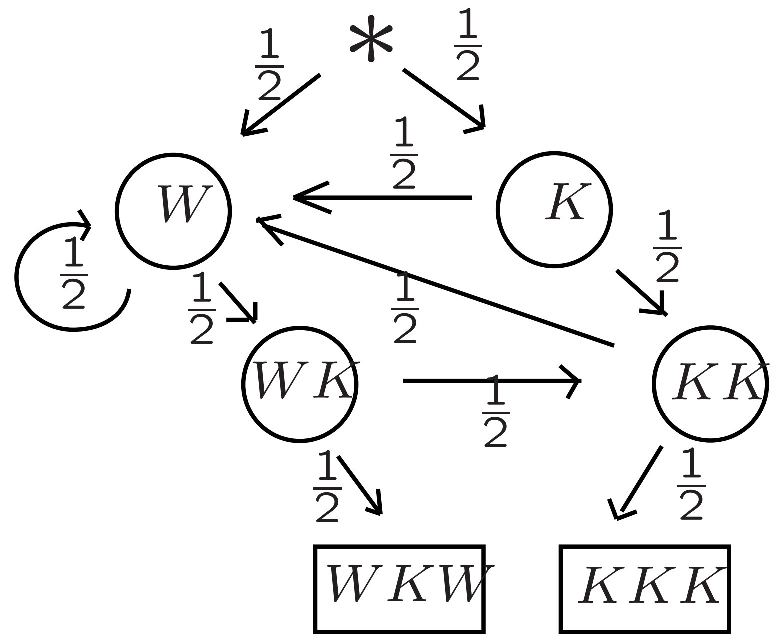


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(WK) = \tfrac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \tfrac{1}{2}w(KK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(W) = \tfrac{1}{2}w(WK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,.$$

und daraus

$$w(W) = \tfrac{1}{3},\, w(K) = \tfrac{1}{2},\;\; w(*) = \tfrac{1}{2}w(W) + \tfrac{1}{2}w(K) = \tfrac{5}{12}\,.$$