

Vorlesung 10b

Mehrstufige Zufallsexperimente

und

Markovketten (Teil 1)

1. Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”
jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \dots, n - 1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \dots a_i, a_{i+1}) = P_{a_1 \dots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}),$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i + 1)$ -ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \dots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n
ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) \\ = & \mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1})P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n) \\ & = \dots \\ = & \rho(a_1)P(a_1, a_2) \dots P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n) . \end{aligned}$$

2. Die Pólya-Urne

Oder

Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu

In einer Urne befinden sich anfangs
eine weiße und eine **blaue** Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und
gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe
zurückgelegt.

Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die
im i -ten Zug vorgefundene Farbe (**0 für blau**, 1 für weiß).

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

(das ist die W'keit, beim zweiten Zug blau zu ziehen,
wenn beim ersten Zug blau gezogen wurde)

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \frac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1 + k}{2 + i} \quad (1)$$

mit $a_1, \dots, a_i, a_{i+1} = 0, 1,$

$$k = k(a_1, \dots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = a_{i+1}\} ;$$

$1 + k$ ist also die Zahl der Kugeln in der Urne,
die nach i Zügen die Farbe a_{i+1} haben.

Z. B. ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_8) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)) &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{3}{5} \frac{2}{6} \frac{3}{7} \frac{4}{8} \frac{5}{9} \\ &= \frac{5! 3!}{9!}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge (a_1, \dots, a_n)
mit $a_1 + \dots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge (a_1, \dots, a_n) mit $a_1 + \dots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \dots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Fazit: **Die Anzahl der**

nach n Zügen hinzugekommenen weißen Kugeln
ist uniform verteilt in $\{0, 1, \dots, n\}$.

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \dots, 1)$,
also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} := \#$ Neuzugänge der Farbe j in n Schritten.

Sei $(k_1, \dots, k_r) \in S_{n,r}$,
d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \dots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen
von $(1, \dots, 1)$ nach $(1 + k_1, \dots, 1 + k_r)$
haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r + 1) \cdots (n + r - 1)} = \frac{k_1! \cdots k_r!}{(n + r - 1)!} (r - 1)! .$$

Alle möglichen Zugfolgen
von $(1, \dots, 1)$ nach $(1 + k_1, \dots, 1 + k_r)$
haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!}.$$

Es gibt $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \dots, X_{rn} = k_r) &= n! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \\ &= \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \dots, X_{rn} = k_r) = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}},$$

d.h. (X_{1n}, \dots, X_{rn}) ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \dots, 1)$

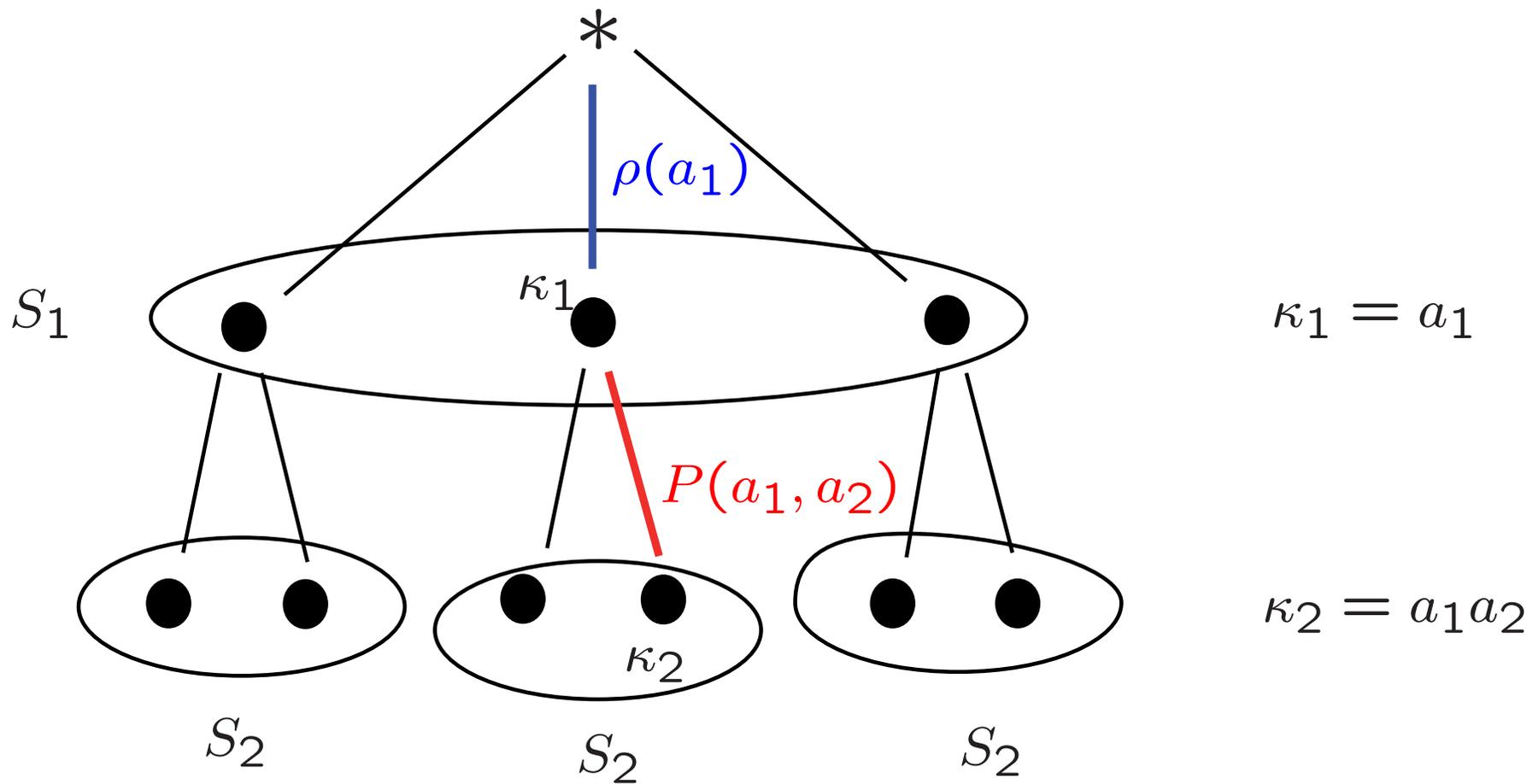
liefert

uniform verteilte Besetzungen!

3. Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsexperimenten durch Bäume

Wir erinnern uns an die

**Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten
durch *Bäume*:**



$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2).$
 (Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Was 2 recht ist, ist $i + 1$ billig:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe i*

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1), \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1$, $\kappa_i = a_1 \dots a_i$, $\kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die **Wahrscheinlichkeit**, in einem bestimmten Blatt zu enden,
ergibt sich als **Produkt der Kantengewichte**
entlang des **Weges** von der **Wurzel** zum **Blatt**.

4. Markovketten

Oder:

Wenn Du das Heute kennst,
kannst Du das Gestern vergessen ...

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\dots a_{i-2} a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**
auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P .

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \dots$ indiziert.

Man denkt sich die **Übergangsmatrix P** als fest und notiert die **Verteilung ρ von X_0** (die “Startverteilung”) als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit P .

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) \\ &= \rho(a_0) \mathbf{P}(a_0, a_1) \cdots \mathbf{P}(a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Startet die Kette in $a \in S$,
dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung
(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt \mathbf{P}_{δ_a} schreibt man auch \mathbf{P}_a
und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) .$$

5. Beispiele für Markovketten

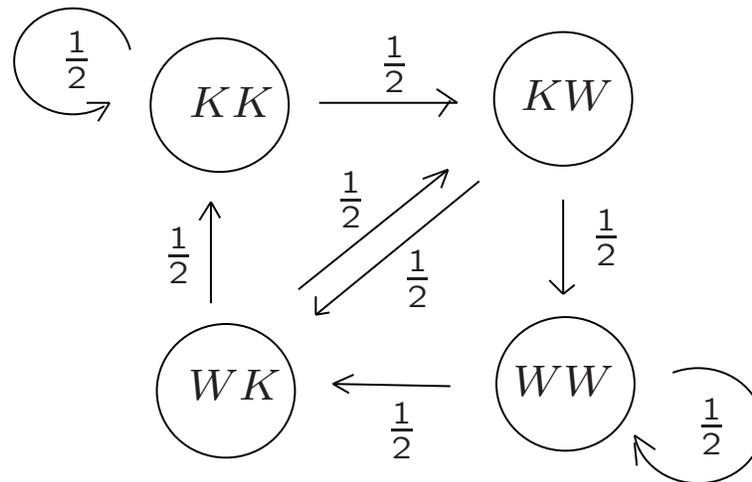
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

Z_0, Z_1, \dots unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

(p, q) -Irrfahrt auf \mathbb{Z} :

$$S = \mathbb{Z}$$

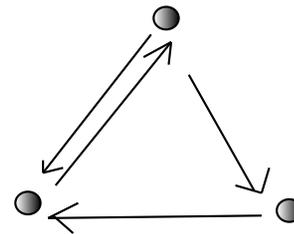
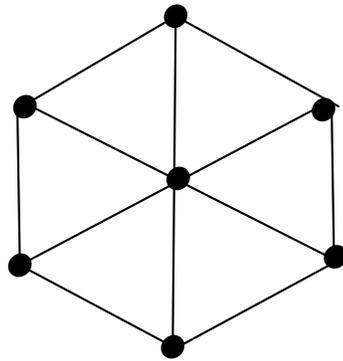
$$P(k, k + 1) = p, \quad P(k, k - 1) = 1 - p =: q$$

$$\text{Var}_a[X_n] = 4npq \quad (\text{Warum gilt das?})$$

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen



$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:
Pólya-Urne

$$S = \{(w, b) : w, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w, b), (w + 1, b)) := \frac{w}{w + b},$$

$$P((w, b), (w, b + 1)) := \frac{b}{w + b}.$$

$$\mathbf{P}_{(1,1)}(X_n = (1 + k, 1 + (n - k))) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, \dots, n$$

(Warum gilt Letzteres?)